verlaghpt.at

Sidlo
Puhm
Steinmair
Dullnig
Pollack-Drs
Wymlatil

Neu nach Lehrplan 2011

MATHEMATIK 1

mit technischen Anwendungen

- BILDUNGSSTANDARDS
- KOMPETENZORIENTIERT
- ZUR NEUEN RDP

Eva-Maria Sidlo – Ursula Puhm – Cornelia Steinmair – Petrus Dullnig – Susanne Pollack-Drs – Georg Wymlatil
unter Mitarbeit von Christina Camilo und Wolfgang Drs

Mathematik mit technischen Anwendungen, Band 1 Neu nach Lehrplan 2011

Um die Übersicht zu erhöhen und das Arbeiten mit dem Buch zu erleichtern, sind die Aufgaben durch farbige Aufgabennummern differenziert:

- Einstiegsaufgaben (also Aufgaben, die zu einem neuen Themenbereich hinführen) sind durch **orangefarbene** Aufgabennummern gekennzeichnet.
- **Schwarze** Aufgabennummern kennzeichnen Aufgaben, deren Lösung im Lehrbuch vollständig dargestellt wird. Solche Aufgaben sind darüber hinaus auch durch eine blaue Rasterunterlegung vom übrigen Text deutlich abgegrenzt.
- Die anderen Aufgaben sind je nach Anspruchsniveau durch **rote** (niedriges Anspruchsniveau), **blaue** (mittleres Anspruchsniveau) und **grüne** (hohes Anspruchsniveau) Aufgabennummern gekennzeichnet. Die mit dieser Kennzeichnung vorgenommene Differenzierung ist für den Unterricht nicht verbindlich.

Bei jeder Aufgabe wird angeführt, welche **Handlungsdimensionen** gemäß dem **Kompetenzmodell (Bildungsstandards Angewandte Mathematik BHS)** jeweils angesprochen werden:

A … Modellieren und Transferieren
B … Operieren und Technologieeinsatz
C … Interpretieren und Dokumentieren
D … Argumentieren und Kommunizieren

Die überwiegend angesprochene **Inhaltsdimension** wird jeweils am unteren Seitenrand angeführt.

Mit Bescheid des Bundesministeriums für Unterricht, Kunst und Kultur vom 24. Jänner 2012, GZ 5.034/0010-Präs.8/2011, gemäß § 14 Abs. 2 und 5 des Schulunterrichtsgesetzes, BGBl. Nr. 472/86, und gemäß den derzeit geltenden Lehrplänen als für den Unterrichtsgebrauch für die 1. Klasse an technischen, gewerblichen und kunstgewerblichen Fachschulen und für den I. Jahrgang an höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten im Unterrichtsgegenstand Angewandte Mathematik geeignet erklärt.

Dieses Schulbuch wurde auf der Grundlage eines zielorientierten Lehrplans verfasst. Konkretisierung, Gewichtung und Umsetzung der Inhalte erfolgen durch die Lehrerinnen und Lehrer.

Schulbuchnummer: 155018

Bildquellen: Bildarchiv der Österreichischen Nationalbibliothek (ÖNB), Wien (46, 60); Creativ Collection (137/4.15, 296); ESA (26); Fotolia.com: © Alexander Rochau (259), © Bergringfoto (144), © Bernardo Ertl (147), © blende40 (159), © Boguslaw Mazur (162), © Carola Schubbel (148), © Daniel Fleck (42), © Denis Khveshchenik (264/7.68), © DeVIce (269), © Digitalpress (100), © Elena Baryshkina (111), © elxeneize (152), © Falco (171), © Fel1ks (150), © Foto-Ruhrgebiet (222/oben), © Franz Pfluegl (202, 239), © Gino Santa Maria (105), © herb (177), © hoangthinguyet (48), © hs-creator (137/4.18), © Hulli (252), © Ichbins11 (62), © jomare (270), © Kai Krueger (252), © Kai Michael Neuhold (224), © Mikhail Basov (220), © MP (206), © olly (264/7.67), © passenger airliner (175), © Pei Ling Hoo (237), © Peter Hansen (212), © TwilightArtPictures (291/8.93); Kleine Enzyklopädie Mathematik (Seite 86), © Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main (98/unten); Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (5); © MEV, Fotograf: Michael Pohl (281); Österreichische Nationalbank (222/unten); Sigrun Egger (132); Wikimedia.Commons (98/oben); alle übrigen von den Autorinnen und Autoren. In Fällen freier Werknutzung: Schulbuchvergütung/Bildrechte: © VBK, Wien 2012

1. Auflage, Nachdruck 2013 (1,01)

Technische Zeichnungen: Herbert Löffler
Satz: Peter Barosch KG, 1220 Wien
Druck und Bindung: Brüder Glöckler GmbH, 2752 Wöllersdorf

ISBN 978-3-230-03548-6

Bestellschein

Liebe Schülerin, lieber Schüler!

Zu diesem Schulbuch gibt es ein Lösungsheft, das die Lösungen zu den Aufgaben dieses Buchs enthält.

Als Ergänzung zu den im Lehrbuch enthaltenen Aufgaben und Problemstellungen gibt es ein Zusatzheft, das einfache Aufgaben zum Üben sowie vor allem grundlegende Inhalte aus der Hauptschule bzw. Neuen Mittelschule bzw. AHS-Unterstufe zur Wiederholung enthält. Durch den ergänzenden Einsatz des Zusatzhefts im Unterricht, durch die Verwendung im Förderunterricht sowie durch gezieltes Üben außerhalb des Unterrichts können damit Defizite aus der bisherigen Schulbildung ausgeglichen werden. Im Zusatzheft sind die Lösungen der dort enthaltenen Aufgaben integriert.

Weiters gibt es ein Tabellenheft, das die wichtigen Formeln der Mathematik enthält, aber auch Grundinformationen aus dem Bereich der Naturwissenschaften bietet.

Bitte gib den ausgefüllten und unterschriebenen Bestellabschnitt in deiner Buchhandlung ab oder bestelle direkt beim Verlag:

Adresse: Verlag Hölder-Pichler-Tempsky GmbH, Frankgasse 4, 1090 Wien
Tel.: 01/403 77 77
E-mail: service@verlaghpt.at

Fax: 01/403 77 77 DW 77

Hiermit bestelle ich mit Rechnung:

Lösungen zu Band 1 (Neu nach Lehrplan 2011)

_____ Expl. Lösungen zu Band 1 (LP 2011)
(ISBN 978-3-230-03550-9)*

*) € 9,70 inkl. Porto und Verpackung

Zusatzheft zu Band 1 (Neu nach Lehrplan 2011)

_____ Expl. Zusatzheft zu Band 1 (LP 2011)
(SBNR 155019)**

**) € 8,70 inkl. Porto und Verpackung

Tabellen – Ausgabe HTL

_____ Expl. Tabellen – Ausgabe HTL
(ISBN 978-3-230-02688-0)***

***) € 7,55 inkl. Porto und Verpackung

Für alle Angebote gilt:
Preisänderungen vorbehalten

Bitte gib deinen Namen und deine Adresse an:

Name:

____

____

Adresse:

____

____

____

Datum und Unterschrift:

____
(bei Minderjährigen des Erziehungsberechtigten)

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis

Die grün gekennzeichneten Abschnitte sind an technischen, gewerblichen und kunstgewerblichen Fachschulen laut Lehrplan erst in der 2. Klasse vorgesehen.

Die rot gekennzeichneten Abschnitte sind an technischen, gewerblichen und kunstgewerblichen Fachschulen laut Lehrplan im Mathematikunterricht nicht vorgesehen.

Zahlen und Mengen

Die Mathematik kann guten Gewissens als eine der ältesten Wissenschaften bezeichnet werden. Ihre „Geburtsstunde" müssen wir uns vor ca. 30 000 Jahren vorstellen, als Steinzeitmenschen begannen, Tiere, Felle usw. zu zählen und dazu Kerben in Knochen ritzten. Heute ist Mathematik die treibende Kraft hinter modernen Technologien. Physik, Chemie oder Wirtschaftswissenschaften sind undenkbar ohne Mathematik. Sie stellt Modelle zur Beschreibung der Wirklichkeit zur Verfügung und liefert Methoden zur Problemlösung.

1.1 Die natürlichen Zahlen

Die Zahl 1 111 000 in ägyptischen Zahlzeichen

MDCXXIV

Die Jahreszahl 1624 in römischen Zahlzeichen

Indische Ziffern

Weder Alltagsgespräche noch wissenschaftliche Diskussionen könnten ohne die Verwendung von Zahlen und Zahlwörtern geführt werden. Die ersten Zahlen, die du als Kind kennen gelernt hast, waren die natürlichen Zahlen 1, 2, 3 ... . Sie waren bereits den frühesten Kulturen bekannt. Die Ziffern, die heute praktisch weltweit verwendet werden, sind aus den indischen Ziffern hervorgegangen. Im 13. Jh. wurden sie durch die Araber nach Europa gebracht und ein Jahrhundert später als „arabische" Ziffern bezeichnet. Die indischen Mathematiker haben bereits im 5. Jh. einer wichtigen Ergänzung zum Durchbruch verholfen. Sie gaben dem „Nichts" ein eigenes Zeichen, die Null war erfunden und wurde ab dem Mittelalter auch in unserem Kulturkreis als Zahl akzeptiert. Wenn auch die Schreibweise der Ziffern seither im Wesentlichen unverändert blieb, hat es auf dem Gebiet der Zahlen noch entscheidende Fortschritte gegeben. Neue Zahlenbereiche wurden „erfunden" und das Zahlenverständnis hat sich grundlegend verändert.

In der modernen Mathematik werden Zahlen als Zahlenmengen beschrieben. Unter einer **Menge** versteht man dabei die Zusammenfassung von Objekten mit gemeinsamen Eigenschaften zu einem Ganzen. Ein Grundprinzip der mathematischen Arbeitsweise ist es, Behauptungen mithilfe korrekter mathematischer Rechen- und Argumentationsschritte auf schon Bewiesenes zurückzuführen. Trotzdem muss man einige unbewiesene Grundaussagen, die man **Axiome** (altgriechisch: „Grundsatz") nennt, akzeptieren. Auch die Beschreibung der natürlichen Zahlen erfolgt nach diesen Grundsätzen. Die von Peano (italienischer Mathematiker) formulierten Axiome lauten vereinfacht ausgedrückt und wie früher üblich mit 1 beginnend:

Guiseppe Peano (1858 – 1932)

- 1 ist eine natürliche Zahl.
- Jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger.
- Verschiedene Zahlen haben verschiedene Nachfolger.
- Keine Zahl hat den Nachfolger 1.
- Eine Menge, die 1 enthält und zu jeder Zahl auch deren Nachfolger, enthält alle natürlichen Zahlen.

Die **Menge der natürlichen Zahlen** wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet. Sie wird mithilfe von geschwungenen Klammern { }, auch Mengenklammern genannt, angeschrieben: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 ...\}$
Mit $\mathbb{N}^*$ wird die Menge der natürlichen Zahlen ohne die Zahl Null bezeichnet: $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3 ...\}$

Bemerkung:
Kardinalzahlen (Angabe einer Anzahl): eins, zwei, drei ... . Vergleiche: one, two, three ...
Ordinalzahlen (Angabe einer Reihenfolge): erstes, zweites ... . Vergleiche: first, second ...

Zahlen und Mengen

1.1.1 Rechnen mit natürlichen Zahlen

Wir fassen wichtige Bezeichnungen und die für die Grundrechnungsarten geltenden Rechengesetze noch einmal zusammen.

Bezeichnungen	Rechengesetze und -regeln, Eigenschaften
Addition $a + b = c$ a, b ... Summanden c ... Summe	• Die Addition zweier natürlicher Zahlen ergibt immer eine natürliche Zahl. Die Menge der natürlichen Zahlen ist daher abgeschlossen bezüglich der Addition. • **Kommutativgesetz:** Die Reihenfolge der Summanden darf vertauscht werden. $a + b = b + a$ ZB: $2 + 7 = 7 + 2$ • **Assoziativgesetz:** Zwischensummen dürfen beliebig gebildet werden. $a + (b + c) = (a + b) + c$ ZB: $3 + (4 + 5) = (3 + 4) + 5$
Subtraktion $a - b = c$ a ... Minuend b ... Subtrahend c ... Differenz	• Die Subtraktion ist die Umkehrung der Addition. Sie ist innerhalb der natürlichen Zahlen nur eingeschränkt ausführbar. ZB: $(5 - 7)$ ist keine natürliche Zahl. • Minuend und Subtrahend dürfen nicht vertauscht werden. • Die Reihenfolge der Subtrahenden darf vertauscht werden. ZB: $10 - 2 - 3 = 10 - 3 - 2$ • Durch Setzen von Klammern kann man mehrere Subtrahenden zusammenfassen und gemeinsam abziehen. ZB: $10 - 2 - 3 = 10 - (2 + 3) = 10 - 5 = 5$
Multiplikation $a \cdot b = c$ a, b ... Faktoren c ... Produkt	• Die Multiplikation zweier natürlicher Zahlen ergibt immer eine natürliche Zahl. Die Menge der natürlichen Zahlen ist daher abgeschlossen bezüglich der Multiplikation. • **Kommutativgesetz:** Die Reihenfolge der Faktoren darf vertauscht werden. $a \cdot b = b \cdot a$ ZB: $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$ • **Assoziativgesetz:** Teilprodukte dürfen beliebig gebildet werden. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ ZB: $3 \cdot (4 \cdot 5) = (3 \cdot 4) \cdot 5$
Division $a : b = c$ a ... Dividend b ... Divisor c ... Quotient	• Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation. Sie ist innerhalb der natürlichen Zahlen nur eingeschränkt ausführbar. ZB: $2 : 6$ ist keine natürliche Zahl. • Dividend und Divisor dürfen nicht vertauscht werden. • Klammern können nicht beliebig gesetzt werden. ZB: $48 : 12 : 2 = (48 : 12) : 2 = 4 : 2 = 2$, aber $48 : (12 : 2) = 48 : 6 = 8$

Verbindung der Grundrechnungsarten

Damit bei Rechenausdrücken mit verschiedenen Rechenzeichen die Reihenfolge der Abarbeitung eindeutig festgelegt ist, gilt:

- **Punktrechnung vor Strichrechnung**: ZB: $5 + 2 \cdot 3 = 5 + 6 = 11$

  Punktrechnung zuerst ausführen — Strichrechnung danach

- Eine andere Reihenfolge der Abarbeitung wird durch das Setzen von Klammern erzielt.
  Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
  ZB: $2 \cdot 137 = 2 \cdot (100 + 37) = 200 + 74 = 274$

In der Menge der natürlichen Zahlen ℕ kann man uneingeschränkt addieren und multiplizieren.
Es gilt: Klammern zuerst, dann Punktrechnung vor Strichrechnung.

1.1 Berechne das Ergebnis. **B**
1) $2 \cdot 7 + 4 \cdot 3$ **2)** $2 \cdot (7 + 4 \cdot 3)$ **3)** $2 \cdot (7 + 4) \cdot 3$ **4)** $(2 \cdot 7 + 4) \cdot 3$

1.2 Setze die fehlende Klammer an der richtigen Stelle ein. **BC**
a) $2 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 1) = 26$ **b)** $2 \cdot (5 + 4 \cdot 3 + 1 = 36$ **c)** $2 \cdot (5 + 4 \cdot 3 + 1 = 55$

1.3 Rechne in der Zeile von links nach rechts. **B**
a) 33 – 10 – 11 – 2 **b)** 125 – 40 – 55 – 17 **c)** 1 020 – 650 – 290 – 99

1.4 Jede der folgenden Rechnungen kann durch Anwenden von Rechengesetzen vereinfacht werden. Schreibe die vereinfachten Rechnungen an und erkläre, welches Rechengesetz bzw. welche Rechenregel du verwendest. **BD**
1) 534 – 78 – 34 **2)** 45 – 12 – 8 **3)** 11 + 168 + 89 **4)** 325 – 93 + 30 – 7

1.5 Rechne möglichst geschickt. **B**
a) 3 728 + 4 003 – 3 **b)** 951 – 37 – 13 **c)** 1 279 – 315 – 279

1.6 Arbeite mit den Zahlen aus dem grünen Kästchen. **ABC**

45 38 110 99 10 19 87

1) Wie lautet die größte bzw. die kleinste Summe, die aus zwei Zahlen gebildet werden kann?
2) Welche beiden Zahlen haben die größte, welche die kleinste Differenz?
3) Wähle jene drei Zahlen aus, deren Summe möglichst knapp über 100 liegt.

1.7 Wie ändert sich die Summe von zwei Zahlen, wenn man **ABD**
a) die erste um vier vergrößert bzw. vermindert?
b) jede der beiden um fünf vergrößert?
c) einen Summanden um sieben vergrößert und den anderen um sechs vermindert?
d) einen Summanden um a vergrößert und den anderen um a verkleinert?

1.8 Wie ändert sich die Differenz zweier Zahlen, wenn man **ABD**
a) den Minuenden um 40 vergrößert bzw. vermindert?
b) den Subtrahenden um drei vergrößert bzw. vermindert?
c) den Minuenden um fünf vergrößert und den Subtrahenden um vier vergrößert?
d) den Minuenden um elf vergrößert und den Subtrahenden um zehn vermindert?

1.9 Welche der Behauptungen ist richtig, welche nicht? Begründe deine Antworten. **AD**
1) Die Summe von natürlichen Zahlen ist immer größer als jeder einzelne Summand.
2) Die Differenz von zwei natürlichen Zahlen ist kleiner als der Subtrahend.
3) Die Differenz von zwei natürlichen Zahlen ist nie kleiner als der Minuend.

1.10 Arbeite mit den Zahlen aus dem grünen Kästchen. **ABC**

2 9 3 12 18 24 4 6

1) Wie lautet das größte bzw. das kleinste Produkt, das aus zwei Zahlen gebildet werden kann?
2) Gib alle Multiplikationen mit zwei Faktoren an, deren Ergebnis zwischen 40 und 60 liegt.
3) Welche Multiplikationen mit zwei Faktoren haben das gleiche Ergebnis über 100?

1.11 Wie ändert sich das Produkt zweier Zahlen, wenn man **D**
a) einen Faktor verdoppelt bzw. wenn man beide Faktoren verdoppelt?
b) einen Faktor verdoppelt und den anderen halbiert?
c) einen Faktor verdoppelt und den anderen vervierfacht?

Weitere Aufgaben im Zusatzheft

1.1.2 Primzahlen und Teilbarkeit

ABD **1.12** Ein Säckchen enthält 18 kleine Schokoladestücke.

1) Auf wie viele Personen kann man die Schokoladestücke aufteilen, wenn alle gleich viele bekommen sollen und kein Stück übrig bleiben darf?

2) Jemand hat vor dem Aufteilen ein Stück genascht. Kann die Aufteilung nun noch gelingen?

Jede natürliche Zahl, die in einer anderen ohne Rest enthalten ist, heißt **Teiler** dieser Zahl.
Eine natürliche Zahl größer 1, die nur durch 1 und sich selbst teilbar ist, heißt **Primzahl**.
Die Menge der Primzahlen wird mit $\mathbb{P}$ bezeichnet: $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 \dots\}$

ZB: Man sagt „3 ist Teiler von 12“ oder „12 ist durch 3 teilbar“ und schreibt: $3 \mid 12$.

17 ist eine Primzahl, weil sie nur durch 1 und 17 teilbar ist.

1 ist weder eine Primzahl noch das Produkt aus Primzahlen; 1 hat eine „Sonderrolle“. Jede Zahl ist ein Vielfaches von 1, für alle Zahlen a gilt: $a \cdot 1 = a$
Man nennt a **unechtes Vielfaches** von a, alle anderen Vielfachen heißen **echte Vielfache**.

Umgekehrt ist a auch immer Teiler von a und wird **unechter Teiler** von a genannt. Alle anderen Teiler heißen **echte Teiler**.

Primzahlen übten auf Mathematikerinnen und Mathematiker seit jeher einen großen Reiz aus. Was mit der bloßen Faszination der Zahlen begann, erwies sich im 20. Jh. als unerwartet brauchbar. Die Kryptografie (griechisch: „kryptos“ = geheim, verborgen und „graphé“ = Schrift) ist die Wissenschaft vom Ver- und Entschlüsseln von Nachrichten. Um heikle Daten wie Konto- oder Kreditkartennummern im Internet sicher übertragen zu können, benötigt man eine Chiffrierung, die von Unbefugten möglichst nicht zu entschlüsseln ist. Ein häufig angewendetes Verfahren benützt das Produkt großer Primzahlen. Man kann mit einem Computer innerhalb von Sekunden zwei 500-stellige Primzahlen miteinander multiplizieren, die Primfaktorzerlegung dieses Produkts würde dagegen auch unter Einsatz von Computern einige Millionen Jahre dauern.

Die größte derzeit bekannte Primzahl ist eine Zahl mit 12 978 189 Stellen, das würde in einem Buch wie diesem rund 4 000 Seiten füllen.

Schon bei Euklid findet sich der im Folgenden gezeigte Beweis, dass es **unendlich viele Primzahlen** gibt:
Nennen wir die größte bisher bekannte Primzahl p. Nun multiplizieren wir alle bekannten Primzahlen miteinander, addieren 1 und bezeichnen das Ergebnis mit m:

$$m = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot p + 1$$

Dividieren wir nun diese neue Zahl m durch 2, dann bleibt 1 Rest. Auch bei Division durch 3, 5, 7 ... p bleibt jeweils 1 Rest. Somit ist m durch keine bekannte Primzahl teilbar. Nun gibt es zwei Möglichkeiten:

Wenn m eine Primzahl ist, haben wir bereits eine Primzahl gefunden, die noch größer ist als p.

Wenn m keine Primzahl ist, muss m durch eine Primzahl teilbar sein. Wie oben gezeigt wurde, kann das aber keine der bisher bekannten Primzahlen sein, es muss also eine größere sein. Auch in diesem Fall haben wir also eine Primzahl gefunden, die größer ist als p.

Da man den beschriebenen Vorgang immer weiter fortsetzen kann, muss es unendlich viele Primzahlen geben.

Alle echten Vielfachen von Primzahlen sind keine Primzahlen. Sie heißen **zusammengesetzte Zahlen** und sind als **Produkt von Primzahlen** darstellbar.

Auf diesem Zusammenhang beruht eine einfache, seit der Antike bekannte Methode zur Ermittlung von Primzahlen. Sie wurde nach dem griechischen Mathematiker Eratosthenes von Kyrene (ca. 273 – 194 v. Chr.) benannt, der die Bezeichnung „Sieb" für die im Folgenden gezeigte Schreibweise verwendete.

Und so funktioniert das **Sieb des Eratosthenes**:

1	(2)	(3)	~~4~~	(5)	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

- Die kleinste Primzahl ist 2. Alle ihre Vielfachen sind keine Primzahlen und werden gestrichen.
- Die nächstgrößere Zahl ist 3. Die Zahl wurde nicht gestrichen, weil sie nicht durch 2 teilbar ist. 3 ist also eine Primzahl und alle Vielfachen von 3 werden nun gestrichen.
- Die nächste Zahl 4 ist gestrichen, weil sie ein Vielfaches der Primzahl 2 und daher selbst keine Primzahl ist.
- 5 ist durch keine davor liegende Zahl teilbar, also eine Primzahl, die Vielfachen werden gestrichen usw.

1.13 Gib die Primfaktorzerlegung von 150 an.

B

Lösung:
Wir zerlegen schrittweise und beginnen dabei mit möglichst kleinen Primfaktoren:
$150 = 2 \cdot 75 = 2 \cdot 3 \cdot 25 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$

- Oft wird auch folgende Schreibweise verwendet:

150	2
75	3
25	5
5	5
1	

Einige Berechnungen lassen sich mithilfe der Primfaktorzerlegung leichter durchführen als mit den ursprünglichen Zahlen, wie das Ermitteln von kgV und ggT.
ZB: Berechne kgV(420, 450) und ggT(420, 450).

kgV ... **kleinstes gemeinsames Vielfaches**; kleinste Zahl, in der sowohl 420 als auch 450 als Teiler enthalten sind. Das kgV wird zum Beispiel zur Ermittlung des gemeinsamen Nenners beim Addieren und Subtrahieren von Brüchen verwendet.

ggT ... **größter gemeinsamer Teiler**; größte Zahl, die sowohl in 420 als auch in 450 ohne Rest enthalten ist. Der ggT wird zum Beispiel beim Kürzen von Brüchen verwendet.

Wir zerlegen die Zahlen in Primfaktoren.
$420 = 2 \cdot 210 = 2 \cdot 2 \cdot 105 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 35 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
$450 = 2 \cdot 225 = 2 \cdot 3 \cdot 75 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 25 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$

kgV(420, 450) =
$= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 =$
$= 6\,300$

Das kleinste gemeinsame Vielfache enthält alle vorkommenden Primfaktoren (mehrfach vorkommende Faktoren jeweils mit ihrer größten Anzahl).

ggT(420, 450) $= 2 \cdot 3 \cdot 5 =$
$= 30$

Der größte gemeinsame Teiler enthält alle Primfaktoren, die sowohl in der einen als auch in der anderen Zerlegung vorkommen.

Zahlen und Mengen

Teilbarkeitsregeln

Um zu überprüfen, ob eine Zahl durch eine andere teilbar ist, kann man die Division ausführen.

Für einige Zahlen gibt es jedoch einfache Regeln, die diese Überprüfung ohne Ausführen der Division ermöglichen.

2 Alle geraden Zahlen sind durch 2 teilbar, sie haben die **Endziffer 0, 2, 4, 6 oder 8**.

3 bzw. 9 Eine Zahl ist durch 3 bzw. 9 teilbar, wenn ihre **Ziffernsumme durch 3 bzw. 9 teilbar** ist.
ZB: 3 teilt 435, da 4 + 3 + 5 = 12 (durch 3 teilbar); 9 teilt 414, da 4 + 1 + 4 = 9

5 Alle Zahlen mit den **Endziffern 0 oder 5** sind durch 5 teilbar.

4 bzw. 25 Eine Zahl ist durch 4 bzw. 25 teilbar, wenn die **aus Einer- und Zehnerziffer gebildete Zahl** durch 4 bzw. durch 25 teilbar ist.
ZB: 4 teilt 23 916, da 16 durch 4 teilbar ist; 25 teilt 7 975, da 75 durch 25 teilbar ist.

8 bzw. 125 Eine Zahl ist durch 8 bzw. 125 teilbar, wenn die **aus Einer-, Zehner- und Hunderterziffer gebildete Zahl** durch 8 bzw. durch 125 teilbar ist.
ZB: 8 teilt 23 808, da 808 durch 8 teilbar ist; 125 teilt 7 375, da 375 durch 125 teilbar ist.

Beachte: Ist eine Zahl durch 2 und durch 3 teilbar, so ist sie auch durch 6 teilbar; ist eine Zahl durch 3 und durch 4 teilbar, so ist sie auch durch 12 teilbar. ABER: Eine Zahl, die durch 2 und durch 4 teilbar ist, muss nicht durch 8 teilbar sein, da 2 in 4 bereits als Teiler enthalten ist. Das „Kombinieren" der Teilbarkeitsregeln funktioniert also nur, wenn die jeweiligen Teiler keine gemeinsamen Faktoren enthalten.

B **1.14** Gib die Teiler von 36 an. Welche Multiplikationen mit zwei Faktoren, die jeweils Teiler von 36 sind, ergeben das Produkt 36? Schreibe alle Möglichkeiten auf.

B **1.15** Kreuze an.

... ist Teiler von ...	216	324	540	960	1 260	2 916	3 600	6 930
2								
3								
4								
5								
6								
8								
9								
12								
25								

B **1.16** Zerlege in ein Produkt von Primfaktoren.
a) 72 ***b)*** 315 ***c)*** 480 ***d)*** 486

B **1.17** Bestimme das kleinste gemeinsame Vielfache.
a) 30, 42 ***b)*** 55, 105 ***c)*** 60, 72 ***d)*** 42, 66

B **1.18** Bestimme den größten gemeinsamen Teiler.
a) 84, 126 ***b)*** 135, 315 ***c)*** 176, 330 ***d)*** 252, 392

B **1.19** Bestimme ***1)*** kgV und ***2)*** ggT.
a) 180, 840, 1 008 ***b)*** 1 350, 2 250, 3 375

1.20 Ist eine Zahl gleich der Summe ihrer echten Teiler, so nennt man sie eine vollkommene Zahl, zB: $6 = 1 + 2 + 3$. Überprüfe, ob die angegebene Zahl eine vollkommene Zahl ist. **B**

a) 24 ***b)*** 28 ***c)*** 492 ***d)*** 496

1.21 Zwei Zahlen heißen befreundete Zahlen, wenn die Summe der echten Teiler der ersten Zahl die zweite ergibt und umgekehrt. Zeige, dass dies für 220 und 284 zutrifft. **AB**

1.22 Eine Teilbarkeitsregel für 7 lautet: Streiche die Einerziffer der Zahl und subtrahiere von der so entstandenen Zahl das Doppelte der gestrichenen Einerziffer. Ist das Ergebnis durch 7 teilbar, so ist auch die ursprüngliche Zahl durch 7 teilbar. **B**

ZB: $7 \mid 8\,764$?

$876 - 2 \cdot 4 = 868$; $86 - 2 \cdot 8 = 70$. Es gilt: $7 \mid 70 \Rightarrow 7 \mid 8\,764$

1) Prüfe wie im Beispiel gezeigt nach, ob 16 415 bzw. 10 187 durch 7 teilbar ist.

2) Eine ähnliche Teilbarkeitsregel gibt es für 13. Die Einerziffer muss hier jedoch mit 9 multipliziert werden. Prüfe nach, ob 3 328 bzw. 11 687 durch 13 teilbar ist.

1.23 Suche im Internet nach Teilbarkeitsregeln für 11 und 19 und teste sie an je zwei selbst gewählten Beispielen. **BC**

1.24 Das Preisgeld für den noch fehlenden Beweis der 1742 vom deutschen Mathematiker Christian Goldbach aufgestellten Vermutung beträgt eine Million Dollar: „Jede gerade Zahl größer 2 lässt sich als Summe von zwei Primzahlen darstellen.“ Prüfe die Vermutung für 84, 312 und 586 nach. **BC**

1.25 Ermittle alle Primzahlen bis 400 mithilfe des Siebs des Eratosthenes. Bis zu welcher Zahl muss man den Vorgang „Vielfache streichen“ durchführen, um alle Primzahlen im gesuchten Bereich erkennen zu können? Begründe deine Antwort. **BD**

1.26 Zur Ermittlung des größten gemeinsamen Teilers von zwei Zahlen kann man auch den im Folgenden gezeigten Euklid'schen Algorithmus verwenden. Setze die Erklärung des Verfahrens fort und berechne mit dieser Methode den gesuchten ggT. **BC**

ggT(99, 78)

99 : **78** = 1; Rest **21** — • Dividiere die größere Zahl durch die kleinere.
78 : **21** = 3; Rest **15** — • ...
21 : **15** = 1, Rest **6**
15 : **6** = 2, Rest **3**
6 : **3** = 2, **Rest 0**
ggT(99, 78) = **3**

a) ggT(15, 9) ***b)*** ggT(28, 26) ***c)*** ggT(187, 136) ***d)*** ggT(357, 231).

1.27 Am Busbahnhof fährt die Linie 45 alle 12 Minuten ab, die Linie 43 alle 15 Minuten und die Linie 27B alle 20 Minuten. Der erste Bus verlässt die Station jeweils um 6:30 Uhr. Nach wie vielen Minuten fährt wieder gleichzeitig von jeder der Linien ein Bus ab? **AB**

1.28 Für die Badezimmer eines Hotels werden Marmorfliesen eigens zugeschnitten. Es sollen Wände mit 252 cm Breite und solche mit 396 cm Breite verfliest werden. Welche Breite sollten die Fliesen haben, wenn man die Verfugung vernachlässigt und mit möglichst großen Fliesen arbeiten möchte, ohne zuschneiden zu müssen? **AB**

1.29 Sind „kleinster gemeinsamer Teiler“ und „größtes gemeinames Vielfaches“ sinnvolle Begriffe? Begründe deine Antwort. **AD**

1.30 Bereits Euklid war bekannt: „Ein Produkt ist nur dann durch eine Primzahl teilbar, wenn mindestens ein Faktor durch diese Primzahl teilbar ist.“ Prüfe den Zusammenhang an selbst gewählten Beispielen nach und begründe ihn mit eigenen Worten. **BCD**

Weitere Aufgaben im Zusatzheft

1.2 Die ganzen Zahlen

1.2.1 Rechnen mit ganzen Zahlen

Zur Angabe von Schulden, Temperaturen, Meereshöhen unter dem Meeresspiegel usw. benötigt man negative Zahlen.

AB **1.31** Um 11:00 Uhr zeigt das Thermometer +2 °C. Drei Stunden vorher war es noch um 5 °C kälter. Wie viel Grad Celsius hatte es um 8:00 Uhr?

Die Menge der ganzen Zahlen wird mit $\mathbb{Z}$ bezeichnet. $\mathbb{Z} = \{... -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3 ...\}$
Darstellung auf der Zahlengeraden:

–5 –4 –3 –2 –1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6
negative ganze Zahlen Null positive ganze Zahlen

Null ist weder positiv noch negativ.
Beim Schreiben von positiven ganzen Zahlen wird üblicherweise das „+" weggelassen.
Man nennt (–n) die **Gegenzahl** von n. ZB: (–3) ist die Gegenzahl von (+3) und umgekehrt.
In der Menge $\mathbb{Z}$ kann man uneingeschränkt addieren, subtrahieren und multiplizieren.

Das Addieren einer negativen ganzen Zahl entspricht dem Subtrahieren der Gegenzahl.
$\mathbf{a + (-b) = a - (+b) = a - b}$
ZB: $7 + (-3) = 7 - (+3) = 7 - 3$

Das Subtrahieren einer negativen ganzen Zahl entspricht dem Addieren der Gegenzahl.
$\mathbf{a - (-b) = a + (+b) = a + b}$
ZB: $7 - (-3) = 7 + (+3) = 7 + 3$

Beachte den Unterschied: Das Rechenzeichen „–" stellt den „Arbeitsauftrag" Subtrahieren dar. Diese Rechenoperation „arbeitet" mit zwei Zahlen, dem Minuenden und dem Subtrahenden.
Das Vorzeichen „–" informiert darüber, dass es sich um eine negative Zahl handelt. Es bezieht sich nur auf eine Zahl und gibt deren Lage auf der Zahlengeraden (links oder rechts von Null) an.
Am Taschenrechner wird meist durch eigene Tasten zwischen Vorzeichen und Rechenzeichen unterschieden (siehe Aufgabe 1.43).

$11 - (-3)$
Rechenzeichen **Vorzeichen**

Die für natürliche Zahlen angegebenen Rechenregeln gelten weiterhin. Meist werden das Vorzeichen „+" und nicht notwendige Klammern weggelassen.
ZB: $(+3) \cdot (-4) = 3 \cdot (-4)$; $(-3) \cdot (+4) = -3 \cdot 4$

Beim Multiplizieren ganzer Zahlen sind die Vorzeichenregeln zu beachten.
$\mathbf{(+a) \cdot (+b) = +a \cdot b}$ $\mathbf{(-a) \cdot (+b) = -a \cdot b}$
$\mathbf{(+a) \cdot (-b) = -a \cdot b}$ $\mathbf{(-a) \cdot (-b) = +a \cdot b}$

Für die Division gelten sinngemäß die gleichen Regeln (mit $b \neq 0$).
$\mathbf{(+a) : (+b) = +a : b}$ $\mathbf{(-a) : (+b) = -a : b}$
$\mathbf{(+a) : (-b) = -a : b}$ $\mathbf{(-a) : (-b) = +a : b}$

ZB: $3 \cdot 4 = 12$ $-3 \cdot 4 = -12$ $35 : 5 = 7$ $-35 : 5 = -7$
$3 \cdot (-4) = -12$ $-3 \cdot (-4) = 12$ $35 : (-5) = -7$ $-35 : (-5) = 7$

B **1.32** Wende das Kommutativgesetz an und berechne das Ergebnis.
1) 2 + 5 **2)** –2 + 5 **3)** 2 – 5 **4)** –2 – 5

Lösung:
1) 2 + 5 = 5 + 2 = 7
2) –2 + 5 = 5 – 2 = 3
3) 2 – 5 = –5 + 2 = –3
4) –2 – 5 = –5 – 2 = –7

1.33 Gib ohne zu rechnen an, ob die Ergebnisse von ***1)*** und ***2)*** gleich sind, Gegenzahlen sind oder keines von beiden. C

a) 1) −1 251 + 3 897 ***2)*** −3 897 + 1 251
b) 1) 456 − 235 ***2)*** −235 + 456
c) 1) −6 701 + 3 009 ***2)*** 3 009 − 6 701

Aufgaben 1.34 – 1.35: Berechne die Ergebnisse. Ändere anschließend in der Angabe Vorzeichen bzw. Rechenzeichen so ab, dass die Ergebnisse nun jeweils die Gegenzahlen der ursprünglichen Ergebnisse sind.

1.34 ***a)*** −13 + 24 ***b)*** 36 − 48 ***c)*** −12 − 27 BC

1.35 ***a)*** −101 + 900 ***b)*** −9 999 + 10 000 ***c)*** −100 000 + 99 998 BC

1.36 Rechne im Kopf. B

a) 11 − 18 + 3 ***b)*** −7 − 9 + 16 ***c)*** 20 − 30 − 5 ***d)*** 159 − 38 − 18 ***e)*** −57 − 41 − 79 ***f)*** 145 + 78 − 38

1.37 Welche Zahl liegt genau in der Mitte zwischen den angegebenen? AB

a) −2 und 4 ***b)*** −11 und −3 ***c)*** −98 und −104

1.38 Füge zwischen den angegebenen Zahlen zwei weitere so ein, dass die Differenzen zwischen jeweils zwei aufeinanderfolgenden Zahlen gleich groß sind. AB

a) −8; 4 ***b)*** −129; −15 ***c)*** −99; −255

Aufgaben 1.39 – 1.40: Berechne jeweils das Ergebnis.

1.39 ***a)*** 4 · (−8) ***b)*** −5 · 12 ***c)*** −3 · (−11) ***d)*** −24 : (−4) ***e)*** 56 : (−8) ***f)*** −63 : 9 B

1.40 ***a)*** −35 : (−7) − 11 · (−2) ***b)*** 16 − 15 · (−2) + (−21) : (−3) ***c)*** −2 · (−3) − (−12) : (−2) ***d)*** 2 · (−5) − (−8 · (−3) − 12 : (−6)) B

1.41 Überlege zuerst und schreibe anschließend die Probe als Rechnung an. AB

a) Welche Zahl muss man zu (−11) addieren, um (−15) zu erhalten?
b) Welche Zahl muss man von (−20) subtrahieren, um (−25) zu erhalten?
c) Welche Zahl muss man von (−30) subtrahieren, um (−40) zu erhalten?

1.42 Ist die Aussage jeweils richtig oder falsch? Begründe deine Antworten und gib je zwei Beispiele oder Gegenbeispiele an. ABD

1) Ist der Subtrahend größer als der Minuend, ist das Ergebnis negativ.
2) Sind Minuend und Subtrahend negative Zahlen, so ist die Differenz positiv.
3) Ist der Minuend eine positive Zahl und der Subtrahend eine negative Zahl, so ist die Differenz positiv.

1.43 Gib die folgenden Rechnungen in deinen Taschenrechner ein. Achte dabei auf die unterschiedliche Eingabe des negativen Vorzeichens und des Rechenzeichens Minus und kontrolliere das Ergebnis im Kopf. B TE

1) 30 − 45 ***2)*** −30 − 45 ***3)*** −30 − (−45)

Rechenzeichen

negatives Vorzeichen

Weitere Aufgaben im Zusatzheft

1.2.2 Betrag (Absolutbetrag) einer ganzen Zahl

A **1.44** Auf einer Ferieninsel werden U-Bootfahrten zu einem Riff angeboten. Das U-Boot sinkt dabei von der Meeresoberfläche auf eine Meereshöhe von –35 m. Wie viel Meter ist es getaucht?

Unter dem Betrag einer ganzen Zahl z versteht man deren Abstand vom Nullpunkt.
Man schreibt $|z|$. [Sprich: „Betrag von z"], $|\ |$ ... Betragsstriche

ZB: $z = +3$ ... 3 Einheiten von 0 entfernt, $|+3| = 3$
$z = -3$ ... 3 Einheiten von 0 entfernt, $|-3| = 3$

–4 –3 –2 –1 0 +1 +2 +3 +4
3 Einheiten 3 Einheiten

Das Vorzeichen gibt an, in welcher Richtung eine Zahl (von Null aus gesehen) auf der Zahlengeraden liegt. Du kannst den Betrag einer Zahl bilden, indem du das Vorzeichen weglässt. Ist die Zahl z positiv, so ist ihr Betrag die Zahl z, ist sie negativ, ist ihr Betrag die (positive) Gegenzahl –z.

Betrag (Absolutbetrag) einer Zahl z: $|z| = \begin{cases} z, \text{ wenn } z \geq 0 \\ -z, \text{ wenn } z < 0 \end{cases}$

ZB: Alle ganzen Zahlen, deren Betrag kleiner als vier ist, können als Menge angegeben und auf der Zahlengeraden dargestellt werden.

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 4\}$ ... Angabe der Menge im beschreibenden Verfahren
Abkürzungen: $|$ ... „für die gilt"
$\in$ ... „ist Element von", $\notin$ ... „ist kein Element von"

$A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ... Angabe der Menge im aufzählenden Verfahren

–5 –4 –3 –2 –1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6

B **1.45** Berechne. **a)** $|-2| - |2|$ **b)** $|5 - 7|$ **c)** $4 - |-6|$

Lösung:
a) $|-2| - |2| = 2 - 2 = 0$ **b)** $|5 - 7| = |-2| = 2$ **c)** $4 - |-6| = 4 - 6 = -2$

B **1.46** Gib $|x|$, $|y|$, $|x| + |y|$, $|x + y|$, $|x - y|$ und $|x| - |y|$ an.
a) $x = 5, y = -7$ **b)** $x = -11, y = 9$ **c)** $x = -14, y = -8$

B **1.47** Berechne.
a) $|-2 - 7|$ **b)** $|-2| - 7$ **c)** $-2 - |-7|$ **d)** $|-2| - |-7|$

B **1.48** Berechne.
a) $|-3| \cdot 2 - |3 \cdot 4 - 11| - (-2) \cdot (-3)$
b) $|-3 + 5| - 3 \cdot |-7 - 11| - |-5|$
c) $(-8) \cdot (16 - |2 \cdot 5 - 3 \cdot 4| - 10) + |7 - 9|$
d) $12 - |4 - 12| - |-4| \cdot |-12| - 12 \cdot |-4|$

B **1.49** Kennzeichne die angegebenen Zahlen auf der Zahlengeraden und gib die Menge im aufzählenden Verfahren an.
a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 3\}$ **b)** $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| > 4\}$ **c)** $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \geq 5\}$

CD **1.50** Für welche Zahlen ist die Behauptung richtig? Begründe deine Antwort.
1) $|a| > a$ **2)** $|a| < a$ **3)** $|a| + |b| = |a + b|$

CD **1.51** Ist die folgende Behauptung richtig oder falsch? Begründe deine Antwort.
Wenn a und b negative Zahlen sind, gilt: $a < b \Rightarrow |a| > |b|$.

1.3 Rationale Zahlen

1.3.1 Rechnen mit Brüchen

1.52 Einige Schülerinnen und Schüler der 1AHET bestellen in der Mittagspause gemeinsam Pizza. Wie viel bekommt bei gleichmäßiger Aufteilung jede(r)? **AB**

a) 1 Pizza für 4 Personen ***b)*** 3 Pizzen für 8 Personen

Um Teile von ganzen Einheiten anzugeben, benötigt man rationale Zahlen. Im Alltag werden rationale Zahlen in Bruchdarstellung meist kurz Brüche genannt.

Alle positiven und negativen Zahlen der Form $\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$) bilden die **rationalen Zahlen**. Die Menge der rationalen Zahlen wird mit $\mathbb{Q}$ abgekürzt.

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$$

Auch alle ganzen Zahlen sind rationale Zahlen, zB: $2 = \frac{2}{1}$

Rational kommt vom lateinischen Wort „ratio“, das Verhältnis bedeutet; auch im Englischen heißt Verhältnis ratio. Das $\mathbb{Q}$ als Abkürzung kommt vom Wort Quotient.

Bezeichnungen und Begriffe

- Bezeichnungen: Bruch $\frac{a}{b}$ — a: Zähler; Bruchstrich; b: Nenner
- Man unterscheidet Brüche nach ihrem Wert:

  Echte Brüche: Wert < 1, zB: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{11}$

  Unechte Brüche: Wert $\geqslant 1$, zB: $\frac{7}{2}, \frac{5}{3}, \frac{11}{4}, \frac{18}{18}$
- Brüche mit Zähler 1 heißen **Stammbrüche**: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ...
- Brüche mit Nenner 10, 100, 1 000 ... (dekadische Einheiten) heißen **Dezimalbrüche**. Sie können als Dezimalzahlen mit endlich vielen Dezimalstellen angeschrieben werden.

  ZB: $\frac{7}{10} = 0{,}7$; $\frac{11}{100} = 0{,}11$; $\frac{3}{1\,000} = 0{,}003$

Kürzen und Erweitern von Brüchen

Jede rationale Zahl kann durch (unendlich viele) verschiedene Brüche dargestellt werden,

zB: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \ldots \frac{80}{160} = \ldots$

Der Wert eines Bruchs ändert sich nicht, wenn man

- Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl ($\neq 0$) multipliziert, das heißt erweitert.
- Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl ($\neq 0$) dividiert, das heißt kürzt.

1.53 Erweitere den Bruch auf den angegebenen Nenner. **B**

a) $\frac{3}{4} = \frac{?}{12}$ ***b)*** $\frac{7}{25} = \frac{?}{100}$

Lösung:

a) $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$
- Der Nenner wurde mit 3 multipliziert, also muss auch der Zähler mit 3 multipliziert werden.

b) $\frac{7}{25} = \frac{28}{100}$
- Der Nenner wurde mit 4 multipliziert, also muss auch der Zähler mit 4 multipliziert werden.

B **1.54** Erweitere die Brüche $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{5}{8}$ auf einen (möglichst kleinen) gemeinsamen Nenner.

Lösung:

$\frac{3}{4} = \frac{18}{24}, \quad \frac{5}{6} = \frac{20}{24}, \quad \frac{5}{8} = \frac{15}{24}$

- Der kleinste gemeinsame Nenner ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Einzelnenner: kgV(4, 6, 8) = 24

B **1.55** Kürze die Brüche $\frac{12}{18}, \frac{75}{90}$ soweit wie möglich.

Lösung:

$\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ (Zähler :6, Nenner :6)

- Dividiere Zähler und Nenner durch ihren größten gemeinsamen Teiler.

$\frac{75}{90} = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$

- Es darf auch schrittweise gekürzt werden.

Addieren und Subtrahieren von Brüchen

Brüche mit gleichem Nenner (gleichnamige Brüche) werden addiert bzw. subtrahiert, indem man die Zähler der Brüche addiert bzw. subtrahiert. Der Nenner bleibt dabei unverändert. Brüche, die verschiedene Nenner haben (ungleichnamige Brüche), müssen vor dem Addieren bzw. Subtrahieren gleichnamig gemacht werden.

Als gemeinsamen Nenner verwendet man im Allgemeinen den kleinsten gemeinsamen Nenner, das ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Einzelnenner.

B **1.56** Berechne das Ergebnis.

a) $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} - \frac{1}{7}$ **b)** $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}$

Lösung:

a) $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} - \frac{1}{7} = \frac{2+3-1}{7} = \frac{4}{7}$

b) $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{8}{12} + \frac{6}{12} - \frac{9}{12} = \frac{8+6-9}{12} = \frac{5}{12}$

Multiplizieren und Dividieren von Brüchen

Brüche werden multipliziert, indem man die Zähler miteinander multipliziert und die Nenner miteinander multipliziert.

$$\frac{\text{Zähler 1}}{\text{Nenner 1}} \cdot \frac{\text{Zähler 2}}{\text{Nenner 2}} = \frac{\text{Zähler 1} \cdot \text{Zähler 2}}{\text{Nenner 1} \cdot \text{Nenner 2}}$$

Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit dem Kehrwert des Bruchs multipliziert. Der Kehrwert eines Bruchs wird durch Vertauschen von Zähler und Nenner gebildet.

$$\frac{\text{Zähler 1}}{\text{Nenner 1}} : \frac{\text{Zähler 2}}{\text{Nenner 2}} = \frac{\text{Zähler 1}}{\text{Nenner 1}} \cdot \frac{\text{Nenner 2}}{\text{Zähler 2}} = \frac{\text{Zähler 1} \cdot \text{Nenner 2}}{\text{Nenner 1} \cdot \text{Zähler 2}}$$

B **1.57** Berechne das Ergebnis. Kürze dabei so früh wie möglich.

a) $\frac{5}{12} \cdot \frac{8}{15}$ **b)** $\frac{9}{16} : \frac{3}{20}$

Lösung:

a) $\frac{5}{12} \cdot \frac{8}{15} = \frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot \overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{3}{\cancel{12}} \cdot \underset{3}{\cancel{15}}} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{2}{9}$

b) $\frac{9}{16} : \frac{3}{20} = \frac{\overset{3}{\cancel{9}} \cdot \overset{5}{\cancel{20}}}{\underset{4}{\cancel{16}} \cdot \underset{1}{\cancel{3}}} = \frac{15}{4} \left(= 3\frac{3}{4}\right)$

Unechte Brüche können auch als gemischte Zahlen angeschrieben werden.
ZB: $3\frac{3}{4}$ bedeutet $3 + \frac{3}{4}$, obwohl sonst nur das Multiplikationszeichen weggelassen werden darf. Diese Schreibweise sollte daher vermieden werden.

Doppelbrüche

Steht im Zähler und/oder im Nenner eines Bruchs wieder ein Bruch, so spricht man von einem Doppelbruch. Man kann dann den Hauptbruchstrich durch ein Divisionszeichen ersetzen.

$$\frac{\frac{\text{Zähler 1}}{\text{Nenner 1}}}{\frac{\text{Zähler 2}}{\text{Nenner 2}}} = \frac{\text{Zähler 1}}{\text{Nenner 1}} : \frac{\text{Zähler 2}}{\text{Nenner 2}} = \frac{\text{Zähler 1}}{\text{Nenner 1}} \cdot \frac{\text{Nenner 2}}{\text{Zähler 2}}$$

Merkhilfe: „$\frac{\text{außen mal außen}}{\text{innen mal innen}}$“, zB: $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}} = \frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{5} = \frac{21}{20}$

In einem Doppelbruch kann auch schon vor dem Auflösen gekürzt werden. Vergleiche den gegebenen Doppelbruch mit dem „aufgelösten“ Bruch:

$\frac{\frac{12}{25}}{\frac{8}{5}} = \frac{12 \cdot 5}{25 \cdot 8}$ Die Zahlen, die gekürzt werden dürfen, stehen im ursprünglichen Doppelbruch entweder in der 1. und 3. Zeile (hier **12**, **8**) oder in der 2. und 4. Zeile (hier **5**, **25**).

1.58 Berechne das Ergebnis und kürze dabei so früh wie möglich: $\frac{\frac{39}{16}}{\frac{26}{96}}$ **B**

Lösung:

$$\frac{\frac{39}{16}}{\frac{26}{96}} = \frac{\frac{\cancel{39}^{3}}{{}_{1}\cancel{16}}}{\frac{\cancel{26}^{2}}{{}_{6}\cancel{96}}} = \frac{\frac{3}{1}}{\frac{\cancel{2}^{1}}{{}_{3}\cancel{6}}} = \frac{3 \cdot 3}{1 \cdot 1} = 9 \quad \text{oder}$$

$$\frac{\frac{39}{16}}{\frac{26}{96}} = \frac{\frac{39}{16}}{\frac{\cancel{26}^{13}}{{}_{48}\cancel{96}}} = \frac{\frac{\cancel{39}^{3}}{{}_{1}\cancel{16}}}{\frac{\cancel{13}^{1}}{{}_{3}\cancel{48}}} = \frac{3 \cdot 3}{1 \cdot 1} = 9$$

- Auch innerhalb jedes Teilbruchs darf gekürzt werden. Die Reihenfolge der Abarbeitung ist dabei beliebig.

1.59 Berechne den angegebenen Bruchteil. **B**

a) $\frac{3}{4}$ von 16 **b)** $\frac{2}{3}$ von 1,5 **c)** $\frac{3}{8}$ von 200 **d)** $\frac{3}{10}$ von 6

1.60 Welcher Bruchteil ist das? Gib das Ergebnis als gekürzten Bruch an. **B**

a) 5 von 20 **b)** 30 von 480 **c)** 0,1 von 0,3 **d)** 10 von 15

1.61 Kürze so weit wie möglich. **B**

a) $\frac{24}{32}$ **b)** $\frac{75}{125}$ **c)** $\frac{84}{96}$ **d)** $\frac{36}{100}$ **e)** $\frac{108}{144}$ **f)** $\frac{175}{200}$ **g)** $\frac{96}{104}$

1.62 Erweitere auf den angegebenen Nenner. **B**

a) $\frac{3}{5} = \frac{?}{35}$ **b)** $\frac{3}{8} = \frac{?}{144}$ **c)** $\frac{2}{5} = \frac{?}{75}$ **d)** $\frac{2}{3} = \frac{?}{72}$ **e)** $\frac{5}{12} = \frac{?}{288}$

1.63 Erweitere so, dass der Nenner eine möglichst kleine dekadische Einheit ist. Schreibe den Dezimalbruch anschließend als Dezimalzahl an. **B**

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{2}{5}$ **d)** $\frac{3}{8}$ **e)** $\frac{7}{16}$ **f)** $\frac{11}{25}$ **g)** $\frac{9}{50}$ **h)** $\frac{27}{125}$

1.64 Welche Zahl passt nicht dazu? Begründe deine Antwort. **BD**

a) $\frac{2}{10}$ 0,2 $\frac{20}{100}$ $\frac{\frac{1}{20}}{4}$ $\frac{10}{200}$ $\frac{1}{5}$

b) $\frac{1}{\frac{2}{3}}$ $\frac{75}{50}$ $1\frac{1}{2}$ 1,5 $\frac{2}{3}$ $\frac{15}{10}$

Zahlen und Mengen

Aufgaben 1.65 – 1.68: Berechne und gib jeweils das Ergebnis als gekürzten Bruch an.

B **1.65** **a)** $\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{3}+\frac{4}{7}-\frac{1}{15}\right):\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{8}\right)$ **b)** $500+\frac{18}{13}:\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{39}-\frac{3}{8}\right)$ **c)** $\frac{1}{3}\cdot\left[\left(\frac{5}{7}-\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{8}{19}+\frac{3}{4}\right]:\frac{5}{14}-\frac{1}{5}$

B **1.66** **a)** $\left[\frac{3}{80}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{12}-\frac{3}{8}\right)+\frac{2}{5}\right]:\frac{5}{21}$ **b)** $\frac{2}{11}-\left[\frac{15}{49}:\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{8}+\frac{59}{280}\right)-\frac{1}{14}\right]$

B **1.67** **a)** $\frac{1}{15}-\frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{40}\right]+\frac{1}{45}\right\}$ **b)** $\frac{1}{15}+\left\{\frac{1}{3}:\left[\frac{1}{4}:\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)-\frac{2}{11}\right]+\frac{1}{5}\right\}:\frac{1}{2}$

B **1.68** **a)** $\left[\left(\frac{4}{5}+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{3}{11}+\frac{1}{5}\right]:\left[\frac{3}{7}\cdot\frac{21}{25}-\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)\cdot\frac{24}{25}\right]$ **b)** $\left[\left(\frac{1}{7}-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{3}{11}+\frac{1}{8}\right]:\left[\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{5}{3}\right]$

Aufgaben 1.69 – 1.70: Setze voraus, dass Zähler und Nenner positive Zahlen sind.

BCD **1.69** Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? Begründe deine Antworten und gib je zwei Beispiele bzw. Gegenbeispiele an.

1) Wird der Zähler eines Bruchs vergrößert, so vergrößert sich sein Wert.

2) Wird der Nenner eines Bruchs vergrößert, so vergrößert sich sein Wert.

3) Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem man Zähler und Nenner mit dieser Zahl multipliziert.

4) Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man den Nenner mit dieser Zahl multipliziert.

BCD **1.70** Ändere den Bruch $\frac{7}{11}$ zuerst, indem du den Zähler um 1 verminderst und danach, indem du den Nenner um 1 vergrößerst. Welcher der entstehenden Brüche ist größer? Versuche nun, Beispiele zu finden, bei denen die Frage anders als in diesem Beispiel zu beantworten ist. Kann es sein, dass die entstehenden Brüche den gleichen Wert haben? Begründe.

B **1.71** Berechne das Ergebnis. Achte vor dem Anschreiben als Division darauf, welcher Bruchstrich der Hauptbruchstrich ist.

a) $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}}$ **b)** $\dfrac{\frac{5}{8}}{4}$ **c)** $\dfrac{3}{\frac{3}{2}}$ **d)** $\dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{3}}$ **e)** $\dfrac{1}{\frac{4}{7}}$ **f)** $\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}}$

Aufgaben 1.72 – 1.73: Berechne die Ergebnisse.

B **1.72** **a)** $\dfrac{\frac{2}{3}+1}{\frac{5}{7}}$ **b)** $\dfrac{\frac{3}{4}}{1+\frac{1}{2}}$ **c)** $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{\frac{1}{5}}$ **d)** $\dfrac{2-\frac{1}{4}}{1+\frac{3}{4}}$

B **1.73** **a)** $\dfrac{\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2}+1}{2-\frac{7}{8}}$ **b)** $\dfrac{1\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}$ **c)** $\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{7}-1\frac{1}{7}}$ **d)** $\dfrac{\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}-1}{\frac{1}{3}-\frac{5}{8}}$

BC **1.74** Schreibe die Rechnungen in der Anzeige des Taschenrechners als Brüche an. Berechne anschließend mit dem Taschenrechner das Ergebnis und kontrolliere es durch Vereinfachen der von dir angeschriebenen Brüche.

a) `2/3+5` `2/(3+5)` `(2+3)/5` `2+3/5`

b) `4/(5+2/3)` `4/5+2/3` `4+5/(2+3)` `4+5/2+3`

B **1.75** Ermittle das Ergebnis mithilfe des Taschenrechners und gib es als Dezimalzahl und in Bruchform an.

a) $\dfrac{3}{4+\frac{1}{2}}$ **b)** $\dfrac{\frac{2}{3}+1}{5}$ **c)** $\dfrac{4-\frac{5}{7}}{\frac{1}{2}}$ **d)** $\dfrac{\frac{4}{7}-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{5}}$

Weitere Aufgaben im Zusatzheft

1.3.2 Verhältnisse

1.76 Sophie und Maximilian bekommen von ihren Eltern einmal in der Woche Taschengeld. Im Vorjahr erhielt Sophie, die Ältere, 8,00 € und Maximilian 4,00 €. Heuer erhält Sophie 10,00 €. Wie viel Taschengeld wäre für Maximilian nun gerechter: 5,00 € oder 6,00 €? **BD**

Vergleicht man zwei Zahlen (oder Größen) miteinander, so kann dies auf zwei Arten geschehen. Durch die Subtraktion wird die Differenz berechnet, durch die Division das Verhältnis ermittelt. Zum Beispiel ist der Gangkhar Puensum, der zur Zeit höchste noch unbestiegene Berg der Welt, um 3 772 m höher als der Großglockner und damit ungefähr zweimal so hoch wie der höchste Berg Österreichs.

Verhältnisse sind oft aussagekräftiger als Differenzen: Ein Elefant kann 500 kg tragen, das ist rund ein Zehntel seiner Körpermasse. Der ca. 25 g schwere Nashornkäfer kann zwar höchstens 20 kg heben, allerdings kann er damit das 800fache seiner Körpermasse tragen.

Unter dem **Verhältnis** zweier Zahlen (bzw. Größen) a und b versteht man den Quotienten $\frac{a}{b}$ und schreibt oft a : b [sprich: „a zu b"].

Im Allgemeinen werden Verhältnisse so umgeformt, dass entweder a oder b gleich 1 ist, oder das Verhältnis wird mit möglichst kleinen ganzen Zahlen angegeben.

1.77 Stelle das Verhältnis 24 : 36 als Verhältnis möglichst kleiner natürlicher Zahlen dar. **B**

Lösung:
24 : 36 = 2 : 3 ● Division durch 12 = ggT(24, 36)

1.78 Bring das Verhältnis 10 : 125 in die Form a : 1. **B**

Lösung:
10 : 125 = 0,08 : 1 ● Division durch 125

1.79 Prüfe, ob folgende Aussage richtig ist und begründe deine Antwort. **BD**
a) 150 : 30 = 25 : 5 ***b)*** 35 : 20 = 5 : 3 ***c)*** 100 : 20 = 4 : 1 ***d)*** 81 : 18 = 9 : 2

1.80 Bring das gegebene Verhältnis in die Form ***1)*** a : 1, ***2)*** 1 : b. **B**
a) 32 : 8 ***b)*** 52 : 13 ***c)*** 56 : 14 ***d)*** 18 : 96

Aufgaben 1.81 – 1.82: Stelle jeweils als Verhältnis möglichst kleiner ganzer Zahlen dar.

1.81 ***a)*** 68 : 85 ***b)*** 567 : 837 ***c)*** 648 : 504 ***d)*** 645 : 860 **B**

1.82 ***a)*** 1,25 : 2,5 ***b)*** 0,48 : 1,68 ***c)*** 51,84 : 691,2 ***d)*** 0,2 : 3,6 **B**

1.83 Welches Größenverhältnis besteht zwischen einem Neugeborenen und einem Erwachsenen, wenn die Durchschnittsgröße eines Neugeborenen mit 50 cm und die Durchschnittsgröße eines Erwachsenen mit 1,75 m angenommen werden kann? **AB**

1.84 In einer Gruppe von 100 Männern sind erfahrungsgemäß 8 farbenfehlsichtig. Wie viele normal sehende Männer kommen auf einen farbenfehlsichtigen Mann? **AB**

1.85 Beantworte die Frage und begründe deine Antwort. **D**
1) Wie muss sich a ändern, wenn das Verhälnis a : b gleich bleiben soll, während b verdoppelt wird?
2) Wie ändert sich das Verhältnis a : b, wenn a halbiert und b vervierfacht wird?

1.3.3 Rationale Zahlen in Dezimaldarstellung

Rationale Zahlen können nicht nur in Bruchdarstellung sondern auch in Dezimaldarstellung angeschrieben werden. Man gelangt von der Bruch- zur Dezimaldarstellung, indem man die durch den Bruchstrich angegebene Teilung als Division anschreibt.

BD **1.86** Schreibe anstelle des Bruchs die Division auf und berechne. ***1)*** $\frac{3}{4}$ ***2)*** $\frac{1}{3}$
Beschreibe den unterschiedlichen Verlauf der beiden Divisionen mit eigenen Worten.

Wenn die Division nach einer endlichen Anzahl von Dezimalstellen abbricht, erhalten wir eine endliche Dezimaldarstellung. Andernfalls führt die Division auf eine periodische Dezimaldarstellung (Vergleiche Aufgabe 1.86). Auch rationale Zahlen kann man auf der Zahlengeraden darstellen:

$-\frac{3}{2}$ 2,7
–5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4
negative rationale Zahlen Null positive rationale Zahlen

Zwischen zwei rationalen Zahlen kann man immer beliebig viele weitere rationale Zahlen finden. ZB: zwischen 1,1 und 1,2 liegen 1,11; 1,12 … zwischen 1,11 und 1,12 liegen 1,111; 1,112 …

BCD **1.87** Führe die durch den Bruchstrich gegebene Division aus. ***1)*** $\frac{1}{7}$ ***2)*** $\frac{3}{11}$
Überlege anhand der beiden Beispiele. Zwischen welchen Werten kann der Rest bei der Division jeweils liegen? Nach höchstens wie vielen Divisionsschritten muss sich ein Rest ergeben, der im Verlauf der Division bereits aufgetreten ist?

Jede rationale Zahl in Bruchschreibweise lässt sich durch Ausführen der entsprechenden Division in eine endliche oder eine periodische Dezimaldarstellung umwandeln. Umgekehrt kann man jede endliche und jede periodische Dezimaldarstellung in eine Bruchdarstellung umwandeln.

B **1.88** Ermittle die Bruchdarstellung.
a) 0,031 ***b)*** $0,0\dot{3}\dot{1}$

Lösung:
a) $0,031 = \frac{31}{1\,000}$

b) $0,0\dot{3}\dot{1} = 0,031\,31\,31... = x$

$$\begin{aligned} x &= 0,0\,31\,31\,31\,31... \quad | \cdot 100 \\ 100 \cdot x &= 3,1\,31\,31\,31\,31... \\ 99 \cdot x &= 3,1\,00\,00\,00\,00... \quad | \cdot 10 \\ 990 \cdot x &= 31 \quad | : 990 \\ x &= \frac{31}{990} \end{aligned}$$

- Achte darauf, an welcher Stelle die letzte (von 0 verschiedene) Ziffer der Dezimalzahl steht, zum Beispiel 1 steht an der Tausendstelstelle.
- Multipliziere mit 10, falls die Periode eine Ziffer lang ist, bei einer 2-ziffrigen Periode mit 100, bei 3 Ziffern mit 1 000 usw. Subtrahiere nun. Falls die Differenz keine ganze Zahl sondern – wie in diesem Beispiel – eine endliche Dezimalzahl ist, multipliziere so, dass sich eine ganze Zahl ergibt. Ermittle x durch geeignetes Dividieren.

B **1.89** Ermittle durch Ausführen der Division die endliche Dezimaldarstellung des gegebenen Bruchs.
a) $\frac{1}{4}$ ***b)*** $\frac{2}{5}$ ***c)*** $\frac{7}{10}$ ***d)*** $\frac{8}{25}$ ***e)*** $\frac{11}{50}$ ***f)*** $\frac{13}{100}$ ***g)*** $\frac{9}{125}$

B **1.90** Ermittle durch Ausführen der Division die periodische Dezimaldarstellung des gegebenen Bruchs.
a) $\frac{1}{3}$ ***b)*** $\frac{2}{7}$ ***c)*** $\frac{7}{9}$ ***d)*** $\frac{8}{11}$ ***e)*** $\frac{11}{6}$ ***f)*** $\frac{11}{12}$ ***g)*** $\frac{1}{99}$

Aufgaben 1.91 – 1.92: Schreibe jeweils als Bruch und kürze wenn möglich.

1.91 **a)** 0,4 **b)** 0,3 **c)** 0,05 **d)** 0,08 **e)** 0,007 **f)** 0,004 **g)** 0,000 8 **h)** 0,000 9 — B

1.92 **a)** 0,24 **b)** 0,35 **c)** 0,375 **d)** 1,18 **e)** 0,055 **f)** 0,145 **g)** 0,084 **h)** 1,012 — B

1.93 Zeichne einen geeigneten Ausschnitt der Zahlengeraden und markiere die angegebenen rationalen Zahlen. — B

a) $-4{,}3; \frac{7}{2}; 2{,}5; -\frac{1}{10}$

b) $0{,}99; \frac{49}{50}; 1{,}01; 0{,}995; 1{,}025$

c) $-4{,}03; -3{,}97; -3{,}09; -4{,}13$

d) $-\frac{1}{1\,000}; -0{,}000\,97; -0{,}001\,2; -\frac{99}{100\,000}$

1.94 Beantworte die Frage und fertige eine Skizze an. — B
Welche Zahl liegt auf der Zahlengeraden

a) 9 Einheiten links von (−23)?

b) 0,9 Einheiten rechts von (−5,4)?

c) 0,01 Einheiten links von (−1)?

d) 0,000 1 Einheiten rechts von (−0,01)?

1.95 Lies ab, welche Zahlen auf der Zahlengeraden markiert sind. — C

a) −4,42 −4,41 −4,4 −4,39

b) −0,001 4 −0,001 3 −0,001 2 −0,001 1

1.96 Wie lautet die Dezimalzahl, die genau in der Mitte zwischen den angegebenen Zahlen liegt? — AB

a) 3,4 und 3,5 **b)** 7,01 und 7,02 **c)** −0,004 und −0,005 **d)** 2,104 6 und 2,104 7

1.97 Gib drei Zahlen an, die zwischen den gegebenen Zahlen und näher bei der kleineren der beiden liegen. — AB

a) −1,5 und −1,6 **b)** 6,2 und 6,3 **c)** −5,55 und −5,56 **d)** −0,002 und −0,003

1.98 Welchen Bruch gibt die periodische Dezimalzahl an? — B

a) $0{,}\dot{3}$ **b)** $0{,}0\dot{4}$ **c)** $0{,}\dot{2}\dot{3}$ **d)** $0{,}0\dot{4}\dot{8}$ **e)** $0{,}\dot{5}0\dot{7}$

1.99 Stellt der Bruch eine periodische oder endliche Dezimalzahl dar? Begründe deine Antwort. — BD

a) $\frac{17}{35}$ **b)** $\frac{19}{32}$ **c)** $\frac{1}{125}$ **d)** $\frac{45}{90}$

1.100 Gib die Dezimalzahl 0,45 mithilfe des Taschenrechners als Bruch an. — B

Lösung:

0.45

9⌟20

- Der Wechsel zwischen Dezimaldarstellung und Bruchdarstellung erfolgt auf vielen Geräten mit dem Befehl F◄►D. (F ... fraction, D ... decimal)

F◄►D
PRB

TE

1.101 Wandle die Dezimalzahl in einen gekürzten Bruch um. Kontrolliere deine Rechnung mit dem Taschenrechner. — B

a) 0,55 **b)** 1,24 **c)** 0,016 **d)** 0,256 **e)** 0,007 5

TE

1.3.4 Prozent und Promille

AB **1.102** Joghurt wird mit unterschiedlichem Fettgehalt verkauft. Wie viel Milliliter (mℓ) reines Fett sind in 200 mℓ Joghurt mit einem Fettgehalt von 1 % enthalten?

Kleine Anteile von einem Ganzen werden im Alltag meist durch Prozent, Promille oder parts per million (ppm) beschrieben.

Prozent: $1\,\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$ Promille: $1\,‰ = 0{,}001$ parts per million: $1\text{ ppm} = 0{,}000\,001$

p % eines **Grundwerts G** werden als **Anteil A** (Prozentanteil, Prozentwert) bezeichnet.

p % nennt man **Prozentsatz**. $A = \frac{G \cdot p}{100}$

Durch Umformen der Formel $A = \frac{G \cdot p}{100}$ erhält man $p\,\% = \frac{A}{G} \cdot 100\,\%$ zur Berechnung des Prozentsatzes bzw. $G = \frac{A \cdot 100}{p}$ zur Berechnung des Grundwerts.

Promilleangaben beziehen sich auf 1 000 ‰. Der Umrechnungsfaktor bei der Multiplikation ist somit $\frac{1}{1\,000}$ und es gilt entsprechend $A = \frac{G \cdot p}{1\,000}$, $p\,‰ = \frac{A}{G} \cdot 1\,000\,‰$ und $G = \frac{A \cdot 1\,000}{p}$.

Prozentaufgaben können auf verschiedene Arten gelöst werden, die anhand des folgenden Beispiels gezeigt werden.

AB **1.103** Nichtrostende Stahlsorten haben einen Chromgehalt von mindestens 10,5 %. Wie viel Kilogramm Chrom sind in 3 500 kg einer Stahlsorte mit einem Chromgehalt von 12 % vorhanden?

Lösung:

1. Möglichkeit: Schlussrechnung

100 % .... 3 500 kg

1 % .... $\frac{3\,500\text{ kg}}{100}$

12 % .... A

$A = \frac{3\,500\text{ kg} \cdot 12\,\%}{100\,\%} = 420\text{ kg}$

- Der Prozentwert (Prozentanteil) A steht immer im direkten Verhältnis zum Prozentsatz: Je höher der Prozentsatz, desto größer der Chromanteil.
- Der Chromanteil ist gesucht, daher sind die gegebenen 3 500 kg 100 %.

2. Möglichkeit: Formel

$A = \frac{G \cdot p}{100} = \frac{3\,500\text{ kg} \cdot 12}{100} = 420\text{ kg}$

3. Möglichkeit: Multiplikation

$12\,\% = \frac{12}{100} = 0{,}12$

$A = 3\,500\text{ kg} \cdot 0{,}12 = 420\text{ kg}$

- Schreibe die Prozentangabe als Dezimalzahl an.
- Multipliziere den Grundwert mit dieser Dezimalzahl.

B **1.104** Ermittle 3 ‰ bzw. 15 ppm von 4 Millionen.

Lösung:

3 ‰ von 4 000 000 ... $4\,000\,000 \cdot 0{,}003 = 12\,000$

15 ppm von 4 000 000 ... $4\,000\,000 \cdot 0{,}000\,015 = 60$

1.105 Welchen Betrag B erhält man, wenn man den Grundwert G von 5 000,00 € um 7 % vermindert?
Lösung:
$B = G - G \cdot 0{,}07$ ● 7 % des Grundwerts vom Grundwert abziehen.
$B = G \cdot (1 - 0{,}07) = G \cdot 0{,}93 = 5\,000{,}00\ € \cdot 0{,}93 = 4\,650{,}00\ €$

B

1.106 Gib in Prozent und Promille an.
a) $\frac{1}{4}$ **b)** $\frac{1}{5}$ **c)** $\frac{3}{10}$ **d)** $\frac{5}{8}$ **e)** 0,33 **f)** 1,25 **g)** 0,003 **h)** 0,125

B

1.107 Berechne den Prozentwert bzw. Promillewert.
a) 20 % von 40,00 € **d)** 85 ‰ von 90 mg **g)** 1 ‰ von 5,5 ℓ
b) 145 % von 110 km **e)** 80 % von 30,5 h **h)** 0,3 ‰ von 18 km
c) 40 ‰ von 70 000 km^2 **f)** 115 % von 120 $\frac{km}{h}$ **i)** 3,25 % von 12 500,00 €

B

1.108 Berechne den Prozentsatz für den angegebenen Prozentwert und Grundwert.
a) 30 ha von 120 ha **b)** 25 m von 125 m **c)** 3 t von 60 t **d)** 36 mg von 80 mg

B

1.109 Berechne den Promillesatz für den angegebenen Promillewert und Grundwert.
a) 8 m von 256 m **b)** 74 mℓ von 222 mℓ **c)** 0,175 s von 350 s **d)** 15 hℓ von 225 hℓ

B

1.110 Berechne den Grundwert.
a) 33,00 € sind 11 % von … **b)** 57 km^2 sind 19 ‰ von … **c)** 84 h sind 21 % von …

B

1.111 Um einen Grundwert G um 20 % zu vermehren, rechnet Anna $1{,}2 \cdot G$. Begründe, warum diese Rechnung richtig ist.

AD

1.112 Gib den Faktor an, mit dem der Grundwert G multipliziert werden muss.
a) 95 % von G **c)** um 3 % weniger **e)** G wird um 15 % verringert
b) G wird um 10 % erhöht **d)** um 100 % mehr **f)** 75 ppm von G

AB

1.113 Vollmilch wird mit einen Fettgehalt von 3,6 % verkauft. Wie viel Milliliter reines Fett sind in einem halben Liter Vollmilch enthalten?

AB

1.114 In einem Jahr verletzten sich 5 400 Radfahrerinnen und Radfahrer im Straßenverkehr und 26 400 bei Freizeitunfällen. 21 700 der an Freizeitunfällen Beteiligten trugen keinen Fahrradhelm, 21 % davon erlitten Kopfverletzungen.
a) Wie viel Prozent der an Freizeitunfällen beteiligten Personen trugen keinen Helm?
b) Wie viele Personen ohne Helm erlitten bei Freizeitunfällen eine Kopfverletzung?

AB

1.115 5 % der täglichen Produktion, das sind 800 Stück, sind Ausschuss. Wie viel Stück werden im Monat Juli produziert, wenn täglich gearbeitet wird? Wie viel Stück sind es mindestens bzw. höchstens, wenn Samstag und Sonntag nichts produziert wird?

ABC

1.116 Der Preis eines Pullovers wird von 100,00 € zuerst um 10 % erhöht und nach einer Woche um 10 % vermindert. Wird der Pullover jetzt wieder um 100,00 €, um weniger als 100,00 € oder um mehr als 100,00 € verkauft? Schätze zuerst, bevor du rechnest!

AB

1.117 Der Preis eines Flachbildfernsehapparats wird von 990,00 € zuerst um 15 % verringert und nach einem Monat um 15 % erhöht. Wird der Fernsehapparat jetzt wieder um 990,00 €, um weniger als 990,00 € oder um mehr als 990,00 € verkauft?
Ist es egal, ob zuerst erhöht oder zuerst reduziert wird? Begründe durch eine Rechnung.

ABD

1.118 In einer Reklame wurde angekündigt: „Heute ersparen Sie sich die Mehrwertsteuer.“ Beim Einkauf wurden dann 20 % vom normalen Verkaufspreis abgezogen. Hast du Einwände gegen diese Berechnung? Kommentiere und begründe ausführlich.

ABCD

Weitere Aufgaben im Zusatzheft

1.4 Reelle Zahlen

Die Anhänger des Pythagoras (ca. 570 – 510 v. Chr.) waren noch davon überzeugt, dass sich die Welt durch Verhältnisse ganzer Zahlen vollkommen beschreiben lässt. „Alles ist Zahl" war der Leitspruch der Pythagoreer, die man heute wohl als Sekte bezeichnen würde. Ca. 450 v. Chr. machte ein Mitglied, Hippasos von Metapont, eine folgenschwere Entdeckung. Die Seitenlänge und die Diagonale eines regelmäßigen Fünfecks haben ein Längenverhältnis, das sich nicht durch einen Bruch beschreiben lässt. Weil er diese Erkenntnis nicht für sich behielt, wurde er als Verräter bezeichnet. Ob sein Tod bei einem Schiffsunglück bald danach Zufall war, wird wohl nicht mehr zu klären sein.

Schon bald danach wussten die Mathematiker, dass $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ... nicht durch rationale Zahlen dargestellt werden können.

1 x 1

Wir betrachten nebenstehendes Dreieck.
Nach dem Satz des Pythagoras muss gelten:

$$x^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow x^2 = 2$$

x muss also eine Zahl sein, die, mit sich selbst multipliziert, 2 ergibt. Angenommen, es gibt eine rationale Zahl x ($1 < x < 2$), die diese Forderung erfüllt. Wir geben diese Zahl als gekürzten Bruch an.

$$x = \frac{p}{q} \text{ mit } ggT(p, q) = 1, q \neq 1$$

Dann ist $x^2 = \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q}$ ebenfalls nicht mehr kürzbar, x^2 daher keine ganze Zahl. Das ist ein Widerspruch zu unserer Annahme $x^2 = 2$. Es gibt also keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$. Die Zahl x kann dann weder eine periodische noch eine endliche Dezimalzahl sein. x muss daher eine nicht periodische Dezimalzahl mit unendlich vielen Dezimalstellen sein.

Wurzeln aus natürlichen Zahlen sind natürliche Zahlen oder irrationale Zahlen. Im letzteren Fall kann man ihren Wert nur bis zu einer gewissen Genauigkeit angeben, zB $\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,5... \approx 1{,}41$.

Auch die Kreiszahl $\pi = 3{,}141\,592\,653\,589\,7... \approx 3{,}14$ ist eine irrationale Zahl, der Nachweis ist jedoch umfangreich und schwierig.

Eine Zahl, die nicht als Verhältnis ganzer Zahlen ausdrückbar ist, hat eine nicht periodische Dezimaldarstellung mit unendlich vielen Dezimalstellen und heißt **irrationale Zahl**.

Die Menge der rationalen Zahlen und die Menge der irrationalen Zahlen bilden zusammen die Menge der **reellen** Zahlen. Die Menge der reellen Zahlen wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet. Jeder reellen Zahl kann ein Punkt auf der Zahlengeraden zugeordnet werden und umgekehrt. Auch für reelle Zahlen gelten die für die natürlichen Zahlen besprochenen Rechengesetze.

ℝ
ℕ
ℤ
ℚ
Irrationale Zahlen

Wir wissen bereits, dass es unendlich viele rationale Zahlen gibt. Man kann die Menge der rationalen Zahlen aber „durchnummerieren“:

Das Verfahren heißt nach seinem Erfinder 1. Cantor'sches Diagonalverfahren (Georg Cantor, deutscher Mathematiker, 1845 – 1918). Dabei werden die rationalen Zahlen, wie durch die Pfeile angezeigt, durchlaufen. Brüche gleichen Werts werden nur beim ersten Auftreten gezählt.

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	...
$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	...
$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	...	...
$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	...	...	...
...	...	...	...	...

Man sagt, es gibt **abzählbar unendlich** viele rationale Zahlen.

Im Gegensatz dazu kann man die Menge der reellen Zahlen nicht durchnummerieren. Man nennt die Menge der reellen Zahlen daher **überabzählbar**.

Eine Teilmenge der reellen Zahlen, die sich als zusammenhängender Bereich auf der Zahlengeraden darstellen lässt, nennt man ein **Intervall**.
Intervalle können in Intervallschreibweise oder als Menge angegeben bzw. auf der Zahlengeraden dargestellt werden.

ZB:

$[2; 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 5\}$

abgeschlossenes Intervall:
Alle reellen Zahlen zwischen 2 und 5, wobei die „Ränder“ 2 und 5 zum Intervall gehören.

$[2; 5[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 5\}$

rechts offenes Intervall:
5 gehört dem Intervall nicht an.

$]2; 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 5\}$

links offenes Intervall:
2 gehört dem Intervall nicht an.

$]2; 5[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$

offenes Intervall:
Weder 2 noch 5 gehören dem Intervall an.

1.119 Schreibe den angegebenen Bereich der reellen Zahlen als Intervall an und kennzeichne ihn auf einem geeigneten Ausschnitt der Zahlengeraden. **B**

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 3\}$
b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 6\}$
c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < -1{,}5\}$
d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2{,}5 \leq x \leq 5\}$
e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x \leq -5\}$
f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$

1.120 Schreibe als Menge an. **B**

a) [3; 6] ***b)***]5; 8,9[***c)***]−7; −2,5] ***d)*** [0; 3,7[***e)***]−2,3; 0,5[

1.121 Die Abbildung rechts zeigt die Spirale des griechischen Mathematikers Theodoros von Kyrene (ca. 460 v. Chr. – 399 v. Chr.) **BD**

1) Erkläre, welche Formel er dabei anwendet.
2) Konstruiere eine Spirale bis $\sqrt{17}$.

1.5 Potenzen und Wurzeln

1.5.1 Grundlagen

Kannst du dir vorstellen, dass Einstein all seine Berechnungen auch mit römischen Zahlen durchführen hätte können? Wohl kaum, schon der Versuch, aus den Daten unter seinem Bild (Abb. 1.2) zu berechnen, wie alt er wurde, ist mühsam, wenn wir die römischen Zahlen nicht durch Zahlen aus unserem Stellenwertsystem ersetzen. Dieses Stellenwertsystem erleichtert die Angabe von sehr großen und sehr kleinen Zahlen, weil wir die Zehnerpotenzen, die sich hinter unseren Zahlen „verstecken", nicht anschreiben müssen.

MDCCCLXXIX – MCMLV
Abb. 1.2

Sowohl für die „Alltagstauglichkeit" der Mathematik als auch für ihre Weiterentwicklung war es wichtig, Zahlen und Rechenvorgänge möglichst kurz und einfach anzuschreiben.

Für die **Multiplikation von gleichen Faktoren** verwenden wir die Schreibweise:

$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} = a^n$ [sprich: „a hoch n"]

Zusätzlich wird festgelegt: $a^1 = a$
$a^0 = 1$ mit $a \neq 0$

Bezeichnungen: a^n
a ... **Basis** oder Grundzahl n ... **Exponent** oder Hochzahl
Der Rechenvorgang wird **Potenzieren**, a^n wird **Potenz** genannt.

Für die am häufigsten auftretenden Hochzahlen 2 und 3 gibt es eigene Bezeichnungen:
a^2 ... Rechenvorgang: Quadrieren, Ergebnis: Quadrat
a^3 ... Rechenvorgang: Kubieren, Ergebnis: Kubus (Mehrzahl: Kuben)

10^n ... Zehnerpotenz

$A = a^2$
Quadrat

$V = a^3$
Würfel
(latein: „cubus")

B **1.122** Schreibe als Potenz an und berechne das Ergebnis.
a) $5 \cdot 5 \cdot 5$ **b)** $(-8) \cdot (-8)$

Lösung:
a) $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$ **b)** $(-8) \cdot (-8) = (-8)^2 = 64$

B **1.123** Schreibe als Potenz an und berechne wenn möglich.
a) $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$ **b)** $0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4$ **c)** $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$

B **1.124** Schreibe als Produkt an und berechne.
a) $(-2)^3$ **b)** 4^3 **c)** 2^2 **d)** $(-3)^2$

1.5.2 Rechnen mit Potenzen

1.125 Schreibe die Rechnungen mithilfe von Potenzen an und berechne jeweils das Ergebnis. B

1) $2 \cdot 2 + 3 \cdot 3$ ***2)*** $2 + 3 \cdot 3$ ***3)*** $2 \cdot 2 + 3$ ***4)*** $(2 + 3) \cdot (2 + 3)$

Der **Exponent** bezieht sich immer nur **auf einen** Wert bzw. Ausdruck. Achte auf die richtige Reihenfolge des Abarbeitens, zB $7 + 4 \cdot 3^2 = 7 + 4 \cdot 9 = 7 + 36 = 43$.

Merkhilfe: **Potenz vor Punktrechnung vor Strichrechnung**

Potenzieren von negativen Zahlen
Überlege anhand der Vorzeichenregeln der Multiplikation:
ZB: $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$
$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$
$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16$
$(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$

Potenz eines Produkts
ZB: $(5 \cdot 3)^2 = 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 = 5^2 \cdot 3^2$

Ein **Produkt** wird potenziert, indem man **jeden Faktor** einzeln **potenziert**.

Potenz eines Bruchs (Quotienten)
ZB: $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3^2}{4^2}$

Ein **Bruch** wird potenziert, indem man **Zähler** und **Nenner** getrennt **potenziert**.

Potenz einer Potenz
ZB: $(5^2)^3 = (5^2) \cdot (5^2) \cdot (5^2) = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6$

Beim **Potenzieren** einer Potenz werden die **Exponenten multipliziert**. Die Basis bleibt dabei unverändert.

Achte auf den Unterschied: ZB: $(5^2)^3 = (5^3)^2 = 5^6$, aber $5^{(2^3)} = 5^8$

Für **Potenzen mit gleicher Basis** gilt:
ZB: $7^3 \cdot 7^2 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^{3+2} = 7^5$
ZB: $\frac{4^5}{4^3} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{4 \cdot 4 \cdot 4} = 4^{5-3} = 4^2$

Beim **Multiplizieren** von Potenzen mit gleicher Basis werden die **Exponenten addiert**.
Beim **Dividieren** von Potenzen mit gleicher Basis werden die **Exponenten subtrahiert**.

Rechenregeln für Potenzen

$$(-a)^n = \begin{cases} a^n, \text{ wenn n gerade} & \text{(Hochzahl gerade} \Rightarrow \text{Ergebnis positiv)} \\ -a^n, \text{ wenn n ungerade} & \text{(Hochzahl ungerade} \Rightarrow \text{Ergebnis negativ)} \end{cases}$$

Für $a, b \neq 0$ und $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

Potenz	... eines Produkts:	... eines Bruchs:	... einer Potenz:
	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Potenzen mit gleicher Basis $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

1.126 Berechne das Ergebnis. B

a) $(-2)^3 \cdot 5 - (-4)^2$ ***b)*** $\frac{2^5 \cdot 2^3}{2^2 \cdot 2^4}$

Lösung:
a) $(-2)^3 \cdot 5 - (-4)^2 = -8 \cdot 5 - 16 = -40 - 16 = -56$
b) $\frac{2^5 \cdot 2^3}{2^2 \cdot 2^4} = \frac{2^8}{2^6} = 2^2 = 4$

Zahlen und Mengen

B **1.127** Berechne die Ergebnisse.

1) $(2 \cdot 3 - 4)^2$ **3)** $2 \cdot 3 - 4^2$ **5)** $2 \cdot (3 - 4)^2$ **7)** $(2 \cdot 3)^2 - 4$
2) $2^3 \cdot (4^2 - 6)$ **4)** $(3^2 - 4)^2 \cdot 3^2$ **6)** $(2 \cdot 7 - 3^2)^3$ **8)** $(2^2 \cdot 3)^2 - 4^3$

B **1.128** Gib das Ergebnis in der Form a^n oder $-a^n$ an.

a) $(-2)^3$ **b)** $(-3)^2$ **c)** $-(-5)^4$ **d)** $-(5^2)$ **e)** $-(-4)^3$

Aufgaben 1.129 – 1.130: Schreibe die Ergebnisse in der Form a^n an.

B **1.129** **a)** $3^2 \cdot 3^4$ **b)** $2^5 \cdot 2^3$ **c)** $7 \cdot 7^3$ **d)** $3^0 \cdot 3^4$ **e)** $11 \cdot 11^0$

B **1.130** **a)** $\frac{3^5}{3^2}$ **b)** $\frac{7^3}{7^3}$ **c)** $\frac{4^5}{4}$ **d)** $\frac{5^3}{5^0}$ **e)** $\frac{4}{4^0}$

Aufgaben 1.131 – 1.132: Schreibe jeweils ohne Klammern.

B **1.131** **a)** $(2 \cdot 5)^2$ **b)** $(3 \cdot 4)^4$ **c)** $(7 \cdot 5)^3$ **d)** $(11 \cdot 6)^5$

B **1.132** **a)** $\left(\frac{2}{3}\right)^5$ **b)** $\left(\frac{1}{5}\right)^3$ **c)** $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$ **d)** $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$

B **1.133** Berechne das Ergebnis.

a) $(-2^2)^3$ **b)** $(3^2)^2$ **c)** $(-(-1)^2)^3$ **d)** $2^{(2^3)}$

AD **1.134** Welche der folgenden Behauptungen sind richtig, welche falsch? Begründe deine Antworten, gib wenn möglich Beispiele bzw. Gegenbeispiele an.

1) Das Quadrat einer rationalen Zahl ist eine positive oder negative rationale Zahl.
2) Quadriert man die Hälfte einer Zahl, so kann das Ergebnis größer sein als das Quadrat der ursprünglichen Zahl.
3) Die dritte Potenz einer Bruchzahl ist immer größer als das Quadrat dieser Zahl.
4) Wenn man Zähler und Nenner eines Bruchs quadriert, ändert das den Wert der Bruchzahl nicht.

AD **1.135** Welche Zahlen werden durch Quadrieren größer, welche kleiner? Begründe deine Antwort.

ABD **1.136** Für welche Zahlen stimmt die Behauptung, für welche nicht? Gib je zwei Beispiele und Gegenbeispiele an.
„Der Betrag einer Zahl wird durch Quadrieren größer."

Aufgabe 1.137 – 1.142: Berechne jeweils das Ergebnis.

B **1.137** **a)** $3 \cdot [2^2 + 5 \cdot (3^3 - 10)^2]$ **b)** $3 \cdot [(2 + 5) \cdot (3^3 - 10)^2]$ **c)** $3 \cdot [2^2 + 5 \cdot (3^3 - 10^2)]$

B **1.138** **a)** $45 : (4^2 - 7) + (-63 : 9)^2$ **b)** $[45 : (4^2 - 7)]^2 + (-63 : 9)^2$ **c)** $45 : (4^2 - 13)^2 + (-63) : 3^2$

B **1.139** $2 \cdot \{[(-200 : (-2)^3 + 5^2) + (-4)^2] \cdot (-1)^2 - 4^3\}^2$

B **1.140** $2 \cdot \{[(-200 : 2^3 + 5^2) \cdot (-4)^3] \cdot (-5)^3 + 3^2\}^2$

B **1.141** **a)** $\frac{2^3}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \frac{2}{5^3}$ **b)** $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}\right)^3$ **c)** $\frac{5}{6} + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right)^2$

B **1.142** **a)** $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1\right] \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)^2$ **b)** $\left[2 - \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}\right)^2\right]^2 - \left(-\frac{5}{4}\right)^2$ **c)** $\left[\frac{1}{2} - \left(\frac{3}{7} - 5 \cdot \frac{2^2}{49}\right) : \frac{2}{7}\right]^2$

B TE

1.143 Gib die Rechnung in deinen Taschenrechner ein.

1) $5 + 2^3$ ***2)*** $(5 + 2)^3$ ***3)*** $\frac{2}{7^3}$ ***4)*** $\left(\frac{2}{7}\right)^3$ ***5)*** -2^3 ***6)*** $(-2)^3$

Lösung:

1) 5+2^3

2) (5+2)^3

3) 2/7^3

4) (2/7)^3

5) -2^3

6) (-2)^3

- Die Eingabe ist vom verwendeten Taschenrechner abhängig. Bei den meisten Geräten wird die Potenz mithilfe der Taste ^ eingegeben.
- Die eingegebene Hochzahl bezieht sich immer nur auf die zuvor eingegebene Zahl. Soll eine Zahl mit negativem Vorzeichen potenziert werden, so müssen Klammern gesetzt werden.

C TE

1.144 Schreibe den Rechenausdruck an, der durch die folgende Eingabe beschrieben wird.

a) -(3/4)^2+1 ***b)*** (7-3)/5^2 ***c)*** 2+5^3/4 ***d)*** 2*5^3/4+7

BD TE

1.145 Arbeitet zu zweit. Schreibt die folgenden Ausdrücke so an, wie die Eingabe in den Taschenrechner erfolgen müsste (siehe Aufgabe 1.143). Ein Partner berechnet nun das Ergebnis mithilfe des Taschenrechners, der andere ohne. Wer ist schneller?

1) $-\frac{2^3}{4} + 1$ ***2)*** $\frac{(-2)^3}{4} + 1$ ***3)*** $-\left(\frac{2}{4}\right)^3 + 1$ ***4)*** $-\frac{2^3}{4 + 1}$

Weitere Aufgaben im Zusatzheft

1.5.3 Rechnen mit Wurzeln

AB

1.146 Welchen Rechenvorgang musst du bei folgenden Aufgaben ausführen?

1) Ein Quadrat hat eine Fläche von 16 cm^2. Gib seine Seitenlänge an.

2) Ein Würfel hat ein Volumen von 8 cm^3. Welche Kantenlänge hat dieser Würfel?

Die Berechnung der Quadratwurzel ist der Umkehrrechenvorgang zum Quadrieren.

Es gilt zum Beispiel $3^2 = 9$, daher $\sqrt{9} = 3$. Es gilt zwar auch $(-3)^2 = 9$, man hat sich aber im Verlauf der Geschichte darauf geeinigt, als Quadratwurzel jeweils nur den **positiven Wert** zu bezeichnen.

Ebenso kann man den Rechenvorgang Kubieren umkehren, man erhält dann die Kubikwurzel und schreibt zum Beispiel $\sqrt[3]{64} = 4$, da $4^3 = 64$.

Man nennt die (nicht negative) Zahl $x = \sqrt{a}$ $(a \geqslant 0)$ die **Quadratwurzel** von a, wenn gilt: $x^2 = a$
Man nennt die Zahl $x = \sqrt[3]{a}$ $(a \geqslant 0)$ die **Kubikwurzel** von a, wenn gilt $x^3 = a$.

Für das Wurzelziehen gelten ähnliche Rechenregeln wie für das Potenzieren, zB:

- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ zB: $\sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{36} = 6$, $\sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ zB: $\sqrt{\frac{100}{25}} = \sqrt{4} = 2$, $\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$

Beweise und weitere Rechenregeln für Wurzeln werden in Band 2 angeführt.

Zahlen und Mengen

Eine andere Schreibweise für Wurzeln kann man sich mithilfe des Potenzierens überlegen:

ZB: $(4^5)^2 = 4^{5 \cdot 2} = 4^{10}$

- Beim Potenzieren werden die Hochzahlen multipliziert. Insbesondere bedeutet das Quadrieren einer Potenz, dass die Hochzahl mit 2 multipliziert wird.

$\sqrt{4^{10}} = 4^{\frac{10}{2}} = 4^5$

- Beim Umkehrvorgang Quadratwurzelziehen muss die Hochzahl also durch 2 dividiert werden.

$(2^4)^3 = 2^{4 \cdot 3} = 2^{12}$

$\sqrt[3]{2^{12}} = 2^{\frac{12}{3}} = 2^4$

- Analog gilt für das Kubikwurzelziehen, dass die Hochzahl durch 3 dividiert wird.

TE

Berechnung der Wurzel mit dem Taschenrechner:
Bei den meisten Geräten erfolgt die Eingabe des Wurzelzeichens mithilfe der Zweitbelegung der Quadrattaste. [Taste: √ / x^2]

Kann $\sqrt[x]{\ }$ eingegeben werden, so erhält man die Kubikwurzel mit der Tastenfolge [3] [2nd] [^ / $\sqrt[x]{\ }$]

Auf manchen Taschenrechnern gibt es keine Taste für die Kubikwurzel. Aus obigen Überlegungen ergibt sich, dass man stattdessen die Hochzahl $\frac{1}{3}$ eingeben kann.

Aufgaben 1.147 – 1.148: Rechne im Kopf.

B **1.147** **a)** $\sqrt{36}$ **b)** $\sqrt[3]{27}$ **c)** $\sqrt{121}$ **d)** $\sqrt[3]{64}$ **e)** $\sqrt{4\,900}$ **f)** $\sqrt[3]{27\,000}$ **g)** $\sqrt{144}$ **h)** $\sqrt[3]{729}$ **i)** $\sqrt{81}$ **j)** $\sqrt[3]{8\,000}$

B **1.148** **a)** $\sqrt{3^8}$ **b)** $\sqrt[3]{25^3}$ **c)** $\sqrt[3]{10^6}$ **d)** $\sqrt{17^4}$ **e)** $\sqrt[3]{11^6}$

B **1.149** Schreibe mit gemeinsamem Wurzelzeichen und berechne anschließend.
a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ **b)** $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9}$ **c)** $\sqrt{27} \cdot \sqrt{3}$ **d)** $\sqrt[3]{100} \cdot \sqrt[3]{80}$ **e)** $\sqrt{72} \cdot \sqrt{2}$

B **1.150** Schreibe mit getrenntem Wurzelzeichen und berechne anschließend.
a) $\sqrt{\frac{4}{9}}$ **b)** $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ **c)** $\sqrt{\frac{1}{4}}$ **d)** $\sqrt[3]{\frac{1}{1\,000}}$ **e)** $\sqrt{\frac{16}{25}}$

ABCD **1.151** Arbeitet zu zweit. Berechnet die folgenden Wurzeln mithilfe des Taschenrechners. Versucht, eine Gesetzmäßigkeit zu erkennen, für welche Radikanden das Ergebnis eine ganze Zahl ist. Welche Rechenregeln kann man bei diesen Radikanden anwenden, um das Ergebnis leicht im Kopf zu berechnen?

TE

1) $\sqrt{4}$ $\sqrt{40}$ $\sqrt{400}$ $\sqrt{4\,000}$ $\sqrt{40\,000}$ $\sqrt{400\,000}$ $\sqrt{4\,000\,000}$
2) $\sqrt[3]{27}$ $\sqrt[3]{270}$ $\sqrt[3]{2\,700}$ $\sqrt[3]{27\,000}$ $\sqrt[3]{270\,000}$ $\sqrt[3]{2\,700\,000}$ $\sqrt[3]{27\,000\,000}$

D **1.152** Begründe mithilfe der Vorzeichenregeln für das Potenzieren, warum du mit dem Taschenrechner die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl nicht berechnen kannst, für die Kubikwurzel jedoch trotzdem ein Wert ausgegeben wird.

ABCD **1.153** Sind die folgenden Behauptungen richtig oder falsch? Begründe deine Antwort und gib jeweils Beispiele bzw. Gegenbeispiele an.
1) Es gibt Zahlen, für die gilt: $\sqrt{x} > x$
2) Die Quadratwurzel aus einer Zahl ist immer größer als die Kubikwurzel aus dieser Zahl.
3) Die Quadratwurzel und die Kubikwurzel einer Zahl können gleich groß sein.
4) Wird eine Zahl quadriert und aus dem Ergebnis die Quadratwurzel gezogen, erhält man wieder die ursprüngliche Zahl.

Weitere Aufgaben im Zusatzheft

1.6 Zehnerpotenzen und Gleitkommadarstellungen

1.6.1 Negative Hochzahlen

1.154 Markus spielt mit seinen Geschwistern Monopoly (siehe nebenstehende Abbildung). Wie viel „Bargeld" hat er derzeit?

B

Im **dekadischen System** werden ganze Zahlen mithilfe von **Ziffern** (0 ... 9) und **Stellenwerten** (Position innerhalb der Zahl) angegeben.

ZB: 3 427

3 Tausender, 4 Hunderter, 2 Zehner, 7 Einer

Einer, Zehner, Hunderter, Tausender ... nennt man **dekadische Einheiten**. Die dekadischen Einheiten können mithilfe von Zehnerpotenzen angeschrieben werden:

$$1 = 10^0$$
$$10 = 10^1$$
$$100 = 10^2$$
$$1\,000 = 10^3 \text{ usw.}$$

Damit kann man die Zahl 3 427 so angeben: $3\,427 = 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$

Zur Angabe von Dezimalzahlen wurde das Stellenwertsystem erweitert. Die dekadischen Einheiten, die kleiner als 1 sind, kann man durch Dezimalzahlen oder als Brüche angeben:
1 Zehntel = $0{,}1 = \frac{1}{10}$, 1 Hundertstel = $0{,}01 = \frac{1}{100}$ usw.
Um die Darstellung mithilfe von Zehnerpotenzen auch für Dezimalzahlen anwenden zu können, verwenden wir folgende Schreibweise:

$0{,}1 = \frac{1}{10} = \frac{1}{10^1} = 10^{-1}$ $\qquad$ $0{,}001 = \frac{1}{1\,000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$

$0{,}01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$ $\qquad$ $0{,}000\,1 = \frac{1}{10\,000} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4}$

Die Schreibweise mit negativen Hochzahlen ist nicht nur für Zehnerpotenzen, sondern auch allgemein für Potenzen möglich.

Potenzen mit negativen Exponenten: $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \qquad a \neq 0;\ n \in \mathbb{N}$

ZB: $4^{-1} = \frac{1}{4}$ $\qquad$ $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^1} = 4$ $\qquad$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$ $\qquad$ $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$

Alle bisher besprochenen Rechenregeln gelten auch für negative Hochzahlen.
Beachte: Das negative Vorzeichen des Exponenten ist ein Symbol für den Auftrag: „Bilde den Kehrwert". Es hat nichts mit dem Vorzeichen der Basis bzw. der Potenz zu tun.

ZB: $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{3^3}{2^3} = -\frac{27}{8}$

negative Hochzahl → Kehrwert bilden

Der Kehrwert der negativen Zahl $-\frac{2}{3}$ ist die (ebenfalls) negative Zahl $-\frac{3}{2}$.

Durch Anwenden dieser Schreibweise können auch die Nachkommastellen einer Dezimalzahl mithilfe von Zehnerpotenzen angegeben werden:
ZB: $3\,427{,}859 = 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3}$

Zahlen und Mengen

B **1.155** Schreibe die Zahl als Summe von Zehnerpotenzen an.

a) 456,7 **b)** 0,004 32

Lösung:

a) $456{,}7 = 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1}$ **b)** $0{,}004\,32 = 4 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 10^{-5}$

B **1.156** Schreibe als Zehnerpotenz an.

a) 0,001 **b)** $\frac{1}{10\,000}$ **c)** $\frac{1}{0{,}01}$

Lösung:

a) $0{,}001 = 10^{-3}$ **b)** $\frac{1}{10\,000} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4}$ **c)** $\frac{1}{0{,}01} = \frac{1}{10^{-2}} = 10^2$

B **1.157** Gib in Dezimaldarstellung an.

a) 10^{-1} **b)** $\frac{1}{10^3}$ **c)** $\frac{1}{10^{-4}}$

Lösung:

a) $10^{-1} = 0{,}1$ **b)** $\frac{1}{10^3} = \frac{1}{1\,000} = 0{,}001$ **c)** $\frac{1}{10^{-4}} = 10^4 = 10\,000$

B **1.158** Schreibe mit positivem Exponenten an und berechne gegebenenfalls.

a) $(-2)^{-3}$ **b)** $0{,}25^{-1}$ **c)** $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2}$

Lösung:

a) $(-2)^{-3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$ **b)** $0{,}25^{-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 4$ **c)** $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(-\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$

B **1.159** Schreibe die Zahl als Summe von Zehnerpotenzen an.

a) 678,5 **b)** 0,032 4 **c)** 1 002,05 **d)** 0,070 809 **e)** 40 507 000,009

B **1.160** Schreibe als Zehnerpotenz an.

a) 1 000 **c)** 100 000 000 **e)** 0,000 001 **g)** 0,000 000 01
b) 1 000 000 **d)** 0,01 **f)** 0,000 1 **h)** 0,000 000 000 1

ABCD **1.161** Hier hat sich jemand einen Scherz erlaubt. Stelle die Zahlenangaben im folgenden Text so dar, wie es normalerweise üblich ist. Welche der Zahlenwerte können unmöglich stimmen? Begründe deine Antworten.

„Maximilian ist heute um $\frac{1}{0{,}1}$ Minuten nach sieben Uhr aufgestanden. Am Weg in die $0{,}25^{-1}$ km entfernte Schule kauft er noch etwas zu essen ein. Er hat in seiner Geldbörse $\frac{1}{10^{-1}}$ € in Scheinen und drei $0{,}05^{-1}$-€-Münzen. Im Geschäft kauft er $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ Kornweckerl mit $\frac{1}{0{,}01}$ dag Schinken. Anschließend fährt er 2^{-2} Stunden mit dem Bus. Von der Station bis zum Schultor sind es noch $\frac{1}{10^5}$ mm zu Fuß. In der 10^0. Stunde hat Maximilian Mathematik, danach $\frac{1}{0{,}01}$ Minuten Turnen. Der Unterricht endet um $0{,}2^{-2}$ Minuten nach 14:00 Uhr."

B **1.162** Gib zuerst als Bruch mit positivem Exponenten an und berechne anschließend.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ **b)** $\left(-\frac{4}{3}\right)^{-2}$ **c)** $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ **d)** $(-3)^{-2}$ **e)** $\left(-\frac{1}{10}\right)^{-3}$ **f)** $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$

BC **1.163** Markiere in jedem Kästchen jene Werte, die gleich groß sind.

Kästchen 1: $0{,}001$ $\frac{1}{10^{-2}}$ $\frac{1}{0{,}000\,1}$ $\frac{1}{1\,000}$ $1\,000$ $\frac{1}{10^3}$

Kästchen 2: $0{,}04$ $\left(\frac{5}{2}\right)^{-1}$ 4^{-1} $\left(\frac{4}{10}\right)^{-1}$ 2^{-2} $\left(-\frac{10}{2}\right)^2$

1.164 Gib als Zehnerpotenz an. B

a) $\frac{1}{100}$ **b)** $\frac{1}{1\,000\,000}$ **c)** $\frac{1}{0{,}001}$ **d)** $\frac{1}{100\,000}$ **e)** $\frac{1}{0{,}1}$ **f)** $\frac{1}{0{,}000\,001}$

Aufgaben 1.165 – 1.168: Gib die Ergebnisse als Zehnerpotenzen und in Dezimaldarstellung an.

1.165 **a)** $\frac{1}{10^{3}}$ **b)** $\frac{1}{10^{-4}}$ **c)** $\frac{1}{10^{5}}$ **d)** $\frac{1}{10^{-6}}$ **e)** $\frac{1}{10^{9}}$ **f)** $\frac{1}{10^{-7}}$ B

1.166 **a)** $\frac{10^{5}}{10^{-3}}$ **b)** $\frac{10}{10^{-6}}$ **c)** $\frac{10^{-4}}{10^{-7}}$ **d)** $\frac{10^{-5}}{10^{3}}$ **e)** $\frac{10^{0}}{10^{-3}}$ **f)** $\frac{10^{0}}{10}$ B

1.167 **a)** $\frac{10^{2}}{10^{-3}\cdot 10^{5}}$ **b)** $\frac{10^{-2}}{10^{3}\cdot 10^{5}}$ **c)** $\frac{10^{-2}}{10^{-3}\cdot 10^{5}}$ **d)** $\frac{10^{2}}{10^{-3}\cdot 10^{-5}}$ **e)** $\frac{10^{-2}}{10^{-3}\cdot 10^{-5}}$ B

1.168 **a)** $\frac{10^{2}\cdot 10^{0}}{10^{-4}\cdot 10^{3}}$ **b)** $\frac{10^{3}\cdot 10^{-5}}{10^{-3}\cdot 10^{2}}$ **c)** $\frac{10^{-2}\cdot 10^{-3}}{10^{-4}\cdot 10^{7}}$ **d)** $\frac{10^{-5}\cdot 10^{2}}{10^{4}\cdot 10^{-7}}$ B

Weitere Aufgaben im Zusatzheft

1.6.2 Gleitkommadarstellungen

Sehr große oder sehr kleine Zahlen werden oft nicht in „normaler“ Dezimaldarstellung angegeben, weil diese Schreibweise sehr unübersichtlich wäre. Beim Arbeiten mit einem Taschenrechner ist das durch die begrenzte Größe der Anzeige oft auch gar nicht mehr möglich.

1.169 Wie viele gleiche Münzen bzw. Scheine ergeben einen Geldbetrag von 3 200,00 €? AB

1) 100-€-Scheine **2)** 10-€-Scheine **3)** 1-€-Münzen **4)** 10-Cent-Münzen
5) 1-Cent-Münzen

Der Wert eines Produkts bleibt unverändert, wenn ein Faktor durch eine Zahl ($\neq 0$) dividiert und der andere mit derselben Zahl multipliziert wird, zum Beispiel $24 \cdot 100 = 240 \cdot 10$

1.170 Ergänze den fehlenden Faktor. B

a) $4{,}8 \cdot 1\,000 = 48 \cdot ?$ **c)** $62 \cdot 1\,000 = ? \cdot 100$ **e)** $5{,}3 \cdot 100 = 530 \cdot ?$
b) $0{,}3 \cdot 10 = 0{,}03 \cdot ?$ **d)** $81 \cdot 0{,}01 = ? \cdot 0{,}1$ **f)** $29 \cdot 1 = ? \cdot 100$

Wird eine Zahl mit einer Zehnerpotenz multipliziert, so entspricht das einer Kommaverschiebung.

ZB:
$7{,}891 \cdot 10^{2} = 789{,}1$
$7{,}891 \cdot 10^{1} = 78{,}91$
$7{,}891 \cdot 10^{0} = 7{,}891$
$7{,}891 \cdot 10^{-1} = 0{,}7891$
$7{,}891 \cdot 10^{-2} = 0{,}07891$
$7{,}891 \cdot 10^{-3} = 0{,}007891$

$\cdot\, 10^{2}$ entspricht der Multiplikation mit 100. Das Komma muss so um **zwei Stellen** verschoben werden, dass die **Zahl größer wird**, also nach links.
$\cdot\, 10^{-3}$ entspricht der Multiplikation mit 0,001 bzw. der Division durch 1 000. Das Komma muss so um **drei Stellen** verschoben werden, dass die **Zahl kleiner wird**, also nach rechts.

Umgekehrt kann man jede Zahl auf verschiedene Arten als Produkt mit einer Zehnerpotenz darstellen:

ZB: $32\,456 = 3\,245{,}6 \cdot 10^{1} = 324{,}56 \cdot 10^{2} = 32{,}456 \cdot 10^{3} = 3{,}245\,6 \cdot 10^{4} = 0{,}324\,56 \cdot 10^{5} = \ldots$

Jedes der Produkte hat dabei den gleichen Wert wie die ursprüngliche Zahl. Da das Komma an verschiedene Positionen „geschoben“ werden kann, nennt man diese Schreibweise **Gleitkommaformat** oder **Gleitkommadarstellung** (englisch: floating point notation).

Der Faktor vor der Zehnerpotenz wird **Mantisse** genannt.

Darstellung im Gleitkommaformat: Zahl = Mantisse · Zehnerpotenz

Zahlen und Mengen

BCD **1.171** Ergänze den fehlenden Exponenten und formuliere deine Überlegungen.

a) $245{,}7 = 2{,}457 \cdot 10^{?}$ **b)** $0{,}005\,68 = 568 \cdot 10^{-?}$

Lösung:	Beschreibung:
a) $245{,}7 = 2{,}457 \cdot 10^{2}$	Das Komma wurde so um zwei Stellen verschoben, dass die Mantisse kleiner ist als die gegebene Zahl. Sie muss daher mit 10^2 multipliziert werden. Kontrolle: In der Mantisse steht die Ziffer 2 an der Einerstelle und wird mit hundert multipliziert. In der ursprünglichen Zahl steht die Ziffer 2 an der Hunderterstelle.
b) $0{,}005\,68 = 568 \cdot 10^{-5}$	Bei einer ganzen Zahl steht das Komma (nicht sichtbar) hinter der Einerstelle. Das Komma ist um 5 Stellen so verschoben worden, dass die Mantisse größer ist als die ursprüngliche Zahl. Sie muss daher mit 10^{-5} multipliziert werden.

Merkhilfen:

- Der Exponent der Zehnerpotenz gibt an, um wie viele Stellen das Komma verschoben werden muss, wenn man die Zahl ohne Zehnerpotenzen schreiben will.
- Der Wert der dargestellten Zahl muss unverändert bleiben, daher:
  Mantisse wird größer ↔ Exponent wird kleiner
  Mantisse wird kleiner ↔ Exponent wird größer

In der Praxis werden folgende Darstellungen verwendet:

- **Normiertes Gleitkommaformat**
  ZB: $0{,}049\,3 = 4{,}93 \cdot 10^{-2}$ Vor dem Komma ist nur die Einerstelle mit einer der Ziffern 1, 2 ... 9 besetzt. Es gilt daher: $1 \leq \text{Mantisse} < 10$
  Dieses Format wird von den meisten Taschenrechnern benutzt, wenn die darzustellende Zahl zu lang für die Anzeige ist oder „wissenschaftliche Schreibweise“ (scientific notation) als Ausgabeformat eingestellt wird. Im englischsprachigen Raum ist auch die Darstellung $0{,}493 \cdot 10^{-1}$ üblich. Dabei ist die erste von null verschiedene Stelle die Zehntelstelle.

- Darstellung mit einem **durch 3 teilbaren Exponenten**
  ZB: $0{,}000\,023\,5 = 23{,}5 \cdot 10^{-6}$
  Für technische Anwendungen ist es oft vorteilhaft, wenn der **Exponent** der Zehnerpotenz **durch 3 teilbar** ist. Das erleichtert die Umrechnung bei der Verwendung von Einheiten.
  Das Komma wird dabei so gesetzt, dass gilt: $1 \leq \text{Mantisse} < 1\,000$.
  Dieses Format wird am Taschenrechner meist **Engineering Format** genannt.

- Darstellung als **ganze Zahl · Zehnerpotenz**
  ZB: $0{,}004\,8 = 48 \cdot 10^{-4}$
  Viele Rechnungen können so leicht im Kopf gelöst werden.

Eingabe auf dem Taschenrechner:
Auf vielen Taschenrechnern kann man die Zehnerpotenzen bei Gleitkommadarstellungen mithilfe von **EE** eingeben.

EE x^{-1}

SCI/ENG DRG

TE

ZB: $4{,}5 \cdot 10^3$ ... 4.5EE3

Meist kann man zwischen verschiedenen Anzeigearten wählen.

1.172 Stelle in normiertem Gleitkommaformat, im Engineering Format bzw. in der Form ganze Zahl · Zehnerpotenz dar. **B**

a) 23 500 000 **b)** 0,000 000 89

Lösung:

a) $23\,500\,000 = 2{,}35 \cdot 10^7 = 23{,}5 \cdot 10^6 = 235 \cdot 10^5$

b) $0{,}000\,000\,89 = 8{,}9 \cdot 10^{-7} = 890 \cdot 10^{-9} = 89 \cdot 10^{-8}$

1.173 Schreibe mithilfe von ganzen Zahlen und Zehnerpotenzen an und rechne im Kopf. **B**

a) $-3\,200 \cdot 0{,}004$ **b)** $0{,}048 : 0{,}000\,12$

Lösung:

a) $-3\,200 \cdot 0{,}004 = -32 \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = -128 \cdot 10^{-1} = -12{,}8$

b) $0{,}048 : 0{,}000\,12 = (48 \cdot 10^{-3}) : (12 \cdot 10^{-5}) = (48 : 12) \cdot (10^{-3} : 10^{-5}) = 4 \cdot 10^2 = 400$

Aufgaben 1.174 – 1.175: Gib das Ergebnis jeweils in normiertem Gleitkommaformat an.

1.174 $\frac{0{,}3^2 \cdot 240}{0{,}018 \cdot 0{,}5}$ **B**

Lösung:

$$\frac{0{,}3^2 \cdot 240}{0{,}018 \cdot 0{,}5} = \frac{(3 \cdot 10^{-1})^2 \cdot 24 \cdot 10^1}{18 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-1}} = \frac{\overset{1}{\cancel{9}} \cdot 10^{-2} \cdot \overset{12}{\cancel{24}} \cdot 10^1}{\underset{1\,\cancel{2}}{\cancel{18}} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = \frac{12 \cdot 10^{-1}}{5 \cdot 10^{-4}} = \frac{12}{5} \cdot 10^{-1-(-4)} = \frac{12}{5} \cdot 10^3 = 2{,}4 \cdot 10^3 = 2\,400$$

1.175 $3{,}8 \cdot 10^7 - 4{,}5 \cdot 10^6 =$ **B**

Lösung:

$3{,}8 \cdot 10^7 - 4{,}5 \cdot 10^6 = 3{,}8 \cdot 10^7 - 0{,}45 \cdot 10^7 = 3{,}35 \cdot 10^7$

- Beachte: Addieren und Subtrahieren ist nur bei gleichen Zehnerpotenzen möglich.

1.176 Schreibe ohne Zehnerpotenzen an. **B**

a) $2{,}1 \cdot 10^3$ **c)** $5{,}6 \cdot 10^{-2}$ **e)** $-4{,}6 \cdot 10^5$ **g)** $9{,}8 \cdot 10^{-3}$

b) $357{,}5 \cdot 10^{-5}$ **d)** $-0{,}009\,7 \cdot 10^2$ **f)** $56\,500 \cdot 10^{-4}$ **h)** $0{,}000\,002 \cdot 10^7$

1.177 Schreibe in normiertem Gleitkommaformat an. **B**

a) $-3\,750$ **b)** $0{,}044$ **c)** $-678\,000$ **d)** $0{,}000\,071$

1.178 Setze den fehlenden Exponenten ein. **B**

a) $456{,}37 = 4{,}563\,7 \cdot 10^?$ **c)** $788{,}23 \cdot 10^3 = 7{,}882\,3 \cdot 10^?$

b) $0{,}012\,049 = 1{,}204\,9 \cdot 10^?$ **d)** $-0{,}066\,4 \cdot 10^6 = -6{,}64 \cdot 10^?$

1.179 Ergänze das Komma richtig. **B**

a) $88{,}9 = 0\,0\,8\,8\,9\,0\,0 \cdot 10^{-2}$ **b)** $35{,}27 \cdot 10^{-4} = 0\,0\,0\,3\,5\,2\,7\,0\,0$

1.180 Richtig oder falsch? Überlege, wo das Komma falsch gesetzt wurde und korrigiere die Fehler. **BC**

$34{,}12 \cdot 10^3 = 0{,}341\,2$ $4{,}108 \cdot 10^2 = 410{,}8$ $7\,520 \cdot 10^{-4} = 0{,}752$

$0{,}003\,6 \cdot 10^2 = 0{,}36$ $0{,}878 \cdot 10^{-2} = 87{,}8$ $0{,}054 \cdot 10^{-3} = 0{,}000\,054$

1.181 Die Multiplikationen bzw. Divisionen in den Kästchen liefern mit einer Ausnahme das gleiche Ergebnis. Welches Kästchen ergibt einen anderen Wert? Um welchen Faktor unterscheidet sich dieses Ergebnis von allen anderen? **BC**

$x \cdot 10^{-2}$	$x \cdot \frac{1}{10^2}$
$\frac{x}{10^{-2}}$	$x \cdot 0{,}01$

1.182 Schreibe die gegebene Division als Mulitplikation mit **B**

1) einer dekadischen Einheit, **2)** mit einer Zehnerpotenz an.

a) $\frac{x}{100}$ **b)** $\frac{x}{0{,}1}$ **c)** $\frac{x}{10^5}$

1.183 Schreibe im Engineering Format an. **B**

a) $-65\,120$ **b)** $7{,}8 \cdot 10^4$ **c)** $0{,}004\,77$ **d)** $2{,}1 \cdot 10^{-4}$

B **1.184** Schreibe ohne Zehnerpotenz und in normiertem Gleitkommaformat an.
a) 34 Millionen **b)** 5,6 Millionen **c)** 8,5 Milliarden

B **1.185** Schreibe das Ergebnis ohne Zehnerpotenz an.
a) $(6 \cdot 10^{-3}) \cdot (2 \cdot 10^{5})$ **b)** $(12 \cdot 10^{-3}) : (-4 \cdot 10^{2})$ **c)** $(1{,}5 \cdot 10^{-2})^2$

BCD **1.186** Finde den Fehler und erkläre, was falsch gemacht wurde.
a) $0{,}02^2 = (2 \cdot 10^{-2})^2 = 4 \cdot 10^4 = 40\,000$
b) $0{,}036 : 0{,}12 = 36 \cdot 10^{-3} : 12 \cdot 10^{-2} = 36 : 12 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-2} = 3 \cdot 10^{-5} = 0{,}000\,03$

Aufgabe. 1.187 – 1.192: Schreibe mithilfe von ganzen Zahlen und Zehnerpotenzen an. Berechne dann die Ergebnisse und gib sie ohne Verwendung von Zehnerpotenzen an.

B **1.187** **a)** $0{,}002 \cdot 45\,000$ **b)** $-0{,}05 \cdot 60\,000$ **c)** $-12\,000\,000 \cdot (-0{,}000\,5)$

B **1.188** **a)** $40 : 0{,}008$ **b)** $-0{,}027 : 90\,000$ **c)** $0{,}003\,6 : (-0{,}000\,09)$

B **1.189** **a)** $0{,}02^2$ **b)** $(-0{,}05)^2$ **c)** $(-0{,}003)^3$ **d)** $0{,}002^3$ **e)** $0{,}12^2$ **f)** $0{,}2^4$

B **1.190** **a)** $\frac{0{,}03^2 \cdot 4\,000}{160 \cdot 0{,}09}$ **b)** $\frac{0{,}2^2 \cdot 6\,000}{120 \cdot 0{,}008}$ **c)** $\frac{0{,}9^2 \cdot 400}{160 \cdot 0{,}000\,3}$

B **1.191** **a)** $\frac{0{,}04^2 \cdot 250}{0{,}5^3 \cdot 800}$ **b)** $\frac{0{,}3^3 \cdot 0{,}6}{900^2 \cdot 0{,}04}$ **c)** $\frac{3{,}6 \cdot 400^2}{0{,}9^2 \cdot 250}$

B **1.192** **a)** $\frac{(0{,}052 : 0{,}002\,6)^2 - 0{,}22 \cdot 10^3}{(0{,}02)^3 \cdot 4{,}5 \cdot 10^3}$ **b)** $\frac{(0{,}69 : 0{,}023)^2 - 1{,}5 \cdot 10^2}{(0{,}04)^2 \cdot 2{,}5 \cdot 10^3}$ **c)** $\frac{(0{,}03)^2 \cdot 2{,}5 \cdot 10^3}{7{,}5 \cdot 10^2 - (0{,}69 : 0{,}023)^2}$

B **1.193** Gib das Ergebnis in normiertem Gleitkommaformat an.
a) $3{,}5 \cdot 10^3 - 4{,}2 \cdot 10^2$ **b)** $5{,}6 \cdot 10^{-5} + 9{,}1 \cdot 10^{-6}$ **c)** $0{,}005\,4 - 4{,}6 \cdot 10^{-5}$

BCD **1.194** Berechne mit dem Taschenrechner und im Kopf. Erkläre das auftretende Problem mit eigenen Worten und gib an, worauf man achten muss.
TE
1) $7{,}3 \cdot 10^3 + 0{,}6 \cdot 10^4 - 7{,}3 \cdot 10^3$ **2)** $7{,}3 \cdot 10^{38} + 0{,}1 - 7{,}3 \cdot 10^{38}$

1.6.3 Einheiten und Einheitenvorsilben

Messergebnisse in Physik und Technik werden (physikalische) Größen genannt. Jede **Größe** ist ein **Produkt aus** einer **Maßzahl** (Zahlenwert) **und** einer **Einheit**. Im internationalen **Einheitensystem** (SI) stehen für viele Zehnerpotenzen **Abkürzungen** zur Verfügung.

ZB: 7,5 m bedeutet 7,5 · 1 m
(7,5 ↑ Maßzahl, m ↑ Einheit)

$5\,000\text{ m} = 5 \cdot 10^3\text{ m} = 5\text{ km}$

Die folgende Liste stellt eine Auswahl der verwendeten Vorsilben dar, es gibt noch weitere Abkürzungen für größere und kleinere Zehnerpotenzen.

Zehnerpotenz	Vorsilbe	Abkürzung
10^{12}	Tera	T
10^9	Giga	G
10^6	Mega	M
10^3	Kilo	k
10^2	Hekto	h
10^1	Deka	da

Zehnerpotenz	Vorsilbe	Abkürzung
10^{-1}	Dezi	d
10^{-2}	Centi	c
10^{-3}	Milli	m
10^{-6}	Mikro	µ
10^{-9}	Nano	n
10^{-12}	Piko	p

ZB: $3\text{ MW} = 3 \cdot 10^6\text{ W} = 3\,000\,000\text{ W}$ $7\text{ cm} = 7 \cdot 10^{-2}\text{ m} = 0{,}07\text{ m}$

Zur Erinnerung:

Längenmaße	1 km	.	.	1 m	1 dm	1 cm	1 mm	.	.	1 µm	.	.	1 nm

ZB: 1 m = 10 dm, 1 mm = 0,1 cm, 1 mm = 1 000 µm

Flächenmaße	1 km^2	.	1 ha	.	1 a	.	1 m^2	.	1 dm^2	.	1 cm^2	.	1 mm^2

ZB: 1 m^2 = 100 dm^2, 1 cm^2 = 0,01 dm^2, 1 cm^2 = 0,000 1 m^2

Beachte: Werden Einheitenvorsilben durch Zehnerpotenzen ersetzt, muss beim Potenzieren die jeweilige Zehnerpotenz ebenfalls potenziert werden.

ZB: $1\text{ cm}^2 = 1 \cdot (10^{-2}\text{ m})^2 = 1 \cdot 10^{-4}\text{ m}^2 = 0{,}000\,1\text{ m}^2$

Volumsmaße bzw.	1 m^3	.	.	1 dm^3	.		.	1 cm^3	.	.	1 mm^3
Hohlmaße	.	1 hℓ	.	1 ℓ	1 dℓ	1 cℓ	1 mℓ		.	.	1 µℓ

ZB: 1 hℓ = 100 ℓ, 1 cm^3 = 1 000 mm^3, 1 mℓ = 1 cm^3

1.195 Wandle in die angegebene Einheit um und gib das Ergebnis in normiertem Gleitkommaformat an. **B**

a) 0,023 GW = ... W **b)** 456 750 mℓ = ... hℓ

Lösung:

a) $0{,}023\text{ GW} = 0{,}023 \cdot 10^9\text{ W} = 2{,}3 \cdot 10^{-2} \cdot 10^9\text{ W} = 2{,}3 \cdot 10^7\text{ W}$

1 GW = 10^9 W

b) $45\,670\text{ m}\ell = 45\,670 \cdot 10^{-5}\text{ h}\ell = 4{,}567 \cdot 10^4 \cdot 10^{-5}\text{ h}\ell = 4{,}567 \cdot 10^{-1}\text{ h}\ell$

1 mℓ = 10^{-5} hℓ

1.196 Setze den richtigen Exponenten ein. **B**

a) 30 mm = $3 \cdot 10^?$ m **b)** 420 kW = $4{,}2 \cdot 10^?$ W **c)** 0,2 MW = $2 \cdot 10^?$ W **d)** 0,05 kΩ = $5 \cdot 10^?$ Ω **e)** 35 ms = $3{,}5 \cdot 10^?$ s **f)** 27 µF = $2{,}7 \cdot 10^?$ F

1.197 Setze die richtige Vorsilbe ein. **B**

a) 1 785 m = 1,785 ... m **b)** 0,355 V = 355 ... V **c)** 5,73 ms = 5 730 ... s **d)** $72{,}5 \cdot 10^4$ W = 725 ... W **e)** 1 400 pF = 1,4 ... F **f)** 1 870 Ω = 1,87 ... Ω

1.198 Setze das Komma an der richtigen Stelle ein. **B**

a) 2,5 J = 0 0 0 2 5 0 0 0 kJ **b)** 0,006 7 V = 0 0 0 6 7 0 0 0 mV **c)** 0,089 kW = 0 0 0 8 9 0 0 0 W **d)** 3 450 ℓ = 0 0 0 3 4 5 0 0 0 m^3

1.199 Gib die angegebenen Größen ohne Zehnerpotenzen in einer sinnvollen Einheit an. Begründe, welche der Aussagen so nicht richtig sein können. Ändere dann die angegebene Einheit der Größe so ab, dass eine sinnvolle Aussage entsteht. **BCD**

1) Peters Schwester ist $1{,}72 \cdot 10^{-3}$ m groß, sein kleiner Bruder nur $0{,}154 \cdot 10^4$ cm.
2) In die neue Badewanne passen $0{,}27 \cdot 10^6$ mℓ Wasser.
3) Tinas Motorrad hat einen Hubraum von $7{,}5 \cdot 10^5$ mm^3.
4) Das Reihenhaus hat eine Wohnfläche von $0{,}097 \cdot 10^7$ km^2.
5) Der neue Kleinwagen kann mit einer Tankfüllung $9{,}6 \cdot 10^2$ m weit fahren.

Zahlen und Mengen

Aufgaben 1.200 – 1.203: Gib die Größe jeweils in der angegebenen Einheit **1)** ohne Zehnerpotenzen, **2)** in normiertem Gleitkommaformat und **3)** im Engineering Format an.

B **1.200** **a)** 0,045 km = ... m **b)** 1,7 mm = ... m **c)** 2,56 m = ... km **d)** 80 nm = ... mm **e)** 65 µm = ... m **f)** 0,04 m = ... mm

B **1.201** **a)** 650 cm^2 = ... m^2 **b)** 0,002 mm^2 = ... cm^2 **c)** 0,05 ha = ... m^2 **d)** 0,045 cm^2 = ... mm^2 **e)** 5,3 cm^2 = ... m^2 **f)** 0,046 m^2 = ... mm^2

B **1.202** **a)** 3,5 hℓ = ... m^3 **b)** 19,3 m^3 = ... hℓ **c)** 48 cm^3 = ... ℓ **d)** 5,7 dℓ = ... cm^3 **e)** 0,5 mℓ = ... mm^3 **f)** 0,043 mm^3 = ... dℓ

B **1.203** **a)** 0,5 MW = ... kW **b)** 250 V = ... kV **c)** 0,45 mW = ... W **d)** 15 mV = ... V **e)** 0,05 W = ... mW **f)** 0,7 V = ... mV

B **1.204** Setze die passende Zahl in normiertem Gleitkommaformat ein.
a) 2,5 cm = ... mm = ... dm = ... m
b) $4{,}05 \cdot 10^{-3}$ mm = ... cm = ... µm = ... nm
c) 24,2 V = ... mV = ... kV
d) $0{,}005\,7 \cdot 10^4$ kV = ... V = ... MV
e) 3,7 MΩ = ... kΩ = ... Ω
f) $45{,}7 \cdot 10^{-5}$ Ω = ... mΩ = ... µΩ

B **1.205** Rechne in die angegebene Einheit um.

$45\,\frac{\ell}{\text{min}} = \dots \frac{\text{h}\ell}{\text{h}}$

Lösung:

$45\,\frac{\ell}{\text{min}} = \frac{45\,\ell}{1\,\text{min}} = \frac{45 \cdot 10^{-2}\,\text{h}\ell}{\frac{1}{60}\,\text{h}} = 45 \cdot 10^{-2} \cdot 60\,\frac{\text{h}\ell}{\text{h}} = 2\,700 \cdot 10^{-2}\,\frac{\text{h}\ell}{\text{h}} = 27\,\frac{\text{h}\ell}{\text{h}}$

Aufgaben 1.206 – 1.207: Rechne jeweils in die angegebene Einheit um.

B **1.206** **a)** $72\,\frac{\text{km}}{\text{min}} = \dots \frac{\text{m}}{\text{s}}$ **b)** $180\,\frac{\text{h}\ell}{\text{h}} = \dots \frac{\ell}{\text{min}}$ **c)** $4\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \dots \frac{\text{km}}{\text{h}}$ **d)** $25\,\frac{\ell}{\text{min}} = \dots \frac{\text{h}\ell}{\text{h}}$ **e)** $17\,\frac{\text{m}}{\text{min}} = \dots \frac{\text{km}}{\text{h}}$ **f)** $100\,\frac{\ell}{\text{s}} = \dots \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$

B **1.207** **a)** $50\,\frac{\text{g}}{\text{dm}^3} = \dots \frac{\text{t}}{\text{m}^3}$ **b)** $0{,}3\,\frac{\text{t}}{\text{h}\ell} = \dots \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ **c)** $80\,\frac{\text{g}}{\text{m}\ell} = \dots \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Aufgaben 1.208 – 1.209: Gib die Ergebnisse in jeder in der Angabe vorkommenden Einheit **1)** ohne Verwendung von Zehnerpotenzen und **2)** in normiertem Gleitkommaformat an.

B **1.208** **a)** 1,2 km – 850 m **b)** 0,9 t – 320 kg **c)** 0,5 m – 12 mm

B **1.209** **a)** $\frac{8\,\text{cm} \cdot 15\,\text{mm}^2}{0{,}3\,\text{dm}}$ **b)** $\frac{(1{,}2\,\text{cm})^2 \cdot 0{,}3\,\text{m}}{27\,\text{dm}}$ **c)** $\frac{(0{,}4\,\text{m} \cdot 3\,\text{cm})^2}{0{,}6\,\text{m}}$

AB **1.210** Die Maßeinheit für eine Datenmenge von 8 Bit ist das Byte (B). Für größere Kapazitätsangaben wie zum Beispiel 2^{10} = 1 024 werden als Abkürzungen die SI-Einheitenvorsilben verwendet, also 1 Kilobyte = 1 024 Byte. Da mit zunehmender Speicherkapazität der dabei entstehende Fehler nicht mehr vernachlässigbar ist, werden nun oft folgende Einheitenvorsilben verwendet: Kibi = 2^{10}, Mebi = 2^{20}, Gibi = 2^{30}, Tebi = 2^{40}.
Wie groß ist jeweils der prozentuelle Fehler, wenn man die dezimalen Einheitenvorsilben k, M, G und T anstelle der korrekten Zweierpotenzen verwendet?

BCD **1.211** Was stimmt hier nicht? Begründe deine Antwort.
a) 0,5 m^2 = $(50\,cm)^2$ = 2 500 cm^2 = 0,25 m^2 **b)** 4 cm^2 = $4 \cdot 10^{-2}$ m^2 = 0,04 m^2 = 400 cm^2

ABC **1.212** Die Luxuskabine eines neuen Kreuzfahrtschiffs ist rund 200 m^2 groß. In der aus dem Englischen übersetzten Reportage werden 600 m^2 angegeben. Welchen Fehler könnte der Journalist hier gemacht haben?

1.6.4 Runden von Zahlen, Zahlen beschränkter Genauigkeit

Im Alltag ist es oft wichtig, das ungefähre Ergebnis einer Rechnung mit geringem Aufwand im Kopf ermitteln zu können. Auch wenn man einen Taschenrechner verwendet, braucht man eine Vorstellung von der Größenordnung des Ergebnisses, damit man Eingabefehler bemerken kann.
In der Technik arbeitet man oft mit Zahlen, die nur mit beschränkter Genauigkeit gegeben sind oder gebraucht werden. Messungen etwa können immer nur mit beschränkter Genauigkeit vorgenommen werden. Daher haben auch die aus Messwerten berechneten Ergebnisse dann eine eingeschränkte Genauigkeit.
Für das **Runden von Zahlen** auf eine bestimmte dekadische Einheit gilt folgende Regel:
Es wird nur die Stelle unmittelbar rechts von dieser Einheit beachtet. Ist diese Ziffer 0, 1, 2, 3 oder 4 wird abgerundet, andernfalls aufgerundet.
Runden findet vor allem bei Messwerten Anwendung. In vielen Fragestellungen, bei denen nur ganzzahlige Lösungen sinnvoll sind, ist aber NICHT der gerundete Wert gesucht.

1.213 ***1)*** Eine Tafel Schokolade kostet im Supermarkt 0,90 €. Thomas hat nur mehr 2,52 €. Er rechnet: $2{,}52 : 0{,}9 = 2{,}8 \approx 3$ und nimmt 3 Tafeln. Was passiert bei der Kassa? — ACD
2) Ein Kübel Dispersionsfarbe reicht zum Streichen von 15 m^2 Wand. Wie viele Kübel sollte man für 32 m^2 Wand besorgen? Begründe deine Antwort.
3) Der Klassenkassier hat berechnet, dass der Bus für den Ausflug pro Kopf 8,742 € kostet. Welchen Betrag sollte er pro Kopf einsammeln? Begründe deine Antwort.

1.214 ***a)*** Runde 12,42; 23,78; 46,51; 17,349; 33,999 auf Zehntel. — B
b) Runde 234 967 auf Zehner, Hunderter bzw. Tausender.
Lösung:
a) 12,42 ≈ 12,4; 23,78 ≈ 23,8; 46,51 ≈ 46,5; 17,349 ≈ 17,3; 33,999 ≈ 34,0
b) Zehner: 234 967 ≈ 234 970, Hunderter: 234 967 ≈ 235 000, Tausender: 234 967 ≈ 235 000

Taschenrechner können im Allgemeinen auch so eingestellt werden, dass die angezeigte Zahl auf eine fixe Anzahl von Dezimalstellen gerundet ist. FIX TE

Geltende (signifikante) Ziffern

In der Zahl 25 700 sind die beiden Nullen am Ende nur zur Stellenwertangabe notwendig. Gibt man die Zahl in normiertem Gleitkommaformat an, so benötigt man – abgesehen von der Zehnerpotenz – nur drei Ziffern: $2{,}57 \cdot 10^4$. Man sagt, die Zahl 25 700 hat 3 geltende Ziffern.
ZB: 200 560 hat 5 geltende Ziffern; 0,000 12 hat 2 geltende Ziffern
Beim Runden einer Zahl wird die Anzahl der geltenden Ziffern im Allgemeinen kleiner.
ZB: 65 782 ... 5 geltende Ziffern
Runden auf Zehner: 65 780 ... 4 geltende Ziffern
Runden auf Hunderter: 65 800 ... 3 geltende Ziffern
Wird mit Zahlen begrenzter Genauigkeit gerechnet, so werden Ergebnisse oft auf 3 (eventuell 4) geltende Ziffern gerundet, wenn nicht aus dem Zusammenhang offensichtlich etwas anderes erforderlich ist. Zwischenergebnisse werden jedoch nie gerundet.

1.215 Runde auf ***1)*** Zehntel, ***2)*** Hundertstel, ***3)*** Tausendstel. — B
a) 2,345 49 ***b)*** 0,909 99 ***c)*** 1,091 104 ***d)*** 0,099 9 ***e)*** 0,999 9

1.216 Runde auf ***1)*** 2 geltende Ziffern, ***2)*** 3 geltende Ziffern, ***3)*** 4 geltende Ziffern. — B
a) 12 345 ***b)*** 367 890 ***c)*** 4,677 58 ***d)*** 0,003 721 6 ***e)*** 0,987 699

1.217 Gib die Anzahl der signifikanten Ziffern an. — B
a) 23 000 ***b)*** 0,005 06 ***c)*** 41 400 ***d)*** 0,304 000 ***e)*** 3,003

1.6.5 Überschlagsrechnung

ZB: Ein Auto verbraucht auf 100 km rund 5,9 ℓ Dieseltreibstoff. Kann man ohne zu tanken von Wien nach Venedig fahren (rund 630 km), wenn der Tank 45 ℓ fasst?
Überschlagsrechnung: $5{,}9 \cdot 6{,}3 \approx 6 \cdot 6 = 36$ ℓ $\Rightarrow$ Ein voller Tank reicht für diese Fahrt.

Um das Ergebnis einer Rechnung näherungsweise zu ermitteln, verwendet man eine **Überschlagsrechnung**. Im Allgemeinen **rundet** man auf **eine geltende Ziffer** und stellt gegebenenfalls im **Gleitkommaformat** dar.

BC **1.218** Berechne überschlagsweise $11{,}6 \cdot 3{,}5$ bzw. $11{,}6 : 3{,}5$. Runde dabei die Zahl 3,5 jeweils einmal auf 3 und einmal 4 und vergleiche mit den genauen Ergebnissen. Was fällt dir auf?

Bei Multiplikationen wird meist so gerundet, dass ein Faktor auf-, der andere abgerundet wird („gegensinnig runden“). Bei Divisionen werden meist Dividend und Divisor beide auf- oder beide abgerundet („gleichsinnig runden“).

B **1.219** Berechne überschlagsweise.

a) $48{,}7 \cdot 1{,}99$ **b)** $43\,500 : 75{,}9$ **c)** $78\,564\,000 \cdot 0{,}000\,032$

Lösung:

a) $48{,}7 \cdot 1{,}99 \approx 50 \cdot 2 = 100$
- Runde so, dass du die Rechnung im Kopf schaffst.

b) $43\,500 : 75{,}9 \approx 42\,000 : 70 = 600$
- Wähle Zahlen, für die die Division ohne Rest möglich ist.

c) $78\,564\,000 \cdot 0{,}000\,032 \approx 8 \cdot 10^7 \cdot 3 \cdot 10^{-5} = 24 \cdot 10^2 = 2\,400$
- Verwende Zehnerpotenzen, um mit sehr großen und sehr kleinen Zahlen leichter arbeiten zu können.

In manchen Fällen kann auch für die überschlagsweise Berechnung eine höhere Genauigkeit erforderlich sein, zum Beispiel wenn im Nenner eines Bruchs kleine Differenzen auftreten. Wähle dann eine sinnvolle höhere Genauigkeit.

Überschlagsweises Wurzelziehen

Die Wurzeln aus Quadratzahlen können im Kopf berechnet werden. Auch die Wurzeln aus Zehnerpotenzen mit geraden Hochzahlen sind im Kopf berechenbar (siehe Seite 30).

Eine (Quadrat)wurzel kann auf folgende Art überschlagsweise berechnet werden, zB:

$\sqrt{387} = \sqrt{3|87} = \sqrt{3{,}87 \cdot 10^2} \approx \sqrt{4 \cdot 10^2} = 2 \cdot 10^1 = 20$

Schreibe den Radikanden (Zahl, aus der die Wurzel gezogen werden soll) im Gleitkommaformat an. Verschiebe dabei das Komma um eine **gerade** Anzahl von Stellen, sodass die Vorzahl ein- oder zweistellig ist. Der **Exponent** der Zehnerpotenz ist dann eine **gerade Zahl**.
Runde nun die Vorzahl auf die **nächstliegende Quadratzahl**.
Ziehe die Wurzel aus jedem Faktor des Produkts einzeln.

Analog kann man mit Kubikwurzeln verfahren, zB:

$\sqrt[3]{63\,715} = \sqrt[3]{63|715} = \sqrt[3]{63{,}715 \cdot 10^3} \approx \sqrt[3]{64 \cdot 10^3} = 4 \cdot 10^1 = 40$

- Das Komma wird so verschoben, dass die Hochzahl durch 3 teilbar ist und die Vorzahl ein-, zwei- oder dreistellig ist.
- Die Vorzahl wird auf die nächstliegende Kubikzahl gerundet.

1.220 Berechne überschlagsweise. B

a) $\sqrt{0{,}4}$ **b)** $\sqrt{9\,170\,904{,}3}$ **c)** $\sqrt[3]{7\,349\,567}$ **d)** $\sqrt[3]{0{,}000\,031}$

Lösung:

a) $\sqrt{0{,}4} = \sqrt{0{,}40|} = \sqrt{40 \cdot 10^{-2}} \approx \sqrt{36 \cdot 10^{-2}} = 6 \cdot 10^{-1} = 0{,}6$

b) $\sqrt{9\,170\,904{,}3} = \sqrt{9|17|09|04{,}3} = \sqrt{9{,}170\,904\,3 \cdot 10^{6}} \approx \sqrt{9 \cdot 10^{6}} = 3 \cdot 10^{3} = 3\,000$

c) $\sqrt[3]{7\,349\,567} = \sqrt[3]{7|349|567} = \sqrt[3]{7{,}349\,567 \cdot 10^{6}} \approx \sqrt[3]{8 \cdot 10^{6}} = 2 \cdot 10^{2} = 200$

d) $\sqrt[3]{0{,}000\,031} = \sqrt[3]{0{,}000|031|} = \sqrt[3]{31 \cdot 10^{-6}} \approx \sqrt[3]{27 \cdot 10^{-6}} = 3 \cdot 10^{-2} = 0{,}03$

Aufgaben 1.221 – 1.224: Ermittle die Ergebnisse überschlagsweise.

1.221 **a)** $\sqrt{405{,}3}$ **b)** $\sqrt{1\,532}$ **c)** $\sqrt{8\,074}$ **d)** $\sqrt{637\,986}$ B

1.222 **a)** $\sqrt[3]{3\,125}$ **b)** $\sqrt[3]{59\,517}$ **c)** $\sqrt[3]{707\,707}$ **d)** $\sqrt[3]{6\,400\,000}$ B

1.223 **a)** $\sqrt[3]{0{,}000\,49}$ **b)** $\sqrt[3]{0{,}001\,11}$ **c)** $\sqrt[3]{0{,}5}$ **d)** $\sqrt[3]{0{,}06}$ B

1.224 **a)** $\frac{208{,}7 \cdot 0{,}465}{83{,}45}$ **b)** $\frac{15\,600 \cdot 0{,}084\,3}{72{,}5}$ **c)** $\frac{7{,}853}{4{,}51 \cdot 407{,}2}$ B

1.225 Berechne überschlagsweise und ermittle so den richtigen Wert für x. B

a) $\frac{0{,}000\,81 \cdot 293\,417 \cdot \sqrt[3]{27\,224}}{\sqrt{0{,}008\,1}} \approx 8 \cdot 10^{x}$ **b)** $\frac{0{,}000\,053 \cdot 68\,341 \cdot \sqrt[3]{9\,124}}{\sqrt{0{,}006\,7}} \approx 9{,}25 \cdot 10^{x}$

1.226 Lukas hat mit dem Taschenrechner gerechnet: $\frac{32{,}5 \cdot 19{,}3}{44{,}201 - 44{,}103} = -29{,}9$ BCD TE

1) Zeige mithilfe einer Überschlagsrechnung, dass das Ergebnis nicht stimmen kann.
2) Versuche herauszufinden, welchen Eingabefehler er gemacht hat und beschreibe ihn mit eigenen Worten.

1.227 Jennifer sollte $\frac{4{,}8}{0{,}100\,5 - 0{,}100\,4}$ überschlagsweise berechnen. Nach dem Runden wollte sie es sich leicht machen und hat den Taschenrechner benutzt, der jedoch ERROR anzeigt. Welchen Fehler hat sie wahrscheinlich gemacht? Erkläre das Problem und rechne korrekt. BCD TE

1.228 In Österreich werden durchschnittlich pro Person und Tag 48 ℓ Wasser für die Spülung der Toilette verbraucht. Berechne überschlagsweise, wie viel Kubikmeter Wasser in Österreich (ca. 8 300 000 Einwohner) pro Jahr für die Toilettenspülungen verbraucht werden. AB

1.229 Ein Wassertropfen hat ein Volumen von ca. 0,08 cm^3. Berechne überschlagsweise die Anzahl der Tropfen in einer 0,5-Liter-Flasche, einer Badewanne (rund 200 Liter) bzw. in einem Pool mit den Maßen 8 m x 4 m x 1,5 m. AB

1.230 1 Liter Luft hat eine Masse von rund 1,3 g. Berechne überschlagsweise, welche Seitenlänge ein Korkwürfel mit der gleichen Masse wie die Luft in deinem Zimmer hat. AB
$\left(\text{Dichte von Kork: } \rho = 0{,}2\,\frac{g}{cm^3}\right)$

1.7 Dualzahlen und andere Zahlensysteme

In der Vergangenheit wurden Zahlensysteme und Zahlendarstellungen für den Handel oder zum Zählen von Tieren verwendet. Das älteste uns bekannte und heute noch zum Beispiel bei der Uhrzeit verwendete Zahlensystem ist das Sexagesimalsystem der Babylonier (eine Stunde hat 60 Minuten, eine Minute hat 60 Sekunden). Dabei handelt es sich wie beim Dezimalsystem um ein **Stellenwertsystem**, allerdings mit der Basis 60.

CD **1.231** Recherchiere im Internet einige der früher verwendeten Zahlen und Zahlensysteme und präsentiere die verwendeten Zeichen und Symbole sowie deren Funktionsweise deinen Mitschülern. Diskutiert dabei die Vor- und Nachteile dieser Darstellungen.

Im **Dezimalsystem** lässt sich jede Zahl als Summe aus den einzelnen Ziffern multipliziert mit einer Potenz der **Basis 10** darstellen.

ZB: $2\,731{,}24 = 2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}$

Dieses Prinzip der Zahlendarstellung lässt sich auf eine beliebige **Basis B** anwenden.

In einem Stellenwertsystem mit der **Basis B** gibt es die Ziffern von 0 bis (B – 1). Der Wert einer Zahl wird aus der Summe der einzelnen Ziffern, multipliziert mit einer Potenz der Basis B, ermittelt. Die verwendete Basis wird als Index angegeben.

In der Informatik sind einige Stellenwertsysteme von besonderer Bedeutung:

- **Dualsystem** (Binärsystem) mit der Basis B = 2

  Für die Zahlendarstellung stehen nur die Ziffern 0 und 1 zur Verfügung. In der Datenverarbeitung werden 0 und 1 durch „kein Strom" und „Strom" beschrieben.

  ZB: 101101_2

- **Oktalsystem** (Achtersystem) mit der Basis B = 8

  Die Ziffern von 0 bis 7 können für die Zahlendarstellung verwendet werden.

  ZB: $356{,}721_8$

- **Hexadezimalsystem** (Sechzehnersystem) mit der Basis B = 16

  Um im Hexadezimalsystem 16 Ziffern darzustellen, werden zusätzlich zu den Ziffern von 0 bis 9 die ersten sechs Buchstaben des Alphabets für jene Ziffern verwendet, die den Dezimalzahlen von 10 bis 15 entsprechen.

  Es gilt: $A \triangleq 10$, $B \triangleq 11$, $C \triangleq 12$, $D \triangleq 13$, $E \triangleq 14$ und $F \triangleq 15$

  ZB: $A34B{,}5F2_{16}$

Umwandlung (Konvertieren) einer Zahl in eine Dezimalzahl

Mithilfe der Potenzschreibweise kann eine Zahl eines beliebigen Zahlensystems in eine Dezimalzahl umgerechnet werden.

1.232 Wandle die Dualzahl 10110_2 in eine Dezimalzahl um. **B**

Lösung:

$10110_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 =$ ● Anschreiben in Potenzschreibweise

$= 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 22_{10}$ ● Berechnen der Summe

Eine weitere Möglichkeit, eine Zahl in eine Dezimalzahl umzurechnen, ist das **Horner-Verfahren** (William Georg Horner, engl. Mathematiker, 1786 – 1837).

ZB: Die Zahl 11011_2 soll in eine Dezimalzahl umgewandelt werden.

$11011_2 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =$

$= (1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) \cdot 2 + 1 =$

$= ((1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 =$

$= (((1 \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 = 27_{10}$

- Anschreiben mithilfe von Potenzen
- Durch fortlaufendes Herausheben der Basis lässt sich eine Struktur erkennen, aus der ein einfaches Rechenverfahren abgeleitet werden kann.

Für eine übersichtlichere Berechnung des Ausdrucks $(((1 \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 = 27_{10}$ kann ein so genanntes „Zickzack-Muster“ verwendet werden:

Entlang der Striche von oben nach unten wird **mit 2 multipliziert**, entlang der schrägen Striche wird **die nächste Ziffer addiert**.

Umwandlung einer Dezimalzahl in ein beliebiges Zahlensystem

Um eine Dezimalzahl zum Beispiel ins Binärsystem umzuwandeln, schreibt man die umzuwandelnde Zahl als Summe von Zweierpotenzen an. Die Koeffizienten 0 bzw. 1 der Zweierpotenzen bilden dann die Dualzahl. Auch die Umkehrung des Horner-Verfahrens durch fortlaufendes Dividieren und Anschreiben des Restes ist möglich.

1.233 Stelle die Dezimalzahl 137_{10} als Dualzahl dar. **B**

Lösung:

	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
137			1	0	0	0	1	0	0	1

● Tabelle mit den Potenzen von 2

$128 + 8 + 1 = 137$ ● Anstelle der Verwendung einer Tabelle können die Summanden auch im Kopf ermittelt werden

$1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^0 = 137$

$10001001_2 = 137_{10}$ ● Alle nicht als Summanden auftretenden Zweierpotenzen haben den Koeffizienten null.

Zahlen und Mengen

Addition, Subtraktion und Multiplikation von Dualzahlen

Die Grundrechnungsarten „funktionieren“ mit Dualzahlen genauso wie mit Dezimalzahlen.

Addition

Für die Addition von Dualzahlen gilt:

$0_2 + 0_2 = 0_2$ $\quad$ $0_2 + 1_2 = 1_2$ $\quad$ $1_2 + 0_2 = 1_2$ $\quad$ $1_2 + 1_2 = 10_2$

ZB: Die beiden Zahlen 10110_2 und 11011_2 sollen addiert werden. Zunächst werden sie stellenwertrichtig untereinander geschrieben. Anschließend addiert man die beiden Ziffern, denen die niedrigste Zweierpotenz zugeordnet wird. Entsteht dabei ein Übertrag, wird dieser zur Stelle, also zu den nächsten beiden zu addierenden Ziffern, dazugezählt.

Ü:	**1**	**1**	**1**		
	1	0	1	1	0_2
+	1	1	0	1	1_2
1	1	0	0	0	1_2

- Durch die Addition der beiden vorletzten Ziffern entsteht ein **Übertrag**, der zu den nächsten beiden zu addierenden Ziffern addiert wird.

Subtraktion

Für die Subtraktion von Dualzahlen gilt:

$0_2 - 0_2 = 0_2$ $\quad$ $1_2 - 0_2 = 1_2$ $\quad$ $1_2 - 1_2 = 0_2$

Da die Darstellung negativer Dualzahlen hier nicht behandelt wird, beschränken wir uns auf Subtraktionen mit positiven Ergebnissen.

ZB: Berechne $1101_2 - 10_2$.

			10	
	1	1	0	1_2
−		1	1	0_2
	1	0	1	1_2

- In der vorletzten Spalte müsste man 1 von 0 subtrahieren. Da das nicht möglich ist, muss man aus der Spalte davon einen Einser „ausborgen“. Nun kann man von **10_2** subtrahieren. Der zuvor ausgeborgte **1er** muss in der nächsten Spalte zusätzlich subtrahiert werden.

Multiplikation

Die Multiplikation setzt sich wie im Dezimalsystem aus mehrfachen Additionen zusammen.

ZB: Führe die Multiplikation $1011_2 \cdot 101_2$ aus.

1	0	1	1_2	·	1	0	1_2
1	0	1	1_2				
	0	0	0	0_2			
		1	0	1	1_2		
1	1	0	1	1	1_2		

- Bei einer Multiplikation mit 1 schreibt man die Zahl ab, bei 0 ergänzt man eine Reihe mit Nullen. Im letzten Rechenschritt verfährt man wie bei der Addition.

1.234 Wandle die gegebene Dualzahl ins Dezimalsystem um. B

a) 1011101_2 **b)** 11101100_2 **c)** 11000101_2 **d)** 101101_2

1.235 Wandle die Zahl in eine Dezimalzahl um. B

a) $E347_{16}$ **b)** $48D5_{16}$ **c)** $C8D3_{16}$ **d)** $5F34_{16}$

1.236 Konvertiere die angegebene Dezimalzahl ins Binärsystem. B

a) 159_{10} **b)** 276_{10} **c)** $1\,389_{10}$ **d)** 617_{10}

1.237 Wandle die angegebene Dezimalzahl ins Hexadezimalsystem um. B

a) 489_{10} **b)** $1\,324_{10}$ **c)** 298_{10} **d)** $12\,450_{10}$

1.238 Erkläre die Umwandlung einer Dezimalzahl in eine Dualzahl durch Umkehren des Horner-Verfahrens. D

1.239 Gib an, ob es sich bei der Zahl 1 034 um eine Zahl aus dem Vierersystem handelt und begründe deine Aussage. D

1.240 Begründe mit eigenen Worten, warum man im Hexadezimalsystem für A nicht 10 schreiben kann. D

1.241 Führe die angegebenen Additionen aus. Überprüfe dein Ergebnis durch eine Rechnung im Dezimalsystem. B

a)
$$\begin{array}{r} 1\;1\;0\;1\;1\;0_2 \\ +\quad 1\;1\;0\;0\;1_2 \\ \hline \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 1\;1\;1\;0\;1\;0\;1_2 \\ +\;1\;0\;0\;1\;0\;1\;0_2 \\ \hline \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} 1\;0\;0\;1\;1_2 \\ +\;1\;1\;0\;0\;1_2 \\ \hline \end{array}$$

1.242 Führe die angegebenen Subtraktionen aus und überprüfe durch eine Rechnung im Dezimalsystem. B

a) $\begin{array}{r} 1100101_2 \\ -\;101001_2 \\ \hline \end{array}$ **b)** $\begin{array}{r} 101100_2 \\ -\;1011_2 \\ \hline \end{array}$ **c)** $\begin{array}{r} 111010_2 \\ -\;10011_2 \\ \hline \end{array}$ **d)** $\begin{array}{r} 110110_2 \\ -\;11001_2 \\ \hline \end{array}$

1.243 Gib eine zweistellige Subtraktion an, die im Dezimalsystem und im Binärsystem gleich aussieht. AB

1.244 Berechne im Binärsystem. B

a) $10111_2 \cdot 1101_2$ **b)** $110110_2 \cdot 10111_2$ **c)** $11100101_2 \cdot 111001_2$

1.245 Um für Computer einen einheitlichen Zeichensatz zu schaffen, wurde der ASCII-Code (American Standard Code for Information Interchange) generiert. In diesem sind alle Zeichen von 0 bis 255 durchnummeriert. Berechne jeweils die fehlenden Darstellungen. B

	Zeichen	Dezimalsystem	Binärsystem	Hexadezimalsystem
a)	M			4D
b)	%		00100101	
c)	8	56		
d)	☺			1
e)	@			40
f)	∑	228		
g)	♥		0000011	

1.246 In welchem Zahlensystem x wird die Zahl 26_{10} als 35_x geschrieben? Begründe. BCD

1.8 Mengen, Mengenoperationen und Aussagen

1.8.1 Mengen

Um die Wende vom 19. zum 20. Jh. erforderten es der mathematische und technische Fortschritt, die Mathematik auf eine einheitliche, feste Basis, ein Fundament aus klaren Begriffen, zu stellen. Einen wesentlichen Beitrag dazu lieferte die **Mengenlehre**, als deren Begründer Georg Cantor (deutscher Mathematiker, 1845 – 1918) angesehen wird. Die Mengenlehre bildet eine gemeinsame Fachsprache der Mathematik und stellt die Grundlage dar, das „Unendliche" mathematisch in den Griff zu bekommen.

Georg Cantor

D **1.247** Gib an, wie die Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ in diesem Abschnitt beschrieben wurden. Wodurch unterscheiden sich die Beschreibungen grundlegend?

Die Mathematik beschäftigt sich mit verschiedenen Objekten und deren Eigenschaften. Aus Abschnitt 1.1 ist bekannt, dass **Elemente**, also Objekte mit einer gemeinsamen Eigenschaft, zu einer **Menge** zusammengefasst werden können. Eine Menge kann auf zwei Arten angegeben werden:

- **aufzählendes Verfahren**: durch Aufzählen der einzelnen Elemente, zB: $A = \{0, 1, 2, 3\}$
- **beschreibendes Verfahren**: durch Angeben einer Bedingung, zB: $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1{,}75\}$
  [Sprich: „B ist die Menge aller x aus den reellen Zahlen, für die gilt: x ist größer als 1,75."]

Ist x **ein Element** der Menge A, so schreibt man $x \in A$.
Ist x **kein Element** der Menge A, so schreibt man $x \notin A$.

1.8.2 Beziehungen zwischen Mengen

AC **1.248** Am Schulanfang notiert der Klassenvorstand von seinen insgesamt 24 Schülerinnen und Schülern, welche Freigegenstände sie gewählt haben und welchen Religionsunterricht sie besuchen. Um Zeit zu sparen, gibt er nur die Katalognummern an.

Freigegenstände:		Religionsunterricht:	
Basketball:	1, 3, 7, 12, 15, 24	Römisch-katholisch:	1, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 14, 17, 23
Volleyball:	2, 18, 19, 21, 23	Evangelisch:	3, 12
Französisch:	3, 11, 12, 18, 21	Islamisch:	7, 9, 18, 21, 24

1) Zähle die Elemente der Menge auf (gib die Katalognummern an).
A = {besucht einen sportlichen Freigegenstand}
B = {besucht Basketball und Französisch}
C = {besucht Volleyball, aber nicht Französisch}
D = {spielt Basketball und besucht islamischen Religionsunterricht}
E = {besucht keinen Religionsunterricht}

2) Was kannst du über die Schülerinnen und Schüler der folgenden Menge aussagen?
F = {4, 5, 6, 8, 10, 14, 17}

Zahlen und Mengen

In der Mathematik ist es oft notwendig, mit mehreren Mengen und deren Beziehung zueinander zu arbeiten. Um Beziehungen zwischen Mengen anzugeben, benötigt man den Begriff der **Teilmenge**.

	Schreibweise:
Zwei Mengen A und B heißen **gleich**, wenn sie **die gleichen Elemente** enthalten. Die Reihenfolge der Elemente ist nicht von Bedeutung.	$A = B$
Eine Menge A heißt **Teilmenge** einer Menge B, wenn jedes Element der Menge A auch ein Element der Menge B ist.	$A \subseteq B$
Eine Menge A heißt **echte Teilmenge** einer Menge B, wenn $A \subseteq B$ und $A \neq B$.	$A \subset B$
Eine Menge, die keine Elemente enthält, heißt **leere Menge**.	$\{\,\}$ oder $\varnothing$

1.249 Gib jeweils an, ob $A \subset B$, $B \subset A$ oder $A = B$ gilt. AB

1) $A = \{3, 4, 5\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 6\}$ **3)** $A = \{2 \cdot n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$; $B = \{2, 4, 6, 8, 10 \ldots\}$
2) $A = \{x \in \mathbb{N}_u \mid x > 3\}$; $B = \{5, 7, 9, 11, 13\}$ mit $\mathbb{N}_u$ ... Menge der ungeraden Zahlen

Lösung:
1) $A = \{3, 4, 5\}$; $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ $\Rightarrow$ $A \subset B$
2) $A = \{5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 \ldots\}$; $B = \{5, 7, 9, 11, 13\}$ $\Rightarrow$ $B \subset A$ bzw. $A \supset B$
3) $A = \{2, 4, 6, 8, 10 \ldots\}$; $B = \{2, 4, 6, 8, 10 \ldots\}$ $\Rightarrow$ $A = B$

1.250 Gib die Zahlenmenge im aufzählenden Verfahren an. A

a) Zweistellige natürliche Zahlen, die mindestens einmal die Ziffer 4 enthalten.
b) Dreistellige natürliche Zahlen, die die Hunderterziffer 7 haben und durch 11 teilbar sind.
c) Natürliche Zahlen unter 1 000, die mindestens dreimal die Ziffer 5 enthalten.

1.251 Gib die beschriebene Menge im aufzählenden Verfahren an. B

a) $A = \{3 \cdot n \mid n \in \mathbb{N}\}$ **b)** $B = \{10 \cdot n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$

1.252 Welche der Aussagen $A \subset B$ oder $B \subset A$ oder $A = B$ ist richtig? C

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 6\}$, $B = \{2, 3, 4\}$
b) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \geq 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 6\}$
c) A = {Schülerinnen und Schüler der 1AHIF},
B = {Schülerinnen und Schüler der 1AHIF, die mit öffentlichen Verkehrsmitteln zur Schule kommen}

1.253 Füge passend $\subset$ oder $\supset$ ein und begründe deine Antwort. AD

a) Menge aller Fahrzeuge ... Menge aller Autos
b) Menge aller Dreiecke ... Menge aller gleichseitigen Dreiecke
c) Menge aller natürlichen Zahlen ... Menge aller ganzen Zahlen

1.254 Schreibe die Menge jeweils im aufzählenden und im beschreibenden Verfahren an. A

1) A = Menge der durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen, die kleiner als 3 sind
2) B = Menge der positiven ganzen Zahlen, die kleiner als 7 sind
3) C = Menge der durch 5 teilbaren Zahlen, die kleiner als 30 sind

1.255 Beschreibe die dargestellte Menge mit eigenen Worten. D

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \text{ teilt } x\}$ **b)** $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 4 < x < 10\}$

Zahlen und Mengen

1.8.3 Verknüpfungen von Mengen

C **1.256** Eine Gruppe von Jugendlichen möchte Mittagessen gehen. Die Pizzeria würde Anna, Julia, Jasmin, Lukas und Markus zusagen. Mit einem Mittagessen im Chinarestaurant wären David, Julia, Sophie, Stefan und Markus einverstanden.

1) Gib an, wer in einem Lokal Mittag essen möchte.
2) Wem sind beide Lokale recht?
3) Wer möchte in die Pizzeria, aber nicht ins Chinarestaurant gehen?

Oft ist es von Bedeutung, zwei Mengen zu einer neuen Menge zu verbinden. Dazu stehen eigene Operatoren zur Verfügung.

- **Durchschnitt**

  Die Menge der Elemente, die **sowohl** in A **als auch** in B enthalten sind, nennt man den Durchschnitt der beiden Mengen. Man schreibt:

  $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$

  [Sprich: „**A geschnitten B** ist die Menge aller x, für die gilt: **x ist ein Element von A und x ist ein Element von B.**"]

  ZB: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ $\Rightarrow$ $A \cap B = \{2, 4\}$

  Enthält der Durchschnitt zweier Mengen kein Element, nennt man die Mengen **disjunkt**.

- **Vereinigung**

  Die Menge der Elemente, die in einer Menge A **oder** in einer Menge B enthalten sind, nennt man die Vereinigung der beiden Mengen. Man schreibt:

  $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$

  [Sprich: „**A vereinigt B** ist die Menge aller x, für die gilt: **x ist ein Element von A oder x ist ein Element von B.**"]

  ZB: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 6, 8, 10\}$ $\Rightarrow$ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$

- **Differenzmenge**

  Entfernt man aus der Menge A alle Elemente, die auch in B vorkommen, so erhält man die Differenzmenge. Diese enthält alle Elemente von A, die nicht in B enthalten sind. Man schreibt:

  $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$; [Sprich: „**A ohne B**"]

  ZB: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 6, 8, 10\}$ $\Rightarrow$ $A \setminus B = \{1, 2, 3, 5\}$

Mengen bzw. Mengenverknüpfungen können durch **Mengendiagramme** (**Venn-Diagramme**, John Venn, englischer Mathematiker, 1834 – 1923) veranschaulicht werden. Dabei wird die Menge durch eine ovale Fläche dargestellt.

A B
$A \cap B$

A B
$A \cup B$

A B
$A \setminus B$

1.257 Gegeben sind die Mengen $A = \{2, 4, 7, 9\}$, $B = \{1, 3, 4, 7\}$ und $C = \{4, 5, 9, 10\}$. Stelle $A \cup B$, $A \cap B \cap C$ und $B \setminus A$ mithilfe von Mengendiagrammen dar und gib sie jeweils im aufzählenden Verfahren an. B

1.258 $M_1 = \{a, c, e, f, g, h, k, m, r, t\}$, $M_2 = \{b, e, j, n, p, t, u\}$, $M_3 = \{a, f, j, h, o, s, x\}$ B
Stelle mit Mengendiagrammen dar und gib im aufzählenden Verfahren an.
a) $M_1 \cup M_2$ ***b)*** $M_2 \cap M_3$ ***c)*** $M_1 \setminus M_2$ ***d)*** $M_2 \setminus M_1$

1.259 $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$, $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$, $C = \{4, 8, 12, 16, 20\}$ BC
1) Beschreibe mit eigenen Worten die Elemente der Mengen A, B und C.
2) Stelle mit Mengendiagrammen dar und gib im aufzählenden Verfahren an.
a) $A \cup B$ ***b)*** $B \cap C$ ***c)*** $A \cap B \cap C$ ***d)*** $A \cap C$

1.260 Bilde die Vereinigungsmenge, die Durchschnittsmenge sowie die Differenzmengen. B
a) $A = \{1, 3, 5, 8, 9\}$, $B = \{3, 4, 8, 11, 12\}$
b) $X = \{a, c, f, g, h, r, t, x, y, z\}$, $Y = \{d, f, k, l, s, t, x\}$
c) M = {rot, grün, blau, gelb}, N = {rosa, lila, blau, braun}

1.261 Gib den Durchschnitt $A \cap B$ und die Vereinigung $A \cup B$ an. AB
a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 < x < 10\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 6\}$
b) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 8\}$
c) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2 \leq x \leq 20\}$, $B = \{x \in \mathbb{P} \mid x < 30\}$

1.262 In einem Studienjahr absolvierten 40 Studierende die Physikprüfung (P), 46 die Chemieprüfung (C) und 32 die Biologieprüfung (B). 16 Studierende traten in Physik und Chemie, 18 Chemie und Biologie und 8 Biologie und Physik. Nur 6 wählten alle drei Prüfungen. AC
1) Stelle diese Informationen in einem Venn-Diagramm dar.
2) Gib an, was die Menge $P \cup C \cup B$ bedeutet.

1.8.4 Aussagen

Behauptungen über Objekte und ihre Eigenschaften können nicht nur als Mengen angegeben werden, sondern auch in Form von **Aussagen**. Eine Aussage ist zum Beispiel der Satz: „Die Zahl 6 ist ein Teiler von 30."

Unter einer **Aussage a** versteht man einen Satz, der entweder **wahr (w)** oder **falsch (f)** sein kann. Jeder Aussage kann ein **Wahrheitsgehalt**, wahr oder falsch, zugeordnet werden.

Sätze, die im Widerspruch zur Grammatik stehen, sowie Fragen und Befehle stellen keine Aussagen dar, da man ihnen keinen Wahrheitsgehalt zuordnen kann.
ZB: „Wird morgen die Sonne scheinen?", „Gib mir bitte dein Hausübungsheft!"

- **Verneinung (Negation)** von Aussagen

  Bezeichnet man eine Aussage allgemein mit a, so wird ihre Negation mit dem Symbol $\neg$ gekennzeichnet: $\neg a$ [Sprich: „not a" oder „nicht a"]

  Es muss darauf geachtet werden, dass die Aussagen richtig verneint werden.

  ZB ist die richtige Verneinung der Aussage „Die Sonne scheint." die Aussage „Es ist nicht richtig, dass die Sonne scheint." bzw. „Die Sonne scheint nicht."
  Eine falsche Verneinung wäre: „Nicht die Sonne scheint." Diese Aussage lässt den Schluss zu, dass zwar nicht die Sonne, aber etwas anderes scheinen könnte.

Zahlen und Mengen

Ist eine Aussage wahr, so ist ihre Negation falsch und umgekehrt.
ZB: „3 **ist** Teiler von 28." ... falsch, aber: „3 **ist kein** Teiler von 28." ... wahr

Durch eine **Negation** $\neg$ kehrt sich der Wahrheitsgehalt einer Aussage um.

In der mathematischen Logik bedeutet eine doppelte Verneinung $\neg(\neg a)$ ein Wiederherstellen des ursprünglichen Wahrheitsgehalts, das heißt, die Verneinung wird rückgängig gemacht.

D **1.263** Welche der Aussagen ist wahr, welche falsch? Begründe deine Antworten.

1) π ist eine irrationale Zahl.
2) 7 ist ein Teiler von 117 649.
3) $\sqrt{3}$ ist eine rationale Zahl.
4) $3 \cdot 16 + 5 - 17 = 36$
5) 18 ist eine Primzahl.
6) Das Quadrat von 11 ist 121.
7) $0,\dot{3}$ kann nicht als Bruch dargestellt werden.
8) 81 ist ein Vielfaches von 3.

D **1.264** Welche der Aussagen sind wahr? Begründe deine Antworten.

1) Wenn x eine ungerade ganze Zahl ist, dann ist 2x eine gerade ganze Zahl.
2) Wenn zwei Dreiecke kongruent sind, dann sind sie ähnlich.
3) Ist $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl, dann ist auch $4 + 3 \cdot \sqrt{2}$ eine irrationale Zahl.
4) Ist eine Zahl durch 4 teilbar, dann ist sie auch durch 6 teilbar.

D **1.265** Gib an, welche Verneinungen der Aussage a richtig sind. Begründe deine Antworten.
a: Der Rucksack ist schwer.

1) $\neg a$: Der Rucksack ist nicht schwer.
2) $\neg a$: Der Rucksack ist leicht.
3) $\neg a$: Nicht der Rucksack ist schwer.
4) $\neg a$: Der Rucksack ist nicht leicht.

CD **1.266** Ein Rätsel besagt, dass von drei Personen, nur eine die Wahrheit spricht und die anderen beiden lügen. Man kennt die Aussagen der drei Personen:
A: „Ich lüge nie."
B: „A lügt. Ich sage hier die Wahrheit."
C: „B lügt. Ich bin die ehrliche Person von uns."
Finde anhand der drei Aussagen heraus, wer die Wahrheit spricht und wer lügt.

AC **1.267** Bilde die richtige Verneinung der Aussagen.

1) $x > 4$
2) Jede natürliche Zahl ist durch 6 teilbar.
3) Von 20 Kirschen waren mindestens 5 wurmig.
4) Von 3 Mandarinen ist genau eine verdorben.

1.8.5 Verknüpfungen von Aussagen

Nicht nur Mengen können verknüpft werden, auch zwei Aussagen lassen sich zu einer neuen Aussage verbinden. Dafür stehen eigene Operatoren zur Verfügung, die in der Aussagenlogik als **Junktoren** bezeichnet werden.

- **Konjunktion**: logisches UND

  Die Verknüpfung mit „UND" entspricht dem Durchschnitt $A \cap B$. Man schreibt:

  $a \wedge b$ [Sprich: „a **und** b" oder „**sowohl** a **als auch** b"]

  ZB: a: 6 ist durch 2 teilbar, b: 6 ist durch 3 teilbar
  $a \wedge b$: 6 ist durch 2 und durch 3 teilbar

  Die Aussage $a \wedge b$ ist wahr, wenn sowohl die Aussage a als auch die Aussage b wahr ist. Ist eine der Aussagen falsch, so ist die Gesamtaussage falsch. Übersichtlich lassen sich alle möglichen Fälle mithilfe einer so genannten **Wahrheitstafel (Wahrheitstabelle)** darstellen.

a	b	a ∧ b
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

- **Disjunktion**: logisches ODER

  Die Verknüpfung mit „ODER" entspricht der Vereinigung $A \cup B$. Man schreibt:

  $a \vee b$ [Sprich: „a **oder** b"] (latein: „vel" ... oder)

  „ODER" ist hier einschließend zu verstehen. Das bedeutet, dass beide Aussagen gleichzeitig zutreffen können.

  ZB: a: x ist durch 3 teilbar, b: x ist durch 4 teilbar
  $a \vee b$: x ist durch 3 oder 4 teilbar

  Die Disjunktion entspricht der Vereinigung $A \cup B$. Die Aussage $a \vee b$ ist wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen oder beide wahr sind.

a	b	a ∨ b
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

- **Implikation**

  Um Schlussfolgerungen zu ziehen, verwendet man in der Mathematik die Implikation. Man schreibt:

  $a \Rightarrow b$ [Sprich: „**Aus** a ..., **folgt** b..."]

  1) Aus $6 \mid x$ folgt $2 \mid x$ ... w
  2) Aus $6 \mid x$ folgt $2 \nmid x$ ... f
  3) Aus $6 \nmid x$ folgt $2 \mid x$ ... ?
  4) Aus $6 \nmid x$ folgt $2 \nmid x$ ... ?

  Man nennt die Aussage, die vor dem Pfeil steht, **Prämisse** oder **Voraussetzung**, die Aussage hinter dem Pfeil **Konklusion** oder **Schluss**.

a	b	a ⇒ b
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

  Ist die Voraussetzung falsch, kann die Konklusion beliebig sein, die Implikation wird als wahr festgesetzt.

  Die Implikation darf man nicht umkehren, zB: aus $2 \mid x$ folgt nicht $6 \mid x$. Dieser Junktor ist als einziger nicht kommutativ. Das heißt, dass sich durch Vertauschen von Voraussetzung und Schluss der Wahrheitsgehalt im Allgemeinen ändert.

Äquivalenz

Für Beweise und Definitionen wird oft die Äquivalenz verwendet. Man schreibt:

$a \Leftrightarrow b$ [Sprich: „a gilt **dann und nur dann, wenn** b gilt."]

ZB: Ein Dreieck ist gleichseitig, dann und nur dann, wenn alle drei Seiten gleich lang sind.

Die Äquivalenz „vergleicht" zwei Aussagen miteinander. Ist der Wahrheitsgehalt der beiden Teilaussagen gleich, so erhält man die Gesamtaussage wahr, sind die beiden unterschiedlich, so erhält man den Wahrheitswert falsch.

a	b	$a \Leftrightarrow b$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Eine Aussagenvariable ist eine Variable, die den Wahrheitsgehalt wahr oder falsch annehmen kann.

Sind mehrere Aussagen bzw. Aussagenvariablen miteinander zu einer **aussagenlogischen Formel** verbunden, verwendet man eine Wahrheitstabelle, um den Gesamtwahrheitsgehalt zu bestimmen. Die Auswertung erfolgt Schritt für Schritt in einer bestimmten **Auswertungsreihenfolge** (Klammern, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$). Treten gleiche Zeichen auf, werden diese von links nach rechts ausgewertet.

B **1.268** Bestimme den Wahrheitsgehalt der aussagenlogischen Formel: $p \Rightarrow q \wedge \neg (r \vee p)$

Lösung:
In den ersten Spalten der Wahrheitstafel werden alle möglichen Wahrheitswerte der vorkommenden Aussagenvariablen aufgelistet. Danach wertet man die einzelnen Ausdrücke der Reihenfolge entsprechend aus. Das Ergebnis lässt sich aus der letzten Spalte der Tabelle ablesen.

p	q	r	$r \vee p$	$\neg (r \vee p)$	$q \wedge \neg (r \vee p)$	$p \Rightarrow q \wedge \neg (r \vee p)$
w	w	w	w	f	f	**f**
w	w	f	w	f	f	**f**
w	f	w	w	f	f	**f**
w	f	f	w	f	f	**f**
f	w	w	w	f	f	**w**
f	w	f	f	w	w	**w**
f	f	w	w	f	f	**w**
f	f	f	f	w	f	**w**

A **1.269** Formuliere die folgenden Aussagen unter Verwendung der entsprechenden Junktoren.

1) Wenn man ein Schokoladestück in die Sonne legt, dann schmilzt es.
2) Der Neuwagen ist mit Schiebedach und Klimaanlage ausgestattet.
3) Wenn ein Viereck vier gleich lange Seiten und vier rechte Winkel hat, genau dann ist es ein Quadrat.
4) Die Palatschinken können mit Eis oder Schokolade gefüllt werden.
5) Thomas isst heute Pizza oder Lasagne.

1.270 Welche der folgenden Aussagen sind wahr? BC

1) $\frac{3}{7} > \frac{5}{8}$

2) $\frac{x}{2} \cdot \frac{3}{2x} < \frac{4x}{3} \cdot \frac{6}{5x} \quad x \in \mathbb{N}^*$

3) $\frac{2}{9} : \frac{5}{3} < \frac{1}{2}$

4) $x^2 + 2 < x^2 - 1$

1.271 Für welche Zahlen x ist die Aussage gültig? BC

1) $x^3 = 8 \wedge x < 4 \quad x \in \mathbb{N}$

2) $x \geqslant -2 \wedge x < 3 \quad x \in \mathbb{Z}$

3) $\sqrt{x} > 3 \wedge x < 20 \quad x \in \mathbb{Z}$

4) $x^2 + 2x - 1 > 6 \quad x \in \mathbb{Z}$

1.272 Überprüfe, welche der Aussagen richtig sind, bzw. gib ein Gegenbeispiel an. AD

1) Eine Zahl ist durch 21 teilbar, wenn sie durch 3 und durch 7 teilbar ist.

2) Wenn in einem Viereck die Diagonalen aufeinander normal stehen, dann handelt es sich um einen Rhombus.

3) Wenn man herausfinden möchte, ob eine Zahl x eine Primzahl ist, dann genügt es, die Zahlen bis zur Wurzel aus dieser Zahl zu überprüfen.

4) Ist eine Zahl durch 3 teilbar, dann ist ihre Ziffernsumme durch 9 teilbar.

1.273 Überprüfe die folgenden Aussagen auf ihre Richtigkeit. Begründe deine Antwort. AD

1) Wenn a eine gerade ganze Zahl ist, dann ist $\frac{a}{2}$ eine ungerade ganze Zahl.

2) Mithilfe des Ausdrucks $2x + 1$ mit $x \in \mathbb{N}$ lassen sich alle ungeraden natürlichen Zahlen beschreiben.

3) Wenn $x + y = 12$ ist, dann muss $x = 6$ und $y = 6$ sein.

4) Wenn in einem Dreieck zwei Seiten gleich lang sind, dann ist es ein gleichseitiges Dreieck.

1.274 Bestimme den Wahrheitsgehalt der aussagenlogischen Formel mithilfe einer Wahrheitstafel. B

a) $q \Leftrightarrow \neg r \vee p \Leftrightarrow \neg q \wedge r$

b) $r \wedge q \wedge \neg p \Leftrightarrow \neg r$

1.275 Bestimme den Wahrheitsgehalt der aussagenlogischen Formel. B

a) $p \wedge s \vee \neg r \vee q \Rightarrow \neg p$

b) $p \vee r \wedge \neg s \vee q \Leftrightarrow \neg p$

c) $\neg (r \vee p) \Rightarrow s \wedge (q \Leftrightarrow \neg r)$

d) $\neg p \vee \neg s \Leftrightarrow r \wedge q$

e) $\neg s \vee \neg p \Rightarrow r \wedge q$

f) $q \wedge r \vee \neg s \wedge p$

1.276 Überprüfe die Gültigkeit des Gesetzes $\neg a \wedge \neg b \Leftrightarrow \neg (a \vee b)$ mithilfe einer Wahrheitstabelle. B

1.277 Überprüfe den Ausdruck $\neg a \vee \neg b \Leftrightarrow \neg (a \wedge b)$ auf seine Gültigkeit mithilfe einer Wahrheitstabelle. B

1.278 Zeige die Gültigkeit des Verschmelzungsgesetzes $a \vee (a \wedge b) \Leftrightarrow a$ mithilfe D

1) einer Wahrheitstafel,

2) mit einem Venn-Diagramm.

1.279 Zeige die Distributivität der Konjunktion bezüglich der Disjunktion mithilfe einer Wahrheitstabelle für $a \wedge (b \vee c) \Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ D

1.280 Gib die richtige Verneinung der Aussage $\neg (a \vee b)$ an. Formuliere ein Beispiel. B

Zahlen und Mengen

Zusammenfassung

Zahlenmengen

Menge der **natürlichen Zahlen** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 ...\}$ bzw. $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3 ...\}$

Primzahlen $\mathbb{P}$: Zahlen > 1, die nur durch 1 und sich selbst teilbar sind.

Menge der **ganzen Zahlen** $\mathbb{Z} = \{... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 ...\}$

Betrag einer Zahl: $|a| = \begin{cases} a, \text{ wenn } a \geq 0 \\ -a, \text{ wenn } a < 0 \end{cases}$

Menge der **rationalen Zahlen** $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$

Jede rationale Zahl in Bruchdarstellung kann als endliche oder periodische Dezimalzahl angegeben werden.

Das **Verhältnis** a : b zweier Zahlen (oder Größen) a und b ist der Quotient $\frac{a}{b}$.

Prozent: 1 % = 0,1; Promille: 1 ‰ = 0,01; parts per million: 1 ppm = 0,000 001

Unendliche, nicht periodische Dezimalzahlen (zB $\sqrt{2}$, π ...) heißen **irrationale Zahlen**. Sie bilden zusammen mit den rationalen Zahlen die Menge der **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$.

Rechenoperationen

Addition:	Summand + Summand = Summe	
	$a + b = b + a$	(Kommutativgesetz)
	$a + (b + c) = (a + b) + c$	(Assoziativgesetz)
Subtraktion:	Minuend – Subtrahend = Differenz	
	Es gilt: $a - b - c = a - (b + c)$	
Multiplikation:	Faktor · Faktor = Produkt	
	$a \cdot b = b \cdot a$	(Kommutativgesetz)
	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	(Assoziativgesetz)
Division:	Dividend : Divisor = Quotient	

Vorzeichenregeln

$(+a) \cdot (+b) = +a \cdot b$	$(-a) \cdot (+b) = -a \cdot b$	$(+a) : (+b) = +a : b$	$(-a) : (+b) = -a : b$
$(+a) \cdot (-b) = -a \cdot b$	$(-a) \cdot (-b) = +a \cdot b$	$(+a) : (-b) = -a : b$	$(-a) : (-b) = +a : b$

Rechnen mit Brüchen

Brüche kann man kürzen und erweitern.
Vor dem Addieren und Subtrahieren müssen Brüche auf gleichen Nenner gebracht werden, dann werden die Zähler addiert bzw. subtrahiert, der Nenner bleibt unverändert.
Beim Multiplizieren werden die Zähler und die Nenner jeweils miteinander multipliziert.
Durch einen Bruch dividiert man, indem man mit seinem Kehrwert multipliziert.

Rechnen mit Potenzen

$a \cdot a \cdot ... \cdot a = a^n$ (n Faktoren) $\quad a^1 = a \quad a^0 = 1 \ (a \neq 0)$

Es gilt: $a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \ (a \neq 0)$

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \ (a \neq 0) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \ (b \neq 0) \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Überschlagsrechnung, beschränkte Genauigkeit

Überschlagsrechnungen liefern eine Vorstellung von der Größenordnung eines Ergebnisses bzw. dienen der Kontrolle von Taschenrechnerergebnissen.

Rechnen mit Wurzeln

Quadratwurzel: $x^2 = a \Rightarrow x = \sqrt{a}$, $a \geq 0$, $x \geq 0$

Kubikwurzel: $x^3 = a \Rightarrow x = \sqrt[3]{a}$

Es gilt: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ und $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $b \neq 0$ (gilt analog für Kubikwurzeln)

Dualzahlen (Binärzahlen)
Wird in einem Stellenwertsystem als Basis B = 2 gewählt, erhält man Dualzahlen.
Ziffern: 0, 1; Stellenwerte entsprechen jeweils Zweierpotenzen

Mengen und Aussagen
Menge: Zusammenfassung von (unterscheidbaren) Objekten nach bestimmten Kriterien

Mengenbeziehungen
A = B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist und umgekehrt.
$A \subseteq B$, wenn jedes Element von A auch Element von B ist.
$A \subset B$, wenn $A \subseteq B$ und $A \neq B$.

Mengenoperationen
Die Durchschnittsmenge $A \cap B$ enthält alle Elemente, die in der Menge A UND in der Menge B enthalten sind.
Die Vereinigungsmenge $A \cup B$ enthält alle Elemente, die in der Menge A ODER in der Menge B enthalten sind. ODER ist im mathematischen Sinn (nicht ausschließend) zu verstehen.
Die Differenzmenge $A \setminus B$ enthält alle Elemente, die in A, aber nicht in B vorkommen.

Aussagen
Unter einer Aussage a versteht man eine Behauptung, der immer einer der Wahrheitswerte wahr oder falsch zugeordnet werden kann. Durch die Negation (¬) einer Aussage kehrt sich deren Wahrheitsgehalt um.

Verknüpfung von Aussagen
$a \wedge b$ ... **Konjunktion** (UND)
$a \vee b$ ... **Disjunktion** (ODER)
$a \Rightarrow b$ ... **Implikation**
$a \Leftrightarrow b$ ... **Äquivalenz**

Weitere Aufgaben

Natürliche Zahlen und ganze Zahlen

Aufgaben 1.281 – 1.282: Berechne jeweils das Ergebnis.

1.281 **a)** $3^2 \cdot [(-3) \cdot (-5) - (-2) \cdot (-7)]^2$ **b)** $\{(-1) \cdot [4^3 - 5 \cdot (-2)^2] + 8\}^3$ B

1.282 **a)** $25 - (5 - |-3|) - |-7 + 3|$ **b)** $25 - 5 - |-3| - |-7| + 3$ B

1.283 Kennzeichne auf einem geeigneten Ausschnitt der Zahlengeraden. B
a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 5\}$ **b)** $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| > 2\}$ **c)** $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 8\}$

1.284 Kreuze die Teiler an. B

... ist Teiler von ...	108	270	436	480	1 800	2 310	2 520	3 600
2								
3								
4								
5								
6								
8								
9								
12								
25								

1.285 Bestimme das kleinste gemeinsame Vielfache und den größten gemeinsamen Teiler. B
a) 48, 54 **b)** 270, 108 **c)** 210, 315 **d)** 432, 720

Zahlen und Mengen

AB **1.286** Wenn man eine Primzahl „verkehrt“ liest und so wieder eine Primzahl erhält, nennt man sie Mirp-Zahl, zum Beispiel ist 149 eine Mirp-Zahl, weil auch 941 eine Primzahl ist. Ermittle die Mirp-Zahlen, die kleiner als 50 sind.

BD **1.287** $\text{kgV}(a, b) \cdot \text{ggT}(a, b) = a \cdot b$

1) Prüfe die Behauptung mit $a = 24$, $b = 36$ und $a = 315$, $b = 420$ nach.

2) Versuche mit eigenen Worten zu erklären, warum die Behauptung allgemein gilt.

B **1.288** Kennzeichne das angegebene Intervall auf der Zahlengeraden und gib es in Mengenschreibweise an.

a) $[2{,}5; 7]$ ***b)*** $]-2; 5]$ ***c)*** $[-3; 4[$ ***d)*** $]-5; -1[$

Rationale Zahlen

B **1.289** Gib in Dezimalschreibweise an.

a) $\frac{1}{2}$ ***b)*** $\frac{1}{4}$ ***c)*** $\frac{3}{4}$ ***d)*** $\frac{3}{8}$ ***e)*** $\frac{2}{5}$ ***f)*** $\frac{1}{25}$

B **1.290** Schreibe als gekürzten Bruch an.

a) 0,8 ***b)*** 0,05 ***c)*** 0,15 ***d)*** 0,015 ***e)*** 0,275 ***f)*** 0,004

B **1.291** Berechne das Ergebnis und kürze wenn möglich.

a) $\frac{5}{8} - \frac{7}{12} + \frac{17}{24} - \frac{3}{16} - \frac{2}{3}$ ***b)*** $\frac{1}{3} - \frac{5}{12} + \frac{17}{24} - \frac{4}{9} - \frac{2}{3}$ ***c)*** $\frac{7}{15} - \frac{3}{25} + \frac{1}{5} - \frac{17}{30} + \frac{3}{10}$

B **1.292** Kürze soweit wie möglich und berechne das Ergebnis.

a) $\frac{24}{7} \cdot 21$ ***b)*** $16 : \frac{8}{9}$ ***c)*** $\frac{12}{25} \cdot \frac{15}{16}$ ***d)*** $\frac{5}{11} : 10$ ***e)*** $\frac{6}{5} : \frac{10}{21}$

B **1.293** Berechne und kürze wenn möglich das Ergebnis.

a) $\frac{1}{3} \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{10}\right) + \frac{2}{5}\right]$ ***b)*** $\frac{5}{18} - \left[\frac{1}{6} - \frac{8}{27} : \left(-\frac{32}{3}\right)\right]$ ***c)*** $\frac{1}{2} : \left[\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{15} - \frac{1}{10}\right) + \frac{7}{20}\right]$

B **1.294** Berechne.

a) $\frac{\frac{3}{4}}{9}$ ***b)*** $\frac{5}{\frac{10}{13}}$ ***c)*** $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{6}{7}}$ ***d)*** $\frac{1 - \frac{1}{5}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{8}}$

AB **1.295** In einem Liter Luft sind rund $6 \cdot 10^{21}$ Sauerstoffteilchen und $2 \cdot 10^{16}$ Heliumteilchen. Gib das Verhältnis Helium : Sauerstoff an.

AB **1.296** 2009 fuhren in Österreich 2,2 Millionen PKW mit Diesel, 3 800 waren Hybridautos. Gib das Verhältnis mit möglichst kleinen Zahlen an.

B **1.297** Berechne den Prozentwert, den Grundwert bzw. den Prozentsatz.

a) p % = 18 %, A = 40 km ***c)*** p % = 22 %, G = 95 mg ***e)*** A = 115 m^2, G = 250 m^2

b) G = 150 h, A = 132 h ***d)*** A = 90 d, p % = 35 % ***f)*** G = 450 J, p % = 38 %

ABC **1.298** Der Preis eines Taschenrechners wird in einem Geschäft zuerst von 75,00 € um 8 % gesenkt und dann um 8 % erhöht. In einem anderen Geschäft wird der Preis des gleichen Geräts, das dort ebenfalls 75,00 € kostet, zuerst um 8 % erhöht und dann um 8 % gesenkt. In welchem Geschäft ist der Taschenrechner nun billiger?

B **1.299** Ermittle die Bruchdarstellung.

a) $0{,}\dot{7}$ ***b)*** $0{,}0\dot{3}$ ***c)*** $0{,}\dot{2}\dot{5}$ ***d)*** $0{,}2\dot{5}$

1.300 Berechne das Ergebnis, kürze immer so früh wie möglich. **B**

a) $\dfrac{\frac{13}{3} - \frac{7}{12}}{\left(\frac{7}{16} - \frac{17}{48}\right) \cdot 15}$ **b)** $\dfrac{\frac{2\frac{7}{24}}{2\frac{1}{16}} + 8\frac{64}{117} \cdot \frac{13}{80}}{\frac{1}{5} + \frac{5\frac{19}{25}}{12\frac{12}{35}}}$

1.301 Thomas gibt 80 % seiner Ersparnisse für DVDs aus und kauft anschließend einen Pullover. Jetzt besitzt er noch 20 Cent, das sind 2 ‰ seiner ursprünglichen Ersparnisse. Wie viel Geld hat er für die DVDs ausgegeben und wie viel hat der Pullover gekostet? **AB**

1.302 In einem magischen Quadrat ist die Summe jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonale jeweils gleich. Ergänze die fehlenden Zahlen. **ABC**

a)

$\frac{3}{4}$		$\frac{7}{12}$
	$\frac{1}{2}$	
		$\frac{1}{4}$

b)

$\frac{17}{12}$		
1		
$\frac{13}{12}$		$\frac{11}{12}$

c)

$\frac{13}{15}$		
$\frac{9}{20}$	$\frac{37}{60}$	$\frac{47}{60}$

1.303 Jedes Jahr im Juli finden sich Schlagzeilen wie „Jede zweite Ehe in Österreich scheitert" in den Medien. Die folgenden Daten stammen von Statistik Austria: **ABCD**
2006 gab es rund 1 715 600 verheiratete Paare in Österreich, rund 20 300 davon wurden geschieden. Die Scheidungsrate betrug 48,9 %.

1) Wie viel Prozent aller Ehen wurden 2006 geschieden?
2) Angenommen, 48,9 % aller Ehen wären tatsächlich geschieden worden. Wie viele Scheidungen hätte es dann 2006 gegeben?
3) Verfasse einen Leserbrief an eine Zeitung. Versuche, mithilfe deiner Berechnungen zu erklären, dass die oben angeführte Schlagzeile in dieser Formulierung nicht stimmen kann. Hinweis: Die Scheidungsrate gibt vereinfacht ausgedrückt das Verhältnis der geschiedenen Ehen zu den Eheschließungen an.

Potenzen, Wurzeln, Zehnerpotenzen, Gleitkommadarstellungen

1.304 Rechne im geeigneten Gleitkommaformat und gib das Ergebnis ohne Zehnerpotenzen an. **B**
a) 0,000 2 · 15 000 000 **b)** 0,003 6 : 0,000 009 **c)** $(0{,}01 : 0{,}000\,25)^2$

1.305 Schreibe ohne Zehnerpotenz an. **B**
a) $2{,}5 \cdot 10^3$ **b)** $5{,}8 \cdot 10^{-2}$ **c)** $34{,}6 \cdot 10^{-3}$ **d)** $455 \cdot 10^{-6}$

1.306 Gib die Zahl im normierten Gleitkommaformat und im Engineering Format an. **B**
a) 23 500 **b)** 0,056 **c)** 759 000 **d)** 0,000 041

1.307 Runde auf 3 geltende Ziffern bzw. 2 geltende Ziffern. **B**
a) 159 383 **b)** 5,674 233 **c)** 7 895 640 **d)** 0,004 079 889

1.308 Setze das Komma mithilfe einer Überschlagsrechnung. **B**
a) 239 · 47 = 0 0 1 1 2 3 3 0 0 0 **c)** 0,005 47 · 58 520 = 0 0 3 2 0 1 0 4 4 0 0
b) 930 430 : 48 970 = 0 0 1 9 0 0 **d)** 0,965 55 : 0,007 85 = 0 0 1 2 3 0 0

Zahlen und Mengen

B **1.309** Setze die fehlende Zehnerpotenz ein.

a) $0{,}007\,45\text{ kJ} = 7{,}45 \cdot 10^{?}\text{ J}$

b) $23\text{ mV} = 2{,}3 \cdot 10^{?}\text{ V}$

c) $67\,500\text{ m} = 6{,}75 \cdot 10^{?}\text{ km}$

d) $0{,}000\,088\ \mu\text{m} = 8{,}8 \cdot 10^{?}\text{ nm}$

B **1.310** Ziehe die Wurzel überschlagsweise.

a) $\sqrt{41\,756}$ **b)** $\sqrt{0{,}417\,56}$ **c)** $\sqrt{36\,945}$ **d)** $\sqrt{0{,}080\,9}$

B **1.311** Schreibe mit ganzen Zahlen und Zehnerpotenzen, berechne das Ergebnis und gib es im normierten Gleitkommaformat an.

a) $\frac{0{,}03^2 \cdot 4\,000}{160 \cdot 0{,}09}$ **b)** $\frac{0{,}2^2 \cdot 6\,000}{120 \cdot 0{,}04}$

ABCD **1.312** Bei der Opernballübertragung 2011 wurde im ORF berichtet, dass die Tanzfläche 1 km² groß sei.

1) Kann die angegebene Größe der Tanzfläche stimmen? Vergleiche diese mit der Fläche des 1. Wiener Gemeindebezirks.

2) Welcher Fehler könnte passiert sein? Wie groß kann die Tanzfläche tatsächlich sein?

ABCD **1.313** Die Lichtgeschwindigkeit beträgt rund $3 \cdot 10^5\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$. Runde bei der Beantwortung der folgenden Fragen sinnvoll und wähle ein geeignetes Zahlenformat.

1) Welchen Weg legt das Licht in einer Minute, in einem Tag bzw. in einem Jahr zurück?

2) Der nächstgelegene Fixstern ist der Alpha Centauri im Sternbild Centaur. Er ist ca. 4,2 Lichtjahre von der Erde entfernt. Gib die Entfernung in Kilometern an.

3) Der Andromedanebel ist eine der Milchstraße ähnliche Galaxie. Er hat von der Erde eine Entfernung von rund $2 \cdot 10^6$ Lichtjahren. Wie viel Kilometer sind das?

Dualzahlen

B **1.314** Gib die Dezimalzahl als Dualzahl an.

a) 23 **b)** 39 **c)** 127 **d)** 358 **e)** 513

B **1.315** Gib als Dezimalzahl an.

a) 101011_2 **b)** 10000101_2 **c)** 111111_2 **d)** 10101010_2

B **1.316** Berechene a + b, a – b und a · b. Mach die Probe durch Umrechnen in Dezimalzahlen.
$a = 10010101_2$, $b = 1110001_2$

Mengen und Aussagen

BC **1.317** $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$, $B = \{2n \mid (n \in \mathbb{N}) \wedge (n < 6)\}$, C = {Primzahlen kleiner 30}

1) Gib B und C im aufzählenden Verfahren an.

2) Gib im aufzählenden Verfahren an und stelle mithilfe von Mengendiagrammen dar:
$A \cap C$, $B \cup C$, $A \setminus C$

B **1.318** Bestimme den Wahrheitsgehalt der aussagenlogischen Formel.

a) $\neg p \wedge s \vee r \vee q \Rightarrow \neg p$ **b)** $\neg p \wedge s \Leftrightarrow r \vee \neg q$

Wissens-Check

		gelöst
1	Ich kenne die Zahlenmengen und ihre Beziehungen zueinander.	
2	Ich kann die Begriffe ggT und kgV erklären und anwenden, zB: ggT(144, 216) = ... kgV(32, 48) = ...	
3	Wenn a eine negative Zahl ist, dann gilt $\lvert a \rvert$ = ... ZB: $\lvert -3 \rvert$ = ...	
4	Setze richtig ein: Damit man Brüche addieren kann, muss man sie auf gleichen ... bringen. Der ... ist das kleinste gemeinsame ... der Einzel	
5	Gib als Dezimalzahl an: $\frac{14}{25}$; $\frac{8}{11}$	
6	Vereinfache den Doppelbruch: $\frac{1+\frac{1}{3}}{4}$	
7	Ich kann Ausdrücke, die Klammern erfordern, korrekt in den Taschenrechner eingeben. ZB: $\frac{\frac{2}{3}+1}{5} - 7$	
8	Setze die richtig Zahl ein: A: 15 % von ... sind 48,00 €. B: 21,00 € sind ... % von 70,00 €.	
9	Ich kann die Rechenregeln für Potenzen richtig anwenden. $(-2)^3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$ = ...	
10	Ich kann Größen in normiertem Gleitkommaformat angeben und mit Einheitenvorsilben rechnen. $0{,}345 \cdot 10^{-5}$ kV = ... V	
11	Ich kann den Vorgang beim überschlagsweisen Wurzelziehen erklären.	
12	$17_{10} + 1001001_2 = \ldots_2$	
13	Ist die Aussage wahr oder falsch? Begründe deine Antwort. A: ¬ („In der Klasse sind höchstens 20 Personen.") ⇔ „In der Klasse sind mindestens 20 Personen." B: $(x \in M_1) \wedge (x \in M_2) \Rightarrow x \in (M_1 \cap M_2)$	

Lösung:
1) siehe Seite 24 2) 72; 96; siehe Seite 9 3) –a; 3
4) Nenner – gemeinsame Nenner – Vielfache – -nenner
5) 0,56; $0,\dot{7}\dot{2}$ 6) $\frac{1}{3}$ 7) (2/3+1)/5-7 8) A: 320,00 €; B: 30
9) –18 10) $3{,}45 \cdot 10^{-3}$ V 11) siehe Seite 40 12) 1011010_2 13) A: falsch; B: wahr

2 Terme und Variablen

Als sich vor ca. 4 000 Jahren die ersten Schriften entwickelten, gab es bereits Zeichen für Zahlen. Variablen, also Buchstaben als Platzhalter anstelle konkreter Zahlen, sind hingegen eine „moderne" Entwicklung. Zwar begannen arabische Mathematiker um 800 n. Chr. mit der Verwendung von Formeln und Variablen, aber erst im Europa des 17. Jahrhunderts setzte sich diese Schreibweise in mathematischen Kreisen durch. Bis dahin gab es keine einfache Möglichkeit, mathematische Zusammenhänge, wie zum Beispiel den Zusammenhang zwischen der Seitenlänge und dem Flächeninhalt eines Quadrats, kurz und präzise anzugeben. Der französische Mathematiker René Descartes (1596 – 1650) war einer der Ersten, der den Buchstaben x als Platzhalter für eine unbekannte Zahl verwendete. Mit der Verwendung von Termen – das sind sinnvolle mathematische Ausdrücke, die Zahlen, Variablen und Rechenzeichen enthalten können – nahm die Wissenschaft Mathematik einen enormen Aufschwung.

2.1 Grundbegriffe

A **2.1** Zeichne ein Dreieck und bezeichne die Winkel mit den griechischen Buchstaben α, β und γ. Versuche folgende Formulierung von Euklid (griechischer Mathematiker, 4. Jh. v. Chr.) mithilfe von Variablen anzuschreiben:
In jedem Dreieck sind zwei Winkel, beliebig zusammengenommen, kleiner als zwei rechte (Winkel).
(Die Elemente, 1. Buch, § 17)

Anhand eines Beispiels soll nun gezeigt werden, worin die Vorteile von Variablen liegen und wie deren Verwendung die Mathematik vereinfacht. In den wohl berühmtesten Mathematikbüchern, den „Elementen" von Euklid, der „Vater der Geometrie" genannt wird, steht geschrieben:

Am rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite den Quadraten über den den rechten Winkel umfassenden Seiten zusammen gleich.
(Die Elemente, 1. Buch, § 47)

So lautet einer der bekanntesten mathematischen Sätze ohne Verwendung von Variablen. Wie könnte diese Aussage mit Variablen formuliert werden? Verwende ein wie üblich beschriftetes rechtwinkliges Dreieck und du erhältst eine dir schon bekannte Formel: $c^2 = a^2 + b^2$

Mit Variablen lassen sich mathematische Zusammenhänge formulieren. Wie aus obigem Beispiel ersichtlich ist, können drei Buchstaben zusammen mit den entsprechenden Zahlen und Rechenzeichen genauso viel aussagen wie 148 Buchstaben, nur einfacher und schneller.

Variablen sind Buchstaben oder andere Symbole, die als Platzhalter für Zahlen dienen.
Ein **Term** ist ein sinnvoller, mathematischer Ausdruck, der aus Zahlen, Variablen und Rechenzeichen besteht.

A

2.2 Verwende x als Platzhalter für eine beliebige Zahl. Schreibe den Text vereinfacht als Term an.

a) das Dreifache der Zahl
b) die Hälfte der Zahl
c) die um vier verminderte (verkleinerte) Zahl
d) das Siebenfache der um acht vergrößerten Zahl

Lösung:

a) $3 \cdot x$
- „Das Dreifache der Zahl" bedeutet, dass die Zahl x mit drei multipliziert wird.

b) $\frac{x}{2}$ oder $\frac{1}{2} \cdot x$ oder $0{,}5 \cdot x$
- „Die Hälfte der Zahl" bedeutet, dass die Zahl x halbiert wird.

c) $x - 4$
- „Die um vier verminderte Zahl" bedeutet, dass von der Zahl x vier subtrahiert wird.

d) $7 \cdot (x + 8)$
- „Die um acht vergrößerte Zahl" bedeutet, dass zu der Zahl x acht addiert wird. Dieser Term wird mit sieben multipliziert.

Durch Belegung der Variablen eines Terms mit Zahlenwerten kann ein nicht sinnvoller Ausdruck entstehen. Daher muss man diese Werte angeben.

ZB: Für $\frac{1}{x-4}$ muss $x \neq 4$ gelten; beim Term $\sqrt{x-1}$ muss $x \geqslant 1$ angegeben werden.

Für eine Variable als Platzhalter dürfen beim Einsetzen von Zahlenwerten nur jene Zahlen verwendet werden, die sinnvolle Ausdrücke ergeben. Alle Werte für Variablen, die nicht auf sinnvolle Ausdrücke führen, müssen angegeben werden.

Einige Terme haben eigene Bezeichnungen; die wichtigsten sind hier im Überblick aufgelistet:

Bezeichnung	Beispiele
Monom: eingliedriger Term, die Variablen kommen nicht im Nenner eines Bruchs vor	$-4{,}78$; x; $5a$; $\frac{5}{7}x$; $-2y^2$; a^3b^5
Binom (zweigliedriger Term): Summe oder Differenz zweier Monome	$a + b$; $-2x^2 - 4y$; $6y^2 - 0{,}8ax$
Polynom (mehrgliedriger Term): Summe oder Differenz von mehreren Monomen	$a + b + c$; $4 - 5y^2 + x^3y^2$
Polynom in einer Variablen (ganzrationaler Term): Die Monome sind meist nach absteigender Hochzahl geordnet; die größte Hochzahl der Variablen nennt man den **Grad des Polynoms**.	$4x^2 - 6x + 9$ ... Polynom 2. Grads oder quadratisches Polynom $x^4 + x^3 - 52$ ... Polynom 4. Grads
Bruchterm (gebrochen rationaler Term): mindestens eine Variable steht im Nenner	$\frac{5}{x}$; $\frac{65x}{yz}$; $\frac{x^2+6}{x^3-3}$

Faktoren, die vor den Variablen stehen, werden **Koeffizienten** genannt, zB 5 bei $5 \cdot a$. Der Malpunkt zwischen Koeffizient und Variable wird meist weggelassen, zB $5 \cdot a = 5a$. Ebenso wird der Koeffizient 1 üblicherweise weggelassen, zB $1x^2 = x^2$.

Terme und Variablen

Aufgaben 2.3 – 2.6: Verwende x als Platzhalter für eine beliebige Zahl und schreibe den Text als Term an.

A **2.3** ***a)*** das Fünffache der Zahl
b) die um neun verkleinerte Zahl
c) ein Drittel der Zahl
d) die um 17 vergrößerte Zahl
e) die um 78 vermehrte Zahl
f) die durch vier dividierte Zahl
g) die um 36 verminderte Zahl
h) die mit neun multiplizierte Zahl

A **2.4** ***a)*** ein Viertel vom Siebenfachen der Zahl
b) das Doppelte der Zahl, um fünf vermindert
c) neun vermehrt um das Drittel der Zahl
d) das Dreifache von der Hälfte der Zahl

A **2.5** ***a)*** das Doppelte der um drei vergrößerten Zahl
b) das Sechsfache der um zwei verkleinerten Zahl
c) die Hälfte der um sieben vermehrten Zahl
d) ein Fünftel der um fünf verminderten Zahl

A **2.6** ***a)*** Die Differenz zwischen der Zahl und drei wird durch sieben dividiert.
b) Die Summe von der Zahl und vier wird mit fünf multipliziert.
c) Das Produkt aus der Zahl und sieben wird um zwei vermindert.
d) Der Quotient aus der Zahl und zwei wird um $\frac{1}{2}$ vermehrt.

A **2.7** Schreibe die Rechenanweisung, die zu folgendem Term führt, in Worten an.

a) $4x$ ***c)*** $x - 5$ ***e)*** $5 - 2x$ ***g)*** $\frac{5x - 6}{11}$

b) $\frac{x}{5}$ ***d)*** $7 + x$ ***f)*** $\frac{x}{3} + 7$ ***h)*** $\frac{6 + 13x}{5}$

ABC **2.8** Mario geht in Wien eine Straße stadtauswärts entlang und bleibt vor dem siebenten Haus der linken Straßenseite stehen. Finde im Internet heraus, wie in Wien die Hausnummern zugeordnet werden. Bei welcher Hausnummer steht Mario? Gib einen Term für die Hausnummern des n-ten Hauses der linken Seite an. Welche Voraussetzungen triffst du dabei?

A **2.9** Eine Lehrerin geht mit x Kindern ins Kino. Jedes Kind nimmt als Begleitung seine Eltern mit. Im Saal sitzen schon acht Personen. Stelle einen Term für die Anzahl aller ***1)*** Köpfe, ***2)*** Hände und ***3)*** Finger im Saal auf.

C **2.10** An einem Wintertag fehlten in einer Klasse mit s Schülern drei Schüler den ganzen Tag, vier kamen um 10 Minuten zu spät und zwei um zwei Stunden. Für welche Zeitspanne beschreibt der gegebene Term die Anzahl der anwesenden Schüler?
1) $s - 3$ ***2)*** $s - 5$ ***3)*** $s - 9$

ACD **2.11** Du möchtest s Schrauben auf k Kisten gleichmäßig aufteilen. Wie lautet der Term zur Berechnung der Anzahl der Schrauben pro Kiste? Ist es immer möglich, gleich viele Schrauben in jede Kiste zu geben? Begründe deine Antwort.

2.12 Verwende als erste Zahl x und als zweite Zahl y und schreibe den Text als Term an. **A**

a) Die Summe einer Zahl und elf wird mit der zweiten Zahl multipliziert.
b) Vermindere das Dreifache einer Zahl um fünf und dividiere durch die zweite Zahl.
c) Das Drittel der Differenz zweier beliebiger Zahlen wird gebildet.
d) Das Produkt einer Zahl und fünf wird durch eine zweite Zahl dividiert.

2.13 Kreuze alle Terme an, die den Text beschreiben. Begründe deine Auswahl. **AD**

1) der Quotient aus der Summe zweier Zahlen und der Differenz einer der Zahlen und sieben

◯ $\frac{x - y}{x - 7}$ ◯ $\frac{x + y}{x - 7}$ ◯ $\frac{x + y}{y + 7}$ ◯ $\frac{x + y}{y - 7}$

2) das Zehnfache des Dreifachen einer Zahl vermehrt um neun

◯ $10 \cdot x \cdot (3 + 9)$ ◯ $10 \cdot (3x + 9)$ ◯ $10 \cdot 3x + 9$ ◯ $10 \cdot 3 \cdot (x + 9)$

3) das Produkt der Differenz zweier Zahlen und der Summe des Vierfachen der ersten Zahl und des Dreifachen der zweiten Zahl

◯ $x \cdot y - 4x + 3y$ ◯ $x - y \cdot (4x + 3y)$ ◯ $(x - y) \cdot 4x + 3y$ ◯ $(x - y) \cdot (4x + 3y)$

2.14 Ermittle den Wert des Terms für $x = 2$, $y = 3$ und $z = 4$. **B**

a) $5x - 2$ **c)** $4x + 3y - 2z$ **e)** $8xy - 12yz + 3zx$

b) $\frac{x + y}{3}$ **d)** $\frac{2x + 3y}{z}$ **f)** $\frac{3x}{z - y}$

2.15 Berechne, wenn möglich, den Wert des Terms für die gegebenen Zahlen. Falls das nicht möglich ist, begründe warum. **BD**

a) $\frac{x^3}{4} + \frac{x}{2}$ für $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$ **c)** $\frac{5}{x^2}$ für $x = 2$, $x = 0$, $x = -4$

b) $\sqrt{x}$ für $x = 16$, $x = 0$, $x = -4$ **d)** $\sqrt{x - 6}$ für $x = 2$, $x = 6$, $x = -2$

2.16 Auf einem Parkplatz stehen a Autos und m Motorräder. **AC**

1) Gib einen Term für die Anzahl der Reifen an. Welche Annahmen triffst du dabei?
2) Um wie viele Reifen mehr befinden sich am Parkplatz, wenn die Anzahl der Autos verdoppelt wird?
3) n Motorräder verlassen den Parkplatz, k treffen ein. Wieviele Motorräder stehen nun auf dem Parkplatz?

2.17 Eine zweite Klasse mit n Schülerinnen und Schülern fährt auf Wintersportwoche. Ein Sechstel der Klasse geht langlaufen und benötigt keinen Schipass, der Rest fährt Schi oder Snowboard. Der Elternverein unterstützt alle Teilnehmer mit 70,00 € und übernimmt zusätzlich 30,00 € von den Kosten für jeden Schipass. Stelle einen Term für die vom Elternverein übernommenen Kosten auf. **A**

2.18 Gib die passende Formel für die gesuchte Größe an und beschreibe sie mit eigenen Worten. **AC**

a) Fläche eines Rechtecks
b) Umfang eines Quadrats
c) Oberfläche eines Quaders
d) Volumen eines Würfels

2.2 Rechenregeln

Rechengesetze, die für Zahlen gültig sind, gelten im Allgemeinen auch für Variablen. Dazu zählen die Vorrangregeln (Punktrechnung vor Strichrechnung), die Vorzeichenregeln sowie Assoziativ- und Kommutativgesetz (vergleiche dazu Abschnitt 1).

Termumformungen können kontrolliert werden, in dem sowohl in die Angabe (den Anfangsterm) als auch in das Ergebnis (den Endterm) für gleiche Variablen gleiche Zahlen eingesetzt werden. Um einen Fehler bei der Probe nicht zu wiederholen, sollte, wenn möglich, ein anderer Rechenweg als bei der ursprünglichen Termumformung gewählt werden (zum Beispiel Klammern ausrechnen statt auflösen). Stimmen die beiden Ergebnisse dieser Probe nicht überein, dann wurde bei der Termumformung (oder der Probe) ein Fehler gemacht. Bei Übereinstimmung ist jedoch die Richtigkeit nicht garantiert. Die eingesetzten Zahlen können den Fehler nicht anzeigen, wenn man zum Beispiel die Probe mit 0 oder 1 durchführt oder Rechenfehler sich zufällig aufheben.

Addition und Subtraktion von Monomen

Monome, die sich nur durch ihre Koeffizienten unterscheiden, können addiert bzw. subtrahiert werden, indem die Anzahl der Terme zusammengefasst wird. Terme, die unterschiedliche Variablen enthalten, können hingegen nicht addiert bzw. subtrahiert werden.

B **2.19** Vereinfache den folgenden Term soweit wie möglich und führe eine Probe mit $x = 2$ und $y = 3$ durch.

a) $5xy + 7xy$ ***b)*** $14x - 9xy - y - 6x + 5y$

Lösung:

a) $5xy + 7xy = 12xy$

Probe: Angabe: $5 \cdot 2 \cdot 3 + 7 \cdot 2 \cdot 3 = 30 + 42 = 72$

Ergebnis: $12 \cdot 2 \cdot 3 = 72$

b) $14x - 9xy - y - 6x + 5y = 14x - 6x - 9xy - y + 5y = 8x - 9xy + 4y$

Probe: Angabe: $14 \cdot 2 - 9 \cdot 2 \cdot 3 - 3 - 6 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 28 - 54 - 3 - 12 + 15 = -26$

Ergebnis: $8 \cdot 2 - 9 \cdot 2 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 16 - 54 + 12 = -26$

BCD **2.20** Beim Vereinfachen des Terms $2x + 2xy + 2x$ erhält Lukas ein falsches Ergebnis:
$2x + 2xy + 2x = 4x^2 + 2xy$
Für die Probe verwendet er für $x = 1$ und $y = 3$ und erhält:
Angabe: $2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 2 + 6 + 2 = 10$
Ergebnis: $4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 3 = 4 + 6 = 10$

1) Erkläre, warum der Fehler bei der Probe nicht „entdeckt“ wurde.

2) Führe eine Probe durch, die den Fehler aufdeckt und stelle das Ergebnis richtig.

Lösung:

1) Aufgrund der Wahl von $x = 1$ wurde der Fehler nicht entdeckt, da dann $x^2 = x = 1$ ist.

2) Probe mit $x = 3$ und $y = 5$:

Angabe: $2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 6 + 30 + 6 = 42$

Ergebnis: $4 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 = 36 + 30 = 66 \implies 42 \neq 66$

Korrektur: $2x + 2xy + 2x = 4x + 2xy$

Ergebnis: $4 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 5 = 12 + 30 = 42 \implies 42 = 42$

Multiplikation und Division von Monomen

Monome mit unterschiedlichen Variablen werden multipliziert bzw. dividiert, indem ihre Koeffizienten multipliziert bzw. dividiert werden. Die Multiplikation von Monomen mit gleichen Variablen wird im Abschnitt „Potenzen", die Division im Abschnitt „Bruchterme" behandelt.

2.21 Vereinfache den folgenden Term. B

a) $3x \cdot 6y$ ***b)*** $18a : 5$

Lösung:

a) $3x \cdot 6y = 3 \cdot 6 \cdot x \cdot y = 18xy$ ***b)*** $18a : 5 = 18 : 5 \cdot a = 3{,}6a$

Klammernregeln

Beim Auflösen von Klammerntermen müssen die Vorzeichenregeln beachtet werden.

Ein **Minus vor einem Klammernterm** ändert beim Weglassen der Klammern jedes Vor- und Rechenzeichen im Klammernterm.

2.22 Vereinfache den Term und führe die Probe für a = 2 und b = 3 durch. B

$4 + (3a - 2b) - (5a - b + 6)$

Lösung:

$4 + (3a - 2b) - (+5a - b + 6) = 4 + 3a - 2b - 5a + b - 6 = -2a - b - 2$

Probe: Angabe: $4 + (3 \cdot 2 - 2 \cdot 3) - (5 \cdot 2 - 3 + 6) = 4 + (6 - 6) - (10 - 3 + 6) = 4 - 13 = -9$

Ergebnis: $-2 \cdot 2 - 3 - 2 = -9$

Multiplikation von Polynomen

Beim Multiplizieren von Polynomen wird das Distributivgesetz angewendet.

Distributivgesetz	**Herausheben von Faktoren**
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$	$a \cdot c + b \cdot c = (a + b) \cdot c$

2.23 Multipliziere die Terme. B

$6x \cdot (y + 3z - 1)$

Lösung:

$6x \cdot (y + 3z - 1) = 6x \cdot y + 6x \cdot 3z - 6x \cdot 1 = 6xy + 18xz - 6x$

2.24 Hebe aus dem Term 5ab – 15ac den Faktor (–5a) heraus und beschreibe deine Schritte. BC

Lösung:

$5ab - 15ac = -5a \cdot (-b + 3c)$

Beschreibung:

Da eine negative Zahl herausgehoben wird, müssen die Vorzeichen geändert werden.

Terme und Variablen

Soll ein Term als Produkt angeschrieben werden („faktorisiert werden"), so kann man das zum Beispiel durch Herausheben von Faktoren erreichen. Man erhält dann ein Produkt mit einem Klammernterm.

B **2.25** Zerlege den Term $24xy - 6$ in Faktoren und kontrolliere anschließend durch Ausmultiplizieren.

Lösung:
$24xy - 6 = 6 \cdot 4xy - 6 \cdot 1 =$
$= 6 \cdot (4xy - 1)$

Kontrolle:
$6 \cdot (4xy - 1) = 6 \cdot 4xy - 6 \cdot 1 = 24xy - 6$

- Der ggT(24, 6) = 6 kann herausgehoben werden.
- Vergiss nicht, beim Herausheben 1 anzuschreiben.

Um Klammerterme zu multiplizieren wird das Distributivgesetz wiederholt angewendet.

Polynome werden multipliziert, indem jeder Summand der einen Summe mit jedem Summanden der anderen Summe multipliziert wird. Bei Differenzen wird analog vorgegangen.

Merkhilfe: „Jedes mit jedem multiplizieren."

B **2.26** Multipliziere die Klammern $(4x - 5) \cdot (5y + 8)$ und führe die Probe mit $x = 3$ und $y = 4$ durch.

Lösung:
$(4x - 5) \cdot (5y + 8) = 4x \cdot 5y + 4x \cdot 8 - 5 \cdot 5y - 5 \cdot 8 =$
$= 20xy + 32x - 25y - 40$

Probe: Angabe: $(4 \cdot 3 - 5) \cdot (5 \cdot 4 + 8) = 7 \cdot 28 = 196$
Ergebnis: $20 \cdot 3 \cdot 4 + 32 \cdot 3 - 25 \cdot 4 - 40 = 196$

- Bei der Probe werden zuerst die Rechnungen in den Klammern ausgeführt.

BC **2.27** Zerlege den Term $4ab - 4ac + 3b - 3c$ in Faktoren und beschreibe deine Schritte.

Lösung:
$4ab - 4ac + 3b - 3c = 4a \cdot (b - c) + 3 \cdot (b - c) =$
$= (4a + 3) \cdot (b - c)$

Beschreibung:
Herausheben von 4a bzw. 3,
erneutes Herausheben von $(b - c)$

Beachte den Unterschied zwischen $2 \cdot (a \cdot b)$ und $2 \cdot (a + b)$:
$2 \cdot (a \cdot b)$ stellt die **Multiplikation eines Produkts** mit 2 dar. Es gilt das Assoziativgesetz, die Klammern können deshalb weggelassen werden:
$2 \cdot (a \cdot b) = 2 \cdot a \cdot b = 2ab$.
$2 \cdot (a + b)$ stellt die **Multiplikation einer Summe** mit 2 dar. Das Distributivgesetz muss angewendet werden, die Klammern dürfen nicht weggelassen werden:
$2 \cdot (a + b) = 2 \cdot a + 2 \cdot b = 2a + 2b$

D **2.28** Zeige anhand eines Beispiels, dass $2 \cdot (a \cdot b) \neq 2a \cdot 2b$ ist.

CD **2.29** Peter bekommt für vier Stunden Babysitten 4 · 7,00 €. Susi bekommt für dieselbe Arbeit das Doppelte bezahlt. Welche Rechnung beschreibt ihre Einkünfte: 8 · 14,00 € oder 4 · 14,00 €? Begründe deine Entscheidung.

Addition und Subtraktion von Monomen

Aufgaben 2.30 – 2.31: Fasse die Terme zusammen und führe die Probe für $x = 2$ und $y = 3$ durch.

2.30 **a)** $4x + 6y + 9x - 5y$ **b)** $y + 5x - 8y - 7x$ B

2.31 **a)** $7y + 13x - 6y - 11x + y - 2x$ **b)** $18y + 9x - 8y + 5x - 17y + 7x$ B

Klammernregeln

Aufgaben 2.32 – 2.33: Vereinfache die Terme so weit wie möglich.

2.32 **a)** $15a + (+27a) - (+5a)$ **b)** $6c - (+42c) + (-18c)$ **c)** $24b - (+11b) + (-18b)$ B

2.33 **a)** $-14e + 25f - (-18e) + (-22f)$ **c)** $36f + (-19e) - (-33e) + (-11f)$ B
b) $-23g - (-11h) + 42g - (-8h)$ **d)** $33h - 30k - (-24k) + (-17h)$

Aufgaben 2.34 – 2.35: Löse die Klammern auf und vereinfache die Terme so weit wie möglich.

2.34 **a)** $16a + 4b - (11a + 8b)$ **c)** $7f - 9g + (18g + 4f) - 15g$ B
b) $19d - (-2d - 17e) - 6e$ **d)** $19h - 6k - (-21k - 17h) + 24k$

2.35 **a)** $16n + (4 - 18n) + 11 - (21m + 12n)$ **c)** $17n - (k + 4) + (-3k + 6n) - 23$ B
b) $19 - (-4k + m) + (9m + 5) - 18k$ **d)** $16n + (-6m + 11) - (13n - 12) + 17$

2.36 In drei Schülerheften wurde folgender Term vereinfacht. CD
$-(4a - 2b) + (-6a - 2b)$
Welche Fehler wurden gemacht? Begründe deine Antwort.
A) $4a + 2b + 6a - 2b = 10a$ **B)** $4a + 2b - 6a - 2b = 2a$ **C)** $-4a - 2b - 6a - 2b = -10a - 2b$

Aufgaben 2.37 – 2.38: Vereinfache die Terme und beschreibe deine Vorgangsweise.

2.37 **a)** $[14p - (12 - 7q)] - 15p$ **c)** $4p - [(22 - 20q) - 14p] - 19p$ BC
b) $[-32p - (11q - 26p)] - (-q)$ **d)** $-30q - [-(18q - 2p) + 33]$

2.38 **a)** $[18r - 40r + (-16s + 22r)] - 11s$ **c)** $8{,}4s + [-(12{,}5s + 6{,}9r - 4{,}5) + 16{,}1r]$ BC
b) $-22s + [-45r - (16s + 10r) - 18s]$ **d)** $-[(9{,}99r + 18{,}1s) - (-11{,}99s)] + (-15{,}1r)$

2.39 Vereinfache die Terme. B
a) $-4{,}9y + \{6{,}8z - 8{,}1x + [4{,}01y - 2{,}9x - (7{,}8x - 1{,}2z)] + 3{,}9x\} - 3{,}01z$
b) $10{,}1z - \{5{,}01y - 3{,}01x + [-4{,}01z + (4{,}9x - 0{,}6y) + 5{,}5y + 6{,}1x] - 8{,}9x\}$

Aufgaben 2.40 – 2.41: Vereinfache die Terme, die – wie in der Informatik üblich – ausschließlich runde Klammern enthalten.

2.40 **a)** $4s - (3r - (9s + 6t - 7r) + 4t)$ **c)** $7r + (-4t + (3r + 8s) - (12t + 6s))$ B
b) $(8r + (4r - 6t + 4s - 12t)) + 3s$ **d)** $5t - (3s - (6r + 8t) - (7r + 3s))$

2.41 **a)** $7x - (8y + (6 + 9y) - (10x + 5y))$ **c)** $-9 + (7y - (3y - 3x) - (3x + 5y))$ B
b) $y - (y - 2x + (-x - 3y) - (y - 5x))$ **d)** $-x - (2x - (y - (4x - y) - y) - 7y)$

Aufgaben 2.42 – 2.43: Setze fehlende Klammern jeweils so ein, dass das Ergebnis richtig ist.

2.42 **a)** $x - y - z - x - y - z = 0$ **c)** $(x - y - z - x - y - z = -2y$ C
b) $(x - y - z - x - y - z = 2x - 2z$ **d)** $x - y - z - x - y - z = -2y + 2z$

2.43 **a)** $v - \{2x - [3y - 4z - z - 2y - 3x - 4v = 5v - 5x + y - 5z$ C
b) $\{v - [2x - 3y - 4z - z - 2y - 3x - 4v = -3v - 5x + y - 3z$

Multiplikation von Monomen und Polynomen

Aufgaben 2.44 – 2.46: Berechne.

B **2.44** **a)** $(+8) \cdot (+2) \cdot (-g)$ **b)** $(-k) \cdot (+4) \cdot (-8)$ **c)** $(-2h) \cdot (+11) \cdot (-1)$

B **2.45** **a)** $(-2) \cdot \left(-\frac{5}{4}m\right) \cdot (+7) \cdot (-10)$ **b)** $(-4) \cdot \left(-\frac{5}{6}p\right) \cdot (+4) \cdot (+8)$ **c)** $(-3) \cdot \left(-\frac{7}{9}\right) \cdot (-3n) \cdot (-1)$

B **2.46** Vereinfache den Term und führe die Probe für a = 2 durch.
a) $3 \cdot 7a - 4 \cdot 3a$ **c)** $-6 \cdot (-a) + 2 \cdot (-5a)$ **e)** $-5 \cdot 5a + (-7) \cdot 2a$
b) $-2 \cdot \frac{1}{4}a - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}a\right)$ **d)** $-3 \cdot \left(-\frac{1}{4}a\right) - (-2) \cdot \left(-\frac{3}{4}a\right)$ **f)** $5 \cdot \left(-\frac{2}{5}a\right) - \frac{4}{5} \cdot (-5a)$

Aufgaben 2.47 – 2.49: Vereinfache die Terme soweit wie möglich.

B **2.47** **a)** $4 \cdot (2x - 7) - 7 \cdot (-x + 3)$ **c)** $(3 - 2x) \cdot (-5) - 6 \cdot (3x - 5)$
b) $-2 \cdot (5x - 1) + 3 \cdot (-2x - 1)$ **d)** $(1 - 9x) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + (-1 - 3x) \cdot \left(-\frac{8}{9}\right)$

B **2.48** **a)** $4 \cdot (d - 4) - 2 \cdot (2d + 3) + (5 - 8d) \cdot 6$ **c)** $5 \cdot (c + 3) - (-6c - 9) \cdot 7 + 2 \cdot (1 + 5c)$
b) $(3b - 7) \cdot (-9) + (1 - 11b) - 3 \cdot (-6b + 9)$ **d)** $-\left(12a + \frac{1}{2}\right) + 4 \cdot (a + 9) - \frac{1}{4} \cdot (-3 - 28a)$

B **2.49** **a)** $7c \cdot (a + 3b) - (5c - b) \cdot 3a - 6b \cdot (a + c)$ **c)** $k \cdot (h + 9g) + (2k - 5h) \cdot g - 7h \cdot (3g + k)$
b) $8q \cdot (p + 3r) - p \cdot (4r + 2q) + (2p + q) \cdot r$ **d)** $\left(x + \frac{y}{5}\right) \cdot 5z + 3y \cdot \left(\frac{x}{2} + 12z\right) - x \cdot \left(z + \frac{y}{2}\right)$

Aufgaben 2.50 – 2.54: Schreibe den Term als Summe an.

B **2.50** **a)** $(5x + 3) \cdot (2y + 5)$ **b)** $(4a + 7) \cdot (3b - 5)$ **c)** $(-3n + 1) \cdot (5m - 2)$

B **2.51** **a)** $(7x - 2y) \cdot (-a + 3b)$ **b)** $(-2x + 3a) \cdot (5y - 2b)$ **c)** $(-2a - 3y) \cdot (5x - 3b)$

B **2.52** **a)** $(8r - 1) \cdot (6s - 7) - (s + 11) \cdot (2r - 9)$ **c)** $(9z + 3) \cdot (3y - 7) - (2y - 1) \cdot (12z - 5)$
b) $(10a - b) \cdot (5c - 7) - (9a + 1) \cdot (4b - 8c)$ **d)** $(2p + 1) \cdot (q - 5r) - (8p + 6r) \cdot (2q - 3)$

B **2.53** **a)** $-9 \cdot (2a + 4b) \cdot (x - y + 8) - (4a + 3b - 1) \cdot (2x + 7y) \cdot 4$
b) $(7a + 9b + 4) \cdot 6 \cdot (3x - 4y) + (-3) \cdot (y - 2x) \cdot (10a - b - 1)$

B **2.54** **a)** $-(3a - 6b + 4) \cdot (5x - 3y + 9) - (8 + 5y - x) \cdot (-5) \cdot (9a + 2b - 10)$
b) $(7x + 3y - 6) \cdot (-1) \cdot (-4a + 7b + 5) + 2 \cdot (-3a + 8b - 1) \cdot (9x + 2y - 4)$

ACD **2.55** Monika hat sich für Hannes ein Zahlenrätsel ausgedacht. Hannes soll sich eine Zahl ausdenken, zu dieser fünf addieren, die Summe vervierfachen und davon wieder acht subtrahieren, das Ganze mal 25 nehmen und zweihundert dazu zählen und zum Schluss alles noch einmal durch hundert dividieren. Hannes sagt Monika das Ergebnis, sie zieht fünf davon ab und kann Hannes ursprüngliche Zahl nennen.
1) Begründe mithilfe von Termen, wie Monika das Ergebnis wissen kann.
2) Arbeitet zu zweit ein eigenes Zahlenrätsel aus und präsentiert es der Klasse.

D **2.56** Erkläre, warum das Ergebnis von $(x - a) \cdot (x - b) \cdot \ldots \cdot (x - z)$ auch ohne Auszumultiplizieren angeschrieben werden kann.

Herausheben von Faktoren

Aufgaben 2.57 – 2.58: Setze die fehlenden Terme ein.

BC **2.57** **a)** $xz + 4z = z \cdot (\ldots)$ **c)** $24xy + 18x = 2x \cdot (\ldots)$ **e)** $16ab - 24ac = -8a \cdot (\ldots)$
b) $7z - 4z = z \cdot (\ldots)$ **d)** $-6x - 100xz = 2x \cdot (\ldots)$ **f)** $-16am + 80an = -8a \cdot (\ldots)$

BC **2.58** **a)** $12ax + ? = 2x \cdot (? + 14)$ **c)** $-2x + ? = 2x \cdot (? + 44yz)$ **e)** $-8a + ? = -8a \cdot (? + 5bc)$
b) $? + 6xy = 2x \cdot (13 + ?)$ **d)** $? - 88ab = -8a \cdot (-5c + ?)$ **f)** $? - \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{4} \cdot (-t + ?)$

Aufgaben 2.59 – 2.60: Gib jeweils den Term als Produkt an.

2.59 **a)** $15a - 5$ **b)** $6 + 18b$ **c)** $21m + 28$ **d)** $15 - 30n$ **e)** $14xy - 7z$ **f)** $81y + 72xy$ **g)** $27ab - 18b$ **h)** $25ab + 55a$ — B

2.60 **a)** $a \cdot (x + 1) - b \cdot (x + 1)$ **b)** $2a \cdot (3b + 2) - x \cdot (3b + 2)$ **c)** $(2a + b) \cdot x - (2a + b)$ **d)** $y \cdot (a + 7b) + (a + 7b)$ — B

Aufgaben 2.61 – 2.65: Gib jeweils den Term als Produkt an. Kontrolliere durch Ausmultiplizieren.

2.61 $2r - s - 6rt + 3st$ — B

Lösung:

$2r - s - 6rt + 3st = (2r - s) - 3t \cdot (2r - s) =$
$= (1 - 3t) \cdot (2r - s)$

- Der Faktor $(-3t)$ wird herausgehoben, dadurch ändern sich die Vorzeichen.

Probe: $(1 - 3t) \cdot (2r - s) = 2r - s - 6rt + 3st$

2.62 **a)** $ac + ad - bc - bd$ **b)** $ax + 3bx - ay - 3by$ **c)** $ac - 2a - bc + 2b$ **d)** $8a - ma + 8c - mc$ — B

2.63 **a)** $6gx - 4gy - 9hx + 6hy$ **b)** $4hx - hy + 8kx - 2ky$ **c)** $10ac - 15ad - 2bc + 3bd$ **d)** $5kx - 3ky + 30mx - 18my$ — B

2.64 **a)** $5b - ab - 3a + 15$ **b)** $cd + 6c - 4d - 24$ **c)** $ef - 7e - f + 7$ — B

2.65 **a)** $4f + 3gh + fh + 12g$ **b)** $12c - 32cd - 96d + 36$ **c)** $-15m - 12mn + 10k + 8kn$ — B

Vermischte Aufgaben

2.66 Setze die folgenden Terme für die Variablen ein und vereinfache den entstehenden Ausdruck: $A = 2x + 3y - z$, $B = x - (2y + z)$, $C = 4x - (y - 3z)$ und $D = 3x + 6y - 5z$ — B

a) $A - (B + C) - D$ **b)** $A + (B - C) - D$ **c)** $(A - B) - (C + D)$ **d)** $(A - B) - (C - D)$

2.67 Schreibe die Rechenanweisung als Term an und vereinfache diese. — AB

a) Vermehre die Summe zweier Zahlen um deren Differenz.
b) Vermindere die Differenz zweier Zahlen um deren Summe.

2.68 Die Summe dreier Zahlen wird um die Differenz aus der ersten und der zweiten Zahl vermindert. Schreibe diese Rechenanweisung als Term an und vereinfache ihn. — AB

2.69 Ein Auto fährt auf einer geraden Straße zuerst $(a + 4b)$ Meter vorwärts, dann $(2b - 3c)$ Meter rückwärts, anschließend $(4a + b)$ Meter vorwärts und schließlich $(b - 2c)$ Meter rückwärts. Wie viel Meter ist das Auto nach der Fahrt vom Ausgangspunkt entfernt? Rechne zuerst allgemein und setze anschließend $a = 60$, $b = 80$ und $c = 30$ ein. — AB

2.70 Wenn man in einem Produkt zweier ungleicher Zahlen die kleinere Zahl um eins vermindert und die größere um eins vermehrt, so wird das Produkt kleiner. ZB: $5 \cdot 9 > 4 \cdot 10$ Gib weitere Beispiele an. Formuliere die Behauptung mithilfe von Termen und beweise sie. — ABD

2.71 Vertauscht man in einer zweiziffrigen Zahl, deren Ziffernsumme neun ist, die Ziffern und addiert die so erhaltene Zahl zur ursprünglichen Zahl, so erhält man immer 99, zum Beispiel $27 + 72 = 99$. Gib weitere Beispiele an und beweise diese Aussage. — ABD
Hinweis: Wähle x als Zehnerziffer und $(9 - x)$ als Einerziffer. Die erste Zahl kann unter Berücksichtigung des Stellenwerts somit als $10 \cdot x + (9 - x)$ angeschrieben werden.

2.3 Potenzen

2.3.1 Einführung

Potenzen wie 2^3 und $(-3)^4$ wurden bereits im Abschnitt 1.6 behandelt.

B **2.72** Ersetze bei 2^3 die Basis durch a und bei $(-3)^4$ die Basis durch z. Schreibe die Potenzen anschließend als Multiplikation an.

A **2.73** Gib dir bekannte Formeln und Sätze aus der Geometrie an, in denen Potenzen der Form a^2 oder a^3 vorkommen.

B **2.74** Schreibe die Potenzen 5^{-1}, 10^{-2} und 7^{-3} als Bruch an.

Potenzen mit positiven ganzzahligen Exponenten

Für Potenzen von Variablen gelten die gleichen Definitionen und Rechenregeln wie für Potenzen von Zahlen (vergleiche dazu Abschnitt 1).

Eine Potenz a^n ist das Produkt von n gleichen Faktoren. Dabei ist n eine natürliche Zahl, zB $a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$. Bei n = 1 gilt: $a^1 = a$, wobei der Exponent 1 üblicherweise nicht angeschrieben wird.
Zusätzlich wird für a^0 definiert: $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$

Potenzen mit negativen ganzzahligen Exponenten

Die Potenz 10^{-n} entspricht $\frac{1}{10^n}$. Allgemein gilt $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ mit $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, zB: $x^{-5} = \frac{1}{x^5}$.
Da die Variable im Nenner des Bruchs steht, nennt man solche Terme Bruchterme.

Dazu zählen jedoch nicht Terme wie zB $\frac{x^3}{2} = \frac{1}{2} \cdot x^3$, da hier keine Variable, sondern lediglich eine Zahl im Nenner steht. Die ausführliche Behandlung der Bruchterme erfolgt in Abschnitt 2.4.

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n Faktoren}}$, $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$

Merkhilfe: Verwende von der Potenz a^{-n} das Minus des Exponenten als Bruchstrich: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

B **2.75** Schreibe mit positiven Exponenten an.
a) x^{-3} **b)** xy^{-3} **c)** $x^{-3}y^{-2}$

Lösung:
a) $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ **b)** $xy^{-3} = x \cdot y^{-3} = x \cdot \frac{1}{y^3} = \frac{x}{y^3}$ **c)** $x^{-3}y^{-2} = \frac{1}{x^3} \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^3 \cdot y^2} = \frac{1}{x^3y^2}$

D **2.76** Erkläre, was bei der folgenden Umformung falsch gemacht wurde: $2x^{-5} = \frac{1}{2x^5}$

Lösung:
$2x^{-5} = 2 \cdot x^{-5} = 2 \cdot \frac{1}{x^5} = \frac{2}{x^5}$ Der negative Exponent gilt nur für x.

2.3.2 Rechnen mit Potenzen

2.77 Fasse die Terme $2^4 \cdot 2^2$ und $\frac{3^5}{3^3}$ jeweils zu einer Potenz zusammen. Wie lauten die beiden Ergebnisse? Erkläre die verwendeten Rechenregeln mit eigenen Worten. BD

Nur Potenzen mit **gleicher Basis** und **gleichem Exponenten** können **addiert** bzw. **subtrahiert** werden.

ZB: $3a^3 + 4a^3 - 2a^3 = (3 + 4 - 2) \cdot a^3 = 5a^3$

- Die Potenz wird herausgehoben, die Koeffizienten zusammengefasst.

ABER: $3a^2 + 4a$

- Bei verschiedenen Hochzahlen kann trotz gleicher Basis nicht zusammengefasst werden.

Rechenregeln für Potenzen

Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Potenzen mit gleicher Basis werden **multipliziert**, indem man die **Exponenten addiert**. Die Basis bleibt dabei unverändert.

ZB: $a^3 \cdot a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^{3+5} = a^8$

Division von Potenzen mit gleicher Basis

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad (a \neq 0)$$

Potenzen mit gleicher Basis werden **dividiert**, indem man die **Exponenten subtrahiert**. Die Basis bleibt dabei unverändert.

ZB: $\frac{b^9}{b^2} = b^9 \cdot \frac{1}{b^2} = b^9 \cdot b^{-2} = b^{9+(-2)} = b^{9-2} = b^7$ oder $a^3 : a^5 = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a \cdot a} = a^{3-5} = a^{-2}$

Potenz einer Potenz

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Potenzen werden **potenziert**, indem man die **Exponenten multipliziert**. Die Basis bleibt dabei unverändert.

ZB: $(a^5)^2 = (a^5) \cdot (a^5) = a^5 \cdot a^5 = a^{5+5} = a^{5 \cdot 2} = a^{10}$

Potenz eines Produkts

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Ein **Produkt** wird **potenziert**, indem die einzelnen **Faktoren potenziert** werden.

ZB: $(a \cdot b)^3 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b = a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = a^3 \cdot b^3$

Potenz eines Quotienten

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0)$$

Ein **Quotient** (Bruch) wird **potenziert**, indem **Zähler und Nenner potenziert** werden.

ZB: $\left(\frac{a}{2}\right)^6 = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{a^6}{2^6}$

Terme und Variablen

Vorzeichen von Potenzen

Die Vorzeichen von Potenzen ergeben sich aus den Vorzeichenregeln für die Multiplikation.
ZB: $(-a)^2 = (-a) \cdot (-a) = a^2$ oder $(-b)^3 = (-b) \cdot (-b) \cdot (-b) = -b^3$

Beachte: Eine negative Hochzahl hat nichts mit dem Vorzeichen einer Potenz zu tun.
ZB: $2^{-1} = \frac{1}{2^1} = 0{,}5$ oder $(-6)^{-3} = \frac{1}{(-6)^3} = \frac{1}{(-6)\cdot(-6)\cdot(-6)} = \frac{1}{-6^3} = -\frac{1}{6^3} = -\frac{1}{216} = -0{,}004\,29...$

B **2.78** Schreibe ohne Bruch an.

a) $\frac{1}{x^2}$ **b)** $\frac{7}{x^4}$ **c)** $\frac{x^2}{y^6}$ **d)** $\frac{1}{x^{-3} \cdot y^4}$

Lösung:

a) $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$

b) $\frac{7}{x^4} = 7 \cdot \frac{1}{x^4} = 7 \cdot x^{-4} = 7x^{-4}$

c) $\frac{x^2}{y^6} = x^2 \cdot \frac{1}{y^6} = x^2 \cdot y^{-6} = x^2y^{-6}$

d) $\frac{1}{x^{-3} \cdot y^4} = \frac{1}{x^{-3}} \cdot \frac{1}{y^4} = \frac{1}{\frac{1}{x^3}} \cdot y^{-4} = x^3y^{-4}$

B **2.79** Schreibe ohne Bruch an.

a) $\frac{4a^7}{(x+y)^3}$ **b)** $\frac{1}{x^3 + y^3}$

Lösung:

a) $\frac{4a^7}{(x+y)^3} = 4a^7 \cdot \frac{1}{(x+y)^3} = 4a^7 \cdot (x+y)^{-3}$

- Die Hochzahl 3 bezieht sich auf ein Binom, nämlich auf die Summe von x und y.

b) $\frac{1}{x^3 + y^3} = \frac{1}{(x^3 + y^3)^1} = (x^3 + y^3)^{-1}$

- Die Hochzahlen beziehen sich jeweils auf ein Monom und gelten **nicht** für die Summe.

Aufgabe 2.80 – 2.81: Schreibe mit positiven Exponenten an.

B **2.80** **a)** x^{-3} **b)** x^{-10} **c)** $6x^{-2}$ **d)** $4w^{-5}$ **e)** $7x^{-6}$ **f)** $2x^{-1}$

B **2.81** **a)** $4a^{-4}b$ **b)** $-a^4b^{-4}$ **c)** $5ab^{-3}$ **d)** $-2a^4b^{-6}$ **e)** $-3x^{-1}$ **f)** $18x^4y^{-1}$

BC **2.82** Schreibe die Einheit der Naturkonstanten als Bruch an.
Versuche herauszufinden, um welche Konstanten es sich dabei handelt.
1) $299\,792\,458\ m \cdot s^{-1}$ **2)** $101\,325\ N \cdot m^{-2}$ **3)** $6{,}022 \cdot 10^{23}\ mol^{-1}$ **4)** $1\,000\ kg \cdot m^{-3}$

B **2.83** Schreibe den Bruchterm als Produkt mit negativen Exponenten an.
a) $\frac{5}{g^3}$ **b)** $\frac{h^2}{(8-h)^2}$ **c)** $\frac{6h^3}{g^2 + h}$ **d)** $\frac{g^7}{h^3}$ **e)** $\frac{-4g^4}{(g-1)^3}$ **f)** $\frac{2h^3 + 3g}{g^5 - 4h^2}$

BD **2.84** Schreibe als Produkt an. Welches Vorzeichen hat das Ergebnis? Begründe deine Antwort.
a) **1)** a^4 **2)** $-a^4$ **3)** $(-a^4)$ **4)** $-(-a)^4$
b) **1)** $-c^5$ **2)** $(-c)^5$ **3)** $-(-d^5)$ **4)** $-(-d)^5$

2.85 Kreuze an und begründe deine Antwort. D

Diesen Term	$a^2 + a^3$	$4a^2 + b^5$	$-b : 7b^4$	$5a^6 \cdot 3a$	$9ab^3 - 4a^3b$	$4a^4b \cdot 2ab^5$
kann man zusammenfassen.						
kann man nicht zusammenfassen.						

Addieren und Subtrahieren von Potenzen

2.86 Fasse, wenn möglich, die Terme zusammen. B

a) $4a^2 + 6a^3 - 5a^2 - 9a^4 + a^3$ **b)** $4x^2y + 8xy^2 - 6x^2y + 11x^2y - 10xy^2$

Lösung:

a) $4a^2 + 6a^3 - 5a^2 - 9a^4 + a^3 =$
$= 4a^2 - 5a^2 + 6a^3 + a^3 - 9a^4 =$
$= -a^2 + 7a^3 - 9a^4$

b) $4x^2y + 8xy^2 - 6x^2y + 11x^2y - 10xy^2 =$
$= 4x^2y - 6x^2y + 11x^2y + 8xy^2 - 10xy^2 =$
$= 9x^2y - 2xy^2$

- Ordne die Terme nach gleicher Potenz. Addiere bzw. subtrahiere gleiche Potenzen.
- **Ungleiche Potenzen** können **nicht zusammengefasst** werden.

Aufgaben 2.87 – 2.89: Fasse die Terme zusammen, bzw. begründe, falls das nicht möglich ist.

2.87 **a)** $3a^2 + 4a^2 - 2a^2 + a^2$ **b)** $7c^4 - 4c^3 - 5c^4 + 3c^3$ **c)** $4b^5 + b^4 - 6b^3 - 2b^2$ BD

2.88 **a)** $5a^3 + 2a^7 - 7a^2 + 3a^5$ **b)** $2a^4 - 6c^4 - 3a^4 + 5c^4$ **c)** $3b^5 + 2d^3 - 9b^3 - 3d^5$ BD

2.89 **a)** $3a^3b^3 + 4a^3b^2 - 2a^3b^3 + a^3b^2 - 2a^2b^3$ **b)** $5xy^2 + x^2y - 2x^2y^2 + x^2y - 2xy^2 + 3x^2y^2$ BD

2.90 In einer Hausübung wurde gerechnet: $a^4 + a^4 = a^8$. Erkläre, warum die Aufgabe falsch gelöst wurde. Gib das richtige Ergebnis an. D

Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis

Aufgaben 2.91 – 2.95: Fasse jeweils das Produkt zu einer Potenz zusammen.

2.91 **a)** $a^3 \cdot a^{11}$ **b)** $b^{12} \cdot b^3$ **c)** $c^4 \cdot c^9$ **d)** $d^7 \cdot d^8$ B

2.92 **a)** $e^4 \cdot e^7 \cdot e^6$ **b)** $f^3 \cdot f^9 \cdot f^{11}$ **c)** $g^2 \cdot g \cdot g^0$ **d)** $h^{12} \cdot h \cdot h^8$ B

2.93 **a)** $w^{-4} \cdot w^5$ **b)** $x^{-9} \cdot x^6$ **c)** $y^3 \cdot y^{-5}$ **d)** $z^8 \cdot z^{-2}$ B

2.94 **a)** $(-h)^5 \cdot (-h)^2$ **b)** $(-g)^2 \cdot (-g)^3$ **c)** $(-f)^4 \cdot (-f)^3$ **d)** $(-k) \cdot (-k)^9$ B

2.95 **a)** $(a - b)^3 \cdot (a - b)^8$ **b)** $(2x + 3y)^2 \cdot (2x + 3y)^7$ **c)** $(4a - x)^5 \cdot (4a - x)^5$ B

Aufgaben 2.96 – 2.97: Fasse die Produkte zusammen und stelle die Ergebnisse mit positiven Exponenten dar.

2.96 **a)** $a^5 \cdot a^{-7} \cdot a^3 \cdot a^{-2}$ **c)** $b^3 \cdot b^{-4} \cdot b^4 \cdot b^{-1}$ B
b) $c^{-4} \cdot c^3 \cdot c^{-5} \cdot c$ **d)** $d^{-4} \cdot d^7 \cdot d^{-3} \cdot d$

2.97 **a)** $a^{-5} \cdot b^{-1} \cdot c^4 \cdot c^{-2} \cdot a^5 \cdot c^{-1} \cdot b^7 \cdot a^3$ **c)** $c^3 \cdot a^6 \cdot b^0 \cdot b^{-1} \cdot a^{-7} \cdot c^2 \cdot a^3 \cdot b^{-4}$ B
b) $a^{-8} \cdot b^2 \cdot b^{-5} \cdot a^{-1} \cdot c^4 \cdot a \cdot c^7 \cdot c^{-10}$ **d)** $a^{-1} \cdot b^7 \cdot c^{12} \cdot a^8 \cdot b \cdot a^4 \cdot b^6 \cdot c^{-3}$

Aufgaben 2.98 – 2.101: Multipliziere die Klammern aus und fasse die Terme zusammen. Führe die Probe für a = 2 durch.

B **2.98** **a)** $(-5a + 9) \cdot (a^2 + 5a)$ **b)** $(5a^5 - a^3 - 11a) \cdot (6a^2 - 3)$ **c)** $(a - 1) \cdot (a^2 - 5a + 9)$ **d)** $(a^3 + 8a^2 + 4a) \cdot (7 - 12a)$

B **2.99** **a)** $(4a^2 + a - 2) \cdot (a^3 + 3a - 9)$ **b)** $(a^5 + 2a^3 - 10a) \cdot (5a^5 - 7a^3 + a)$ **c)** $(a^2 - a + 1) \cdot (-10a^5 + 2a^4 + 5a^3)$ **d)** $(11a^4 + a - 8) \cdot (5 + 3a - 2a^2)$

B **2.100** **a)** $3a \cdot [-2a \cdot (5a^2 - 4) - a \cdot (1 - 3a^3) + 7a^2 \cdot (1 - a)]$
b) $-6a \cdot [-a - 3a \cdot (4 + 8a^3) + 9a^2 \cdot (-a + 8a^2)]$

B **2.101** **a)** $7a^4 \cdot (5a^2 - 7a) - 3a^3 \cdot [8a^4 - 10a \cdot (-5a^3 + 11a)]$
b) $-4a^3 - 7a \cdot [a - 4 \cdot (a^2 + 5a) + 3a^2 \cdot (2 - 8a)]$

Aufgaben 2.102 – 2.103: Fasse die Produkte zusammen.

B **2.102** **a)** $x^{2n} \cdot x^{n+2} \cdot x^{-n+4} \cdot x^n \cdot x^{-1}$ **b)** $x^{m-7} \cdot x^{m+3} \cdot x^{5m-11} \cdot x^{-8} \cdot x$

B **2.103** **a)** $x^{7p} \cdot x^{-3+2p} \cdot y^5 \cdot x^{4p-9} \cdot y^{3p+7} \cdot y$ **b)** $y^{6+q} \cdot x \cdot x^{q-3} \cdot y^{5q+2} \cdot y^{3q+7} \cdot x^{-3q+1}$

TE Aufgaben 2.104 – 2.105: Multipliziere die Klammern aus und fasse die Terme zusammen. Führe die Probe mit beliebigen Zahlen mit dem Taschenrechner aus.

B **2.104** **a)** $(x^2 + 2y) \cdot (4x^2 - y) + 6 \cdot (5x^3 - 7y) \cdot (2y + 2x)$
b) $9 \cdot (4x^2 + y) \cdot (4x + 7y) - (11x + 3y) \cdot (x^2 + 2y)$
c) $-(y + 5x) \cdot (7x^2 + 8y^2) - 11 \cdot (x^2 + y^2) \cdot (8x - 12y)$

B **2.105** **a)** $(2x - xy - y^2) \cdot (2x^2y - 6y^2) - (4x^2 - 4x + 1) \cdot (y^3 - 5x^2)$
b) $-(a^4 + 4b^3 - b) \cdot (a^2 - 6b^3) + (b^2 + 3) \cdot (9b^2 - b^4 + a^4b)$

Division von Potenzen mit gleicher Basis

Aufgaben 2.106 – 2.113: Fasse die Terme zu einer Potenz zusammen.

B **2.106** **a)** $\frac{r^4}{r^3}$ **b)** $\frac{s^7}{s^8}$ **c)** $\frac{t^{10}}{t^8}$ **d)** $\frac{u^{10}}{u^{12}}$

B **2.107** **a)** $\frac{a^7}{a^{-2}}$ **b)** $\frac{b^{-3}}{b^9}$ **c)** $\frac{c^{-1}}{c^{-5}}$ **d)** $\frac{d^{-8}}{d}$

B **2.108** **a)** $g^7 : g^4$ **b)** $h^5 : h^2$ **c)** $e^3 : e^2$ **d)** $f^6 : f^9$

B **2.109** **a)** $(-k)^6 : (-k)^3$ **b)** $(-l)^9 : (-l)^{-5}$ **c)** $(-m)^4 : (-m)^{-7}$ **d)** $(-n)^5 : (-n)$

B **2.110** **a)** $(4x - y)^8 : (4x - y)^4$ **b)** $(7y + 9z)^9 : (7y + 9z)^{14}$ **c)** $(8z - 3x)^2 : (8z - 3x)^6$

B **2.111** $y^{n+3} : y^{2n-7}$

Lösung:
$y^{n+3} : y^{2n-7} = y^{(n+3)-(2n-7)} = y^{n+3-2n+7} = y^{-n+10}$

B **2.112** **a)** $x^n : x^{2+4n}$ **b)** $a^{5n} : a^{3n}$ **c)** $b^{5n} : b^{n-2}$ **d)** $y^{-7} : y^{-5n+1}$

B **2.113** **a)** $e^{7+3n} : e^{2n-3}$ **b)** $g^{-4n} : g^{7n+4}$ **c)** $h^{6n-9} : h^{3-5n}$ **d)** $f^{-2n+5} : f^{9n-3}$

2.114 Erkläre die unterschiedliche Vorgehensweise: D

1) $\frac{a^2}{a^{-3}} = a^2 \cdot \frac{1}{a^{-3}} = a^2 \cdot a^3 = a^5$ **2)** $\frac{a^2}{a^{-3}} = \frac{a^2}{\frac{1}{a^3}} = a^2 \cdot a^3 = a^5$ **3)** $\frac{a^2}{a^{-3}} = a^{2-(-3)} = a^5$

2.115 Fasse den Term als eine Potenz zusammen. Führe die Probe mit a = 2, n = 3 und x = 4 durch. B

a) $\frac{a^{n+1}}{a}$ **c)** $\frac{a^{n+x}}{a^{n-1}}$ **e)** $\frac{a^{n+1}}{a^{n-1}}$ **g)** $\frac{a^{2x}}{a^{n-x}}$

b) $\frac{a^{n-4}}{a^{n-5}}$ **d)** $\frac{a^{3x}}{a^{2x-n}}$ **f)** $\frac{a^{2n-4}}{a^{-1}}$ **h)** $\frac{a^{n+x}}{a^{2x}}$

Potenz eines Produkts bzw. eines Quotienten

Aufgaben 2.116 – 2.120: Löse die Klammern auf. Gib die Ergebnisse mit positiven Exponenten an.

2.116 **a)** $(8w^3)^2$ **c)** $-(3x^2)^5$ **e)** $(-2x^6)^6$ **g)** $-(-4w^9)^3$ B

b) $(-9z)^2$ **d)** $(-5y^4)^3$ **f)** $-(-3y^3)^4$ **h)** $(-2z^5)^7$

2.117 **a)** $(-a^{-2}bc^4)^{11}$ **b)** $(15a^3b^{12}c^{-6})^0$ **c)** $-(3c^{-7}d^{10}e^{-3})^4$ **d)** $(4g^{-7}h^9k^2)^5$ B

2.118 **a)** $(13a^2b^4c^3)^{-2}$ **b)** $(-6d^9e^{-2}f^2)^{-3}$ **c)** $(18e^{-5}f^0g^4)^0$ **d)** $(7g^8h^{-3}k^{-5})^{-4}$ B

2.119 **a)** $\left(\frac{a^2}{3}\right)^4$ **b)** $\left(\frac{7}{a^9}\right)^2$ **c)** $\left(\frac{b^5}{2}\right)^6$ **d)** $\left(\frac{b^7}{9}\right)^3$ B

2.120 **a)** $\left(-\frac{2a^6}{b^3}\right)^{-4}$ **b)** $\left(-\frac{3a^2}{b^6}\right)^{-5}$ **c)** $\left(-\frac{a^5}{8b^3}\right)^{-5}$ **d)** $\left(-\frac{a^4}{5b^5}\right)^{-3}$ B

2.121 Erkläre, welche Fehler gemacht wurden und korrigiere sie. CD

a) $\left(\frac{2x}{3y}\right)^3 = \frac{2x^3}{3y^3}$ **b)** $\frac{ab^{\not{8}\,4}}{a^3b^{\not{2}\,1}} = \frac{b^4}{a^2b}$ **c)** $\left[-\frac{(-3xy^2)^3}{(4z^3)^2}\right]^{-1} = \frac{-16z^5}{27xy^5}$

Vermischte Aufgaben

2.122 Vereinfache den Term und schreibe das Ergebnis ohne Bruch an. B

a) $\frac{a^3b^4c^2}{a^2b^5c^9}$ **b)** $\frac{b^6c^3}{a^5b^8c^2}$ **c)** $\left(\frac{x^3y^7}{a^2b^5c}\right)^6$ **d)** $\left(\frac{x^4yz^5}{a^5b^0c^3}\right)^{-7}$

2.123 Vereinfache den folgenden Bruch so weit wie möglich. B

a) $\frac{x^{n+1} \cdot y^{a+2}}{x^n \cdot y^{a-1}}$ **b)** $\frac{x^{2n-1} \cdot y^{3n+2}}{x^{n+1} \cdot y^{2n-3}}$ **c)** $\frac{x^{n-1} \cdot y^{n-2}}{x^{n-3} \cdot y^{n-4}}$ **d)** $\frac{x^{a+n} \cdot y^{3n-a}}{x^{n-a} \cdot y^{2a+n}}$

2.124 Schreibe ohne Bruch an. B

a) $\frac{3}{a+b}$ **b)** $\frac{5c^2}{a^3-b}$ **c)** $\frac{2ab}{b+c^2}$ **d)** $\frac{4ab^2}{a-c^6}$

2.125 Löse die Klammern auf und schreibe den Term ohne negative Exponenten an. B

a) $\left(\frac{a^2b^{-3}c^0}{d^{-1}e^4}\right)^2$ **b)** $\left(\frac{x^{-3}y^2z^5}{u^2v^{-4}w}\right)^{-3}$ **c)** $\left(\frac{d^2e^{-2}f^4}{2g^{-3}h^2}\right)^6$ **d)** $\left(\left(\frac{2u^3v^{-1}w^0}{3x^{-2}y^0z^3}\right)^4\right)^{-3}$

2.126 Zeige, dass die Aussage wahr ist. D

$\frac{1}{a^{n-3}} - \frac{1+a^3}{a^n} = -a^{-n}$

Terme und Variablen

Aufgaben 2.127 – 2.132: Vereinfache die Terme und stelle die Ergebnisse mit positiven Exponenten dar.

B **2.127** $\left(\frac{15a^2bc}{27b^3c^{-2}}\right)^2 : \frac{45a^{-3}c^2}{81ab^4c^4}$

Lösung:

$$\left(\frac{15a^2bc}{27b^3c^{-2}}\right)^2 : \frac{45a^{-3}c^2}{81ab^4c^4} = \left(\frac{5a^2c^3}{9b^2}\right)^2 : \frac{5}{9a^4b^4c^2} = \frac{25a^4c^6}{81b^4} \cdot \frac{9a^4b^4c^2}{5} = \frac{5a^8c^8}{9}$$

B **2.128** **a)** $\frac{a^2b^4}{x^4y^{-1}} : \frac{a^3b}{x^3y^{-2}}$ **b)** $\frac{x^4y^3}{a^3b^0} : \frac{x^{-1}y^2}{a^4b^2}$ **c)** $\frac{a^{-3}b^4}{x^2y^8} : \frac{a^3b^{-5}}{x^5y^6}$

B **2.129** **a)** $\frac{a^4b^{-2}c^8}{x^{-2}y^4z^{-1}} : \frac{a^3b^{-5}x^4y^{-5}}{c^{-3}z^{-7}}$ **b)** $\frac{a^{-7}b^4c^2}{x^{-3}y^{-4}z^2} : \frac{b^2c^6z^{-4}}{a^3x^{-8}y^0}$ **c)** $\frac{a^5b^{-3}c^{-1}}{x^4y^9z^{-2}} : \frac{b^{-4}c^6x^{-2}z}{a^{-7}cx^{-8}y^5}$

B **2.130** **a)** $\frac{12x^{14}y^{-20}z^{-15}}{21a^{45}b^{-30}c^{-24}} : \frac{18a^{-3}(a^2b^{-2}c)^{-1}x^2y^{-1}}{63b^{-6}(x^3y^2z)^2}$ **b)** $\frac{44(a^{-11}b^{14}c^9)^{-1}}{6^{-2}x^{13}(y^{-4}z^{10})^2} : \frac{48x^{-4}(x^{-4}y^0z^{-3})^{-2}z^3}{33^{-1}a^{-2}(a^{13}b^5c^{-12})^0c^9}$

B **2.131** **a)** $\frac{3^3a^{-5}b^0}{2^3c^23^{-3}} : \left(\frac{9^2a^{-2}d^2}{4^2b^4c^3} : \frac{5^2a^3d^{-1}e^2}{6^2b^4c^1}\right)$ **b)** $\frac{3^2a^3b^4c^{-1}}{2^3d^4e^3} : \left(\left(\frac{5^3a^4d^{-3}e^5}{7^3b^5c^4}\right)^0 : \left(\frac{6^2a^3d^{-1}e^2}{4^3b^{-3}c}\right)^{-1}\right)$

B **2.132** **a)** $\left(\frac{x^4y^3z^{-9}}{a^5b^{-3}c^2}\right)^3 : \left(\left(\frac{a^{-4}x^2y}{b^{-5}z^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^3b^2c^{-4}}{x^2y^3z}\right)^4\right)$ **c)** $\left(\left(\frac{x^2y^7z^4}{a^2b^{-5}c^{-3}}\right)^4 : \left(\frac{x^9y^7z^{-1}}{a^3b^2c^{-2}}\right)^3\right) \cdot \left(\frac{a^7b^4c^{-1}}{x^9y^4z^0}\right)^4$

b) $\left(\frac{x^8y^7}{a^3b^{-2}}\right)^{-2} : \left(\frac{(a^{-5}x^7y)^4}{b^{-10}} : \frac{a^9b^{-2}}{(x^4y^3)^{-3}}\right)$ **d)** $\left(\left(\frac{x^{-2}y}{a^{-3}b^6}\right)^{-5} : \frac{(x^3y^4)^6}{(a^9b^8)^{-1}}\right) : \left(\frac{a^7b^4}{x^3y^{-7}}\right)^{-3}$

B **2.133** Zerlege die Summe $a^{3n-1} + a^{n-1}$ in ein Produkt.

Lösung:

$$a^{3n-1} + a^{n-1} = a^{2n+n-1} + a^{n-1} = a^{2n} \cdot a^{n-1} + a^{n-1} = a^{n-1} \cdot (a^{2n} + 1)$$

B **2.134** Zerlege die Summe bzw. die Differenz in ein Produkt.

a) $x^3 + x^7$ **c)** $8x^9 - 4x^2$ **e)** $12x + 3x^5$ **g)** $5x^8 - 10x^4$
b) $4x^5 - x^2$ **d)** $14x^3 - 7x^{11}$ **f)** $25x^7 - 10x^2$ **h)** $24x^7 + 18x^6$

B **2.135** Zerlege die Summe bzw. die Differenz in ein Produkt.

a) $a^{3n} + a^n$ **c)** $b^{x+2} - 3b^x$ **e)** $c^{n+3} - c^{n+7}$ **g)** $3d^{2n-1} + 4d^n$
b) $2e^m - 6e^{2m-1}$ **d)** $40f^{m-1} - 8f^{m+1}$ **f)** $45g^m + 27g^{2m}$ **h)** $12h^{m+1} + 21h^{3m}$

BD **2.136** m ist eine beliebige positive ganze Zahl. Welches Vorzeichen hat der Term? Setze zuerst für m eine Zahl ein, zum Beispiel 1. Begründe deine Entscheidung.

a) $(-x^{2m})^{2m+1}$ **b)** $(-x^{3m})^{2m}$ **c)** $-(x^{2m})^{2m+1}$ **d)** $-(x^{3m+1})^{2m}$

ABC **2.137** Die lange Seite eines Rechtecks ist um 5 cm länger als die Seite eines Quadrats, die kurze Seite um 5 cm kürzer als die Seite dieses Quadrats. Welcher der beiden Flächeninhalte ist größer? Wie groß ist der Unterschied?

BD **2.138** $(a^2 + bc) \cdot (bc + d^2) - (ac + cd) \cdot (ab + bd) = (ad - bc) \cdot (ad - bc)$

1) Überprüfe die Gültigkeit durch Einsetzen der Werte a = 2, b = 3, c = 4 und d = 5.
2) Beweise diese Behauptung allgemein durch Auflösen der Klammern.

Weitere Aufgaben im Zusatzheft

2.3.3 Binomische Formeln

Potenzen von Binomen können mit den binomischen Formeln berechnet werden, wie zum Beispiel $(a + 6)^2$, $(4a - 7b)^4$ oder $(a + b)^{27\,545}$. Um das Ergebnis von $(a + b)^{27\,545}$ anzuschreiben, würde man allerdings ca. 150 A4-Blätter Papier benötigen.

2.139 ***1)*** Schreibe $(a + b)^2$ und $(a - b)^2$ als Produkt an. Multipliziere die Binome und fasse die Terme zusammen. — BC

2) Multipliziere $(5a - 2b) \cdot (5a + 2b)$. Beschreibe, was dir bei diesem Produkt auffällt.

$(a + b)^2$, $(a - b)^2$ und $(a + b) \cdot (a - b)$

$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) =$	$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) =$	$(a + b) \cdot (a - b) =$
$= a^2 + ab + ab + b^2$	$= a^2 - ab - ab + b^2$	$= a^2 + ab - ab - b^2$
$\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$	$\mathbf{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$	$\mathbf{(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2}$

$(a + b)^3$ und $(a - b)^3$

Die Formeln für die dritte Potenz von Binomen können durch Ausmultiplizieren ermittelt werden.

$$\mathbf{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} \qquad \mathbf{(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$$

2.140 Berechne $(4a + b)^2$ und führe die Probe für $a = 3$ und $b = 2$ durch. — B

Lösung:
$(4a + b)^2 = (4a)^2 + 2 \cdot 4a \cdot b + b^2 = 16a^2 + 8ab + b^2$

Probe: Angabe: $(4 \cdot 3 + 2)^2 = 14^2 = 196$

Ergebnis: $16 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 \cdot 2 + 2^2 = 16 \cdot 9 + 48 + 4 = 196$

2.141 Berechne $\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{4}\right)^2$. — B

Lösung:
$\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{4}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{4} + \left(\frac{b}{4}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{ab}{4} + \frac{b^2}{16}$

2.142 Berechne $(ab + 5b^2) \cdot (ab - 5b^2)$. — B

Lösung :
$(ab + 5b^2) \cdot (ab - 5b^2) = (ab)^2 - (5b^2)^2 = a^2b^2 - 25b^4$

2.143 Berechne $(4a - 3b)^3$. — B

Lösung :
$(4a - 3b)^3 = (4a)^3 - 3 \cdot (4a)^2 \cdot 3b + 3 \cdot 4a \cdot (3b)^2 - (3b)^3 = 64a^3 - 144a^2b + 108ab^2 - 27b^3$

2.144 Schreibe den Term $4a^2 + 12ab + 9b^2$ als Produkt an. — B

Lösung:
$4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 3b + (3b)^2 = (2a + 3b)^2$

Das Pascal'sche Dreieck

Zur Erinnerung: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Weiters gilt: $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Vergleicht man diese Formeln miteinander, so sieht man, dass die Formel für $(a + b)^n$ mit a^n beginnt und mit b^n endet. Dazwischen nimmt der Exponent von a ab, während gleichzeitig der Exponent von b zunimmt. Die Koeffizienten der einzelnen Monome erhält man durch das nach Blaise Pascal (französischer Mathematiker, 1623 – 1662) benannte **Pascal'sche Dreieck**. Dieses Dreieck ist wie eine „Ziegelmauer" aufgebaut.

$(a+b)^0 = 1$
$(a+b)^1 = 1a + 1b$
$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$
$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$

Am Rand steht immer **1**. Alle anderen rot geschriebenen Zahlen ergeben sich jeweils als Summe der beiden links und rechts darüberstehenden Zahlen.

Nur die rot gedruckten Zahlen bilden das Pascal'sche Dreieck. Die Variablen müssen beim Auswerten von binomischen Formeln ergänzt werden.

Die Spitze mit **1** bezeichnet man als „0. Zeile". In der 2. Zeile stehen nun die Koeffizienten von $(a + b)^2$, in der 3. Zeile die von $(a + b)^3$ usw. Diese Koeffizienten gelten auch für die Formeln für $(a - b)^n = (a + (-b))^n$. Da die ungeraden Potenzen von b negativ sind, wechseln sich die Vorzeichen ab.
ZB: $(a - b)^3 = 1a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - 1b^3$

CD **2.145** Erkläre mit eigenen Worten die grafische Veranschaulichung der binomischen Formel.
a) $(a + b)^2$ **b)** $(a - b)^2$ **c)** $(a + b) \cdot (a - b)$

D **2.146** Argumentiere, warum die Behauptungen richtig sind.
1) $(-a - b)^2 = (a + b)^2$ **2)** $(a - b)^2 = (b - a)^2$

Aufgaben 2.147 – 2.152: Wende jeweils die passende binomische Formel an.

2.147 **a)** $(a + 5)^2$ **b)** $(6 + b)^2$ **c)** $(4a + 5b)^2$ **d)** $(7a + 9b)^2$ B

2.148 **a)** $(7 - c)^2$ **b)** $(d - 1)^2$ **c)** $(7c - 3d)^2$ **d)** $(11c - 2d)^2$ B

2.149 **a)** $\left(\frac{a}{9} + 2b\right)^2$ **b)** $\left(\frac{1}{4} - 4b\right)^2$ **c)** $\left(\frac{ab}{5} + 5a\right)^2$ **d)** $\left(4b - \frac{ab}{10}\right)^2$ B

2.150 **a)** $(10 - e) \cdot (10 + e)$ **b)** $(f + 8) \cdot (f - 8)$ **c)** $(9e - 3f) \cdot (9e + 3f)$ B

2.151 **a)** $\left(\frac{ab}{4} + b\right) \cdot \left(\frac{ab}{4} - b\right)$ **b)** $\left(\frac{a}{6} + 9b\right) \cdot \left(\frac{a}{6} - 9b\right)$ **c)** $\left(12a - \frac{ab}{7}\right) \cdot \left(12a + \frac{ab}{7}\right)$ B

2.152 **a)** $(-5e^2f - f^3) \cdot (-5e^2f + f^3)$ **b)** $(-6g^3 + 4gh^4)^2$ **c)** $(-2f^3 - 9e^5f^3)^2$ **d)** $(-8g^2h + 7h^4) \cdot (-8g^2h - 7h^4)$ **e)** $(-8ef^4 + 4f^2)^2$ **f)** $(-3g^5 - 5g^6h^2)^2$ B

2.153 Erkläre, warum beide Lösungswege richtig sind. D

$(-2a^3 + 3b)^2 = (-2a^3)^2 + 2 \cdot (-2a^3) \cdot 3b + (3b)^2 = 4a^6 - 12a^3b + 9b^2$

$(-2a^3 + 3b)^2 = (3b - 2a^3)^2 = (3b)^2 + 2 \cdot 3b \cdot 2a^3 + (2a^3)^2 = 9b^2 - 12a^3b + 4a^6$

Aufgaben 2.154 – 2.157: Vereinfache jeweils so weit wie möglich.

2.154 **a)** $(a + 7)^2 + (a + 4)^2$ **b)** $(b + 9)^2 - (b + 11)^2$ **c)** $(c - 7)^2 - (c - 3)^2$ **d)** $(d - 2)^2 + (d - 9)^2$ **e)** $(e - 3)^2 + (e + 2)^2$ **f)** $(f + 5)^2 - (f - 7)^2$ B

2.155 **a)** $(5w^2 - 3x)^2 + (x + 2w^2)^2$ **b)** $(6y^3 + 3x^2)^2 - (8x^2 - y^3)^2$ **c)** $(11x^2 + 9y)^2 + (4y - 12x^2)^2$ **d)** $(20z^3 - 20y^4)^2 - (4y^4 + 6z^3)^2$ B

2.156 **a)** $\left(\frac{4e}{3} - \frac{9f}{8}\right)^2 + \left(\frac{f}{4} + \frac{2e}{3}\right)^2$ **b)** $\left(\frac{3f}{8} - \frac{4e}{9}\right)^2 + \left(\frac{3f}{2} + \frac{7e}{6}\right)^2$ B

2.157 **a)** $3 \cdot (7y - x)^2 - 10 \cdot (4x + 7y)^2 + (6y - 8x)^2$ **b)** $-(3x - 4y^3)^2 + 5 \cdot (9x + 11y^3)^2 - (6x + y^3)^2$ **c)** $-(5y - 12x)^2 + (8x + 7y)^2 - (15x + 2y)^2$ **d)** $-6 \cdot (x^3 - 11y)^2 - 3 \cdot (3y + 8x^3)^2 + (10y - 7x^3)^2$ B

2.158 Ergänze die fehlenden Terme richtig. B

a) $(2x + ...)^2 = ... + 12xy + ...$ **b)** $(... - 4a)^2 = ... - \frac{2a}{b} + ...$

Aufgaben 2.159 – 2.161: Schreibe jeweils als Produkt an.

2.159 **a)** $25a^2 + 20ab + 4b^2$ **b)** $49x^2 - 42xy + 9y^2$ **c)** $81v^2 + 18v + 1$ B

2.160 **a)** $16e^2 - 24ef + 9f^2$ **b)** $\frac{1}{4}c^2 + c + 1$ **c)** $\frac{1}{36}v^2 - \frac{v}{5} + \frac{9}{25}$ B

2.161 **a)** $64a^2 - 1$ **b)** $x^2 - y^4$ **c)** $x^6 - 121y^8$ B

Aufgaben 2.162 – 2.164: Berechne die Potenzen.

2.162 **a)** $(a + 5)^3$ **b)** $(3b - 7a^2)^3$ **c)** $(4b + c^2)^3$ **d)** $(3c^5 - cd)^3$ **e)** $(6ef + 2f)^3$ **f)** $(2a^3 - 9b)^3$ **g)** $(4km^2 + 3k)^3$ **h)** $(8k^4 - 4k^2m)^3$ B

2.163 **a)** $\left(\frac{1}{2} + s\right)^3$ **b)** $\left(t - \frac{1}{4}\right)^3$ **c)** $\left(\frac{u}{3} + \frac{5v}{2}\right)^3$ **d)** $\left(\frac{3h}{4} - \frac{k}{6}\right)^3$ B

2.164 **a)** $(-2a^3b + 3b^2)^3$ **b)** $(-5p^5 - 7np)^3$ **c)** $(-pq - 4q^4)^3$ **d)** $(-r^3s^2 + 8r^4s)^3$ B

2.165 Beweise die allgemeine Gültigkeit der Behauptung durch Termumformung und dokumentiere deine Rechenschritte. BC

a) $\left(\frac{a^2 + 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2 - 1}{2}\right)^2 + a^2$ **b)** $\left(\frac{a^2}{4} + 1\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - 1\right)^2 + a^2$

Aufgaben 2.166 – 2.167: Berechne die Potenzen und fasse die Ergebnisse zusammen.

B **2.166** ***a)*** $(4v + 2u)^3 - (2v - 4u)^3$ ***c)*** $(v + 2u)^3 - (3v - 4u)^3$
b) $-(5v + 3u)^3 + (6v - u)^3$ ***d)*** $-(v + 5u)^3 + (6v - 3u)^3$

B **2.167** ***a)*** $(4x - 6y)^3 - (3x + 8y)^2 + (7y - 2x)^3$ ***c)*** $-(x - 5y)^3 + (3y + x)^3 - (6y - 9x)^2$
b) $(10x + 7y)^2 - (2y + 3x)^3 - (x - 4y)^3$ ***d)*** $-(8y + 11x)^2 + (4x - 5y)^2 - (2x - y)^3$

BD **2.168** Die Formeln $(a + b)^2$ und $(a - b)^2$ wurden vor der Entwicklung des Taschenrechners (um 1970) oft auch zur Berechnung von Quadratzahlen benutzt, zB $21^2 = (20 + 1)^2$. Berechne ohne Taschenrechner 21^2, 32^2, 43^2, 99^2 und 198^2 und erkläre den Rechenweg.

BD **2.169** Zahlen mit der Endziffer 5 kann man auf folgende Art im Kopf quadrieren:

ZB: $25^2 = 625$ (5 · 5; 2 · 3) oder $65^2 = 4225$ (5 · 5; 6 · 7)

1) Rechne die angegebenen Beispiele nach.
2) Berechne ohne Taschenrechner 75^2, 85^2 und 95^2.
3) Erkläre diesen „Trick" mithilfe der passenden binomischen Formel.
Hinweis: ZB $25^2 = (2 \cdot 10 + 5)^2$, achte auf die Stellenwerte.

BD **2.170** Berechne mithilfe der Aufgaben 2.168 und 2.169 ohne Taschenrechner 26^2, 64^2 und 104^2.

D **2.171** Dezimalzahlen, die auf ...,5 enden, können schnell quadriert werden, zB $47{,}5^2 = 47 \cdot 48 + 0{,}25 = 2\,256{,}25$. Begründe mithilfe der binomischen Formeln.

Das Pascal'sche Dreieck

Aufgaben 2.172 – 2.176: Verwende ein Pascal'sches Dreieck mit mindestens 15 Zeilen.

B **2.172** Schreibe mithilfe des Pascal'schen Dreiecks eine Formel für die angegebene Potenz an.
a) $(a + b)^6$ ***b)*** $(c - d)^8$ ***c)*** $(w + v)^{11}$ ***d)*** $(x - y)^{15}$

B **2.173** Ermittle mithilfe des Pascal'schen Dreiecks.
a) $(2a + 3b)^5$ ***b)*** $(4a - b)^7$ ***c)*** $(a + 2b)^7$ ***d)*** $(a - 5b)^6$

C **2.174** In welcher Zeile des Pascal'schen Dreiecks findet sich der Term mit a^5b^6?

BC **2.175** Addiere zeilenweise die Zahlen in den ersten sechs Zeilen des Pascal'schen Dreiecks und vergleiche die Summen. Was fällt dir dabei auf?

BC **2.176** Subtrahiere von der 1. Zahl in einer Zeile des Pascal'schen Dreiecks die 2. Zahl, addiere dann die 3. Zahl, subtrahiere die 4. Zahl usw. Was fällt dir dabei auf?

BC **2.177** Male in einem Pascal'schen Dreieck mit 15 Zeilen
a) die geraden Zahlen ***b)*** die Vielfachen von drei ***c)*** die Vielfachen von fünf
an. Welche geometrischen Figuren kannst du erkennen?
Bemerkung: Die entstandenen Figuren sind nach Wacław Sierpiński (polnischer Mathematiker, 1882 – 1969) benannt.

Weitere Aufgaben im Zusatzheft

2.4 Bruchterme

2.4.1 Einführung

Einen Term, der mindestens eine Variable im Nenner enthält, nennt man **Bruchterm**.

Zum Beispiel sind $\frac{7}{a}$, $\frac{6x}{y^5}$ und $\frac{5x^3 + y^2}{4x^2 - 9y}$ Bruchterme.

$\frac{1}{4}$, $\frac{x}{3}$, $\frac{a + b^2}{5}$ sind keine Bruchterme, da der Nenner keine Variable enthält.

2.178 Setze im Bruchterm $\frac{x^2 + 6}{1 - x}$ für die Variable x die Zahlen −2, −1, 0, 1 und 2 ein und berechne den jeweiligen Wert des Terms. Für welche Zahl ist das nicht möglich und warum? **BD**

Da die Division durch null kein sinnvolles Ergebnis liefert, muss sichergestellt werden, dass der Nenner eines Bruchterms nicht den Wert null annimmt.

Beim Rechnen mit Termen wird oft vorausgesetzt, dass alle notwendigen Bedingungen erfüllt sind.

2.179 Welchen Wert darf x im gegebenen Term nicht annehmen? **a)** $\frac{6x}{x - 5}$ **b)** $\frac{4x + 7y}{2x + 9}$ **B**

Lösung:

a) $x - 5 = 0 \quad | + 5$

$x = 5$

x darf nicht den Wert 5 annehmen, man schreibt $x \neq 5$.

b) $2x + 9 = 0 \quad | -9$

$2x = -9 \quad | : 2$

$x = -4{,}5$

x darf den Wert −4,5 nicht annehmen. $\Rightarrow x \neq -4{,}5$

- Wir ermitteln zuerst, für welchen Wert von x der Nenner gleich null ist und schließen diesen Wert dann aus.

2.180 Welche Bedingung müssen x und y im Term $\frac{x + 6y}{4x - 3y}$ erfüllen? **B**

Lösung:

$4x - 3y = 0 \quad | + 3y$

$4x = 3y \quad | : 4$

$x = 0{,}75y$

x darf nicht gleich 0,75y sein. $\Rightarrow x \neq 0{,}75y$

- Wir ermitteln zuerst, für welchen Zusammenhang von x und y der Nenner den Wert null annimmt und schließen diesen Wert daher aus.

Aufgaben 2.181 – 2.183: Welche Bedingungen müssen die Variablen erfüllen?

2.181 **a)** $\frac{6}{w - 12}$ **b)** $\frac{4y - 1}{3y}$ **c)** $\frac{x + 2}{x + 3}$ **d)** $\frac{z - 2}{4 - z}$ **B**

2.182 **a)** $\frac{7 + 2w}{3w + 18}$ **b)** $\frac{x + 14}{-10x - 7}$ **c)** $\frac{15y - x}{-20 + 8y}$ **d)** $\frac{5x - 11y}{33 - 6z}$ **B**

2.183 **a)** $\frac{5x}{6x + 18y}$ **b)** $\frac{7x + 3}{5x - 9y}$ **c)** $\frac{9y + 2}{2x + 4y}$ **d)** $\frac{6x + 9y}{8x - 12y}$ **B**

2.184 Gib zu jedem Term aus der ersten Zeile den äquivalenten Term aus der zweiten Zeile an. Ergänze jeweils den fehlenden Term. **AC**

A) $\frac{3 + x}{x}$ **B)** $\frac{x}{x + 3}$ **C)** $3 + \frac{x}{3}$ **D)** $\frac{x + 3}{3}$ **E)** $\frac{3}{x} + x$ **F)** ?

1) (x + 3)/3 **2)** 3 + x/3 **3)** 3/x + x **4)** (3 + x)/x **5)** x/3 + x **6)** ?

2.4.2 Kürzen von Bruchtermen

B **2.185** Kürze die folgenden Brüche bzw. Bruchterme: $\frac{4}{8}$, $\frac{4a}{12a^2}$, $\frac{4 \cdot (a+b)}{2ab}$, $\frac{2 \cdot (a+b)}{3 \cdot (a+b)}$

Für das Kürzen von Bruchtermen gelten – sinngemäß – die gleichen Regeln wie für das Kürzen von Brüchen.

Ein Bruchterm wird **gekürzt**, indem man **Zähler** und **Nenner** durch den gleichen, von null verschiedenen Term **dividiert**.

BC **2.186** Kürze den Bruchterm soweit wie möglich. Beschreibe deine Vorgehensweise.

a) $\frac{4a + 8b}{12}$ **b)** $\frac{e - 3f}{3f - e}$ **c)** $\frac{3r^2 + 9r}{2rs + 6s}$ **d)** $\frac{8x^2 - 2y^2}{4x^2 - 4xy + y^2}$

Lösung:

a) $\frac{4a + 8b}{12} = \frac{\overset{1}{\cancel{4}}(a + 2b)}{\underset{3}{\cancel{12}}} = \frac{a + 2b}{3}$

b) $\frac{e - 3f}{3f - e} = \frac{e - 3f}{-e + 3f} = \frac{\cancel{e - 3f}}{(-1) \cdot (\cancel{e - 3f})} = \frac{1}{-1} = -1$

c) $\frac{3r^2 + 9r}{2rs + 6s} = \frac{3r \cdot \cancel{(r + 3)}}{2s \cdot \cancel{(r + 3)}} = \frac{3r}{2s}$

d) $\frac{8x^2 - 2y^2}{4x^2 - 4xy + y^2} = \frac{2 \cdot (4x^2 - y^2)}{(2x - y)^2} =$

$= \frac{2 \cdot (2x + y)\,\cancel{(2x - y)}}{(2x - y)^{\cancel{2}}} = \frac{2 \cdot (2x + y)}{2x - y}$

Beschreibung:

Im Zähler wird 4 herausgehoben und anschließend durch 4 gekürzt.

Im Nenner wird (–1) herausgehoben und durch (e – 3f) gekürzt.

Im Zähler wird 3r und im Nenner 2s herausgehoben, damit durch (r + 3) gekürzt werden kann.

Zuerst im Zähler 2 herausheben, dann die binomischen Formeln anwenden und den Term (2x – y) kürzen.

Beachte: $\frac{4a + 7b}{a}$ bedeutet, dass die Summe 4a + 7b durch a dividiert wird. Der Bruchstrich ersetzt in diesem Fall die Klammern, die beim Anschreiben als Division wieder gesetzt werden müssen, also (4a + 7b) : a. Man darf also NICHT 4a durch a kürzen, da auch 7b durch a dividiert werden muss.

Arbeitet man zum Beispiel mit Excel, so müssen Klammern gesetzt werden: =(4*a+7*b)/a

C **2.187** Welcher Fehler ist bei der Probe nach dem Vereinfachen des Terms $\frac{a^2 - a \cdot b}{a}$ zu (a – b) in der Eingabe aufgetreten?

Folgende Werte und Namen wurden zugeordnet: a = 7 b = 5

Anfangsterm:	=a^2-a*b/a	44
Endterm:	=a-b	2

Lösung:
Die Klammern im Zähler wurden nicht gesetzt. Richtige Eingabe:

Anfangsterm:	=(a^2-a*b)/a	2

B **2.188** Kürze die Terme so weit wie möglich.

a) $\frac{4a - 6b}{2a}$ **b)** $\frac{12ab}{4b - 8b^2}$ **c)** $\frac{18b}{9 - 27a}$ **d)** $\frac{9a^2 + 6ab}{21ab^2}$

Aufgaben 2.189 – 2.190: Kürze die Terme soweit wie möglich und kontrolliere das Ergebnis.

2.189 **a)** $\frac{15a - 21}{25a^2 - 35a}$ **b)** $\frac{88ab + 55b}{40a + 25}$ **c)** $\frac{12c^4 + 8c^2}{21c^5 + 14c^3}$ **d)** $\frac{18d^2 - 27cd}{8cd - 12c^2}$ B

2.190 **a)** $\frac{cd^3 + c^3d - 2c^2d^2}{3c^4d}$ **b)** $\frac{2e^3f + e^2f^2 - 5e^2f^3}{e^3f}$ **c)** $\frac{64r^2 - 49s^2}{64r^2 - 112rs + 49s^2}$ **d)** $\frac{36p^2 + 60pq + 25q^2}{25q^2 - 36p^2}$ B

2.4.3 Multiplikation und Division von Bruchtermen

2.191 Der Bruch $\frac{3}{5}$ soll ***1)*** mit $\frac{4}{7}$ multipliziert ***2)*** durch $\frac{4}{7}$ dividiert werden. BC
Beschreibe den Rechenvorgang mit eigenen Worten.

Für die Multiplikation bzw. Division gelten die gleichen Regeln wie für das Rechnen mit Brüchen.

Bruchterme werden **multipliziert**, indem man sowohl die Zähler als auch die Nenner miteinander multipliziert:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Durch einen Bruchterm wird **dividiert**, indem mit seinem Kehrwert multipliziert wird:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

2.192 Multipliziere: $\frac{-12a^2}{a + 2b} \cdot \frac{a^2 - 4b^2}{8a^3}$ B

Lösung:
Es gilt: $a \neq -2b$ und $a \neq 0$

$$\frac{(-12) \cdot a^2}{a + 2b} \cdot \frac{a^2 - 4b^2}{8a^3} = \frac{(-12) \cdot a^2 \cdot (a^2 - 4b^2)}{(a + 2b) \cdot 8a^3} =$$

$$= \frac{(-12) \cdot a^2 \cdot (a + 2b) \cdot (a - 2b)}{(a + 2b) \cdot 8a^3} =$$

$$= \frac{(-3) \cdot (a - 2b)}{2a} = \frac{-3a + 6b}{2a}$$

- Beachte, dass beim Anschreiben mit einem gemeinsamen Bruchstrich oft zusätzliche Klammern nötig sind.
- Kürze vor dem Ausmultiplizieren so weit wie möglich.

2.193 Dividiere: $\frac{5x^2y - 25xy}{12y^2} : \frac{4x^5 - 20x^4}{24y^4}$ B

Lösung:
Es gilt: $x \neq 0, x \neq 5, y \neq 0$

$$\frac{5x^2y - 25xy}{12y^2} : \frac{4x^5 - 20x^4}{24y^4} = \frac{5x^2y - 25xy}{12y^2} \cdot \frac{24y^4}{4x^5 - 20x^4} =$$

$$= \frac{5xy \cdot (x - 5) \cdot 24y^4}{12y^2 \cdot 4 \cdot x^4 \cdot (x - 5)} = \frac{5y^3}{2x^3}$$

- Multipliziere mit dem Kehrwert.
- Kürze so früh wie möglich.
- Zerlege in Faktoren.
- Kürze so weit wie möglich.

B **2.194** Dividiere: $\frac{4a^2 + 5ab}{3} : (16a^3 + 40a^2b + 25ab^2)$

Lösung:

$$\frac{4a^2 + 5ab}{3} : \frac{16a^3 + 40a^2b + 25ab^2}{1} =$$
$$= \frac{4a^2 + 5ab}{3} \cdot \frac{1}{16a^3 + 40a^2b + 25ab^2} =$$
$$= \frac{a \cdot (4a + 5b)}{3} \cdot \frac{1}{a \cdot (16a^2 + 40ab + 25b^2)} =$$
$$= \frac{a(4a + 5b)}{3 \cdot a(16a^2 + 40ab + 25b^2)} =$$
$$= \frac{(4a + 5b)}{3 \cdot (4a + 5b)^2} = \frac{1}{3 \cdot (4a + 5b)}$$

- Schreibe den Nenner 1 an.
- Bilde den Kehrwert des Bruchterms, durch den dividiert wird.
- Zerlege die Terme durch Herausheben und mithilfe der binomischen Formeln in Faktoren.
- Kürze so weit wie möglich.

B **2.195** Führe die gegebene Rechnung mit dem Term durch.
$\frac{3a^2}{7b}$ **1)** $\cdot 3a$ **2)** $\cdot 7a$ **3)** $\cdot 3b$ **4)** $: 3a$ **5)** $: 7a$ **6)** $: 7b$

Aufgaben 2.196 – 2.197: Vereinfache die Terme.

B **2.196** **a)** $\frac{15c^2d}{2ab^3} \cdot \frac{10a^2b^2}{18cd^2}$ **b)** $\frac{12k^2m}{5np} : \frac{18k^2}{15n^2}$ **c)** $\frac{-14e}{18cb^4} \cdot \frac{12b^2c^2}{21ed^2}$ **d)** $\frac{-36r^3s^2}{5tu^3} : \frac{-60r^2s^3}{25t^4u^5}$

B **2.197** **a)** $\frac{15a^6b + 45a^5b^2}{24a^4 - 12a^3} : \frac{5a^2b^3}{8a - 4}$ **b)** $\frac{3h^2 + 4hk}{(-4)\,h^2k + 3h^3} : \frac{3hk^4 + 4k^5}{(-4)\,k^4 + 3hk^3}$ **c)** $\frac{4y^3z + 3y^4}{18yz - 36z^3} : \frac{3y^3 + 4y^2z}{3yz^4 - 6z^6}$

Aufgaben 2.198 – 2.201: Vereinfache die Terme und gib jeweils an, welche binomischen Formeln du verwenden musst.

BC **2.198** **a)** $\frac{9a^2 - 4}{3ay^2 + 2y^2} : \frac{3a - 2}{5y^4}$ **c)** $\frac{32a^2 - 16a^3}{8a^2} : \frac{6 + 5ay}{25a^2y^2 - 36}$

b) $\frac{8y - 4z}{30y^2z^4} : \frac{4y^2 - z^2}{21y^3z^4 + 42y^4z^3}$ **d)** $\frac{y^2z^2 + 3yz}{4z^2 - 1} : \frac{3 + yz}{4z + 2}$

BC **2.199** **a)** $\frac{16e^2 + 8ef + f^2}{16e^2 - f^2} \cdot \frac{(4e - f)^5}{2f^2 + 16ef + 32e^2}$ **c)** $\frac{g^3 - 3g^2f + 3gf^2 - f^3}{14g - 14f} \cdot \frac{21g - 21f}{g^2 - f^2}$

b) $\frac{32a^2 + 16a^3}{12 + 10ay} : \frac{8a^3 + 16a^2}{25a^2y^2 - 36}$ **d)** $\frac{8y^2z - 18z^3}{5y^2z} : \frac{4y - 6z}{15y^2z + 10y^3}$

BC **2.200** **a)** $\frac{14x^2 - 7x}{5x^3 + 10x^2} : \frac{18x - 9}{12x + 24} \cdot \frac{45x}{84}$ **c)** $\frac{9x^2 - 49}{x^2 - 49} : \frac{6x - 14}{3x + 21} \cdot \frac{x^2 - 14x + 49}{12x^2 + 28x}$

b) $\frac{15y^3 - 3y^2}{45y + 9} \cdot \frac{75y^2 + 30y + 3}{50y^5 - 20y^4 + 2y^3} : \frac{25y^2 - 1}{25y^4 - 5y^3}$ **d)** $\frac{28y^3 - 12y^4}{98y^4 - 18y^6} \cdot \frac{36y^5 + 84y^4}{180y^6 - 420y^5} : \frac{2}{5y^2}$

BC **2.201** **a)** $\frac{16x^2 + 24xy + 9y^2}{9x^2 - 16y^2} : \frac{8x + 6y}{9x^2 - 24xy + 16y^2} \cdot \frac{15x + 20y}{(16x + 12y) \cdot (30x - 40y)}$

b) $\frac{50a^2 - 40ab + 8b^2}{75a^2 - 12b^2} \cdot \frac{25a^2 + 20ab + 4b^2}{40ac + 40ad + 16bc + 16bd} : \frac{c^3 - 3c^2d + 3cd^2 - d^3}{12c^2 - 12d^2}$

ABC **2.202** Jeder aus der Klasse soll eine Aufgabe zur Termvereinfachung erfinden, bei dem nach Anwendung mindestens einer binomischen Formel gekürzt werden kann. Tauscht die Aufgaben untereinander und vereinfacht diese.

2.4.4 Addition und Subtraktion von gleichnamigen Bruchtermen

Bruchterme mit **gleichem Nenner** (gleichnamige Bruchterme) werden addiert bzw. subtrahiert, indem man die **Zähler addiert bzw. subtrahiert**. Der Nenner bleibt dabei unverändert.

$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ bzw. $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$

2.203 Berechne: $\frac{5a-8b}{x} - \frac{14a-2b}{x}$ B

Lösung:

Es gilt: $x \neq 0$.

$\frac{5a-8b}{x} - \frac{14a-2b}{x} = \frac{5a-8b-(14a-2b)}{x} =$

$= \frac{5a-8b-14a+2b}{x} = \frac{-9a-6b}{x}$

- Schreibt man mit gemeinsamen Bruchstrich, müssen Klammern gesetzt werden.

Aufgaben 2.204 – 2.206: Berechne die Summen bzw. die Differenzen und vereinfache wenn möglich.

2.204 **a)** $\frac{5a+7b}{ab} + \frac{9a-7b}{ab}$ **b)** $\frac{6e+8f-14}{3e+7f} + \frac{25-9f+13e}{3e+7f}$ **c)** $\frac{3g-15k+7}{5k-2} + \frac{18g-12k}{5k-2}$ B

2.205 **a)** $\frac{8n-11}{2n-1} - \frac{4n-9}{2n-1}$ **b)** $\frac{12p+45}{p+11} - \frac{22p-17}{p+11}$ **c)** $\frac{13q-14}{3q-8} - \frac{4q+10}{3q-8}$ B

2.206 **a)** $\frac{6u+7ux-2x}{2u+x^2} - \frac{9u-4x}{2u+x^2} + \frac{7u-7ux}{2u+x^2}$ **b)** $-\frac{3v-8vx+4x}{v^3-4x} + \frac{2v+8vx}{v^3-4x} - \frac{14vx-5x}{v^3-4x}$ B

2.4.5 Addition und Subtraktion von ungleichnamigen Bruchtermen

Bruchterme mit verschiedenen Nennern (ungleichnamige Bruchterme) müssen vor dem Addieren bzw. Subtrahieren durch geeignetes Erweitern gleichnamig gemacht werden. Beim Erweitern eines Bruchterms werden Zähler und Nenner mit dem gleichen, von null verschiedenen Term multipliziert. Der Wert des Bruchterms ändert sich dadurch nicht.

Erweitern eines Bruchterms

2.207 Erweitere den Bruchterm $\frac{4x+y}{x^2}$ mit $x-y$. B

Lösung:

$\frac{4x+y}{x^2} = \frac{4x+y}{x^2} \cdot \frac{x-y}{x-y} = \frac{(4x+y)\cdot(x-y)}{x^2\cdot(x-y)} = \frac{4x^2-3xy-y^2}{x^2\cdot(x-y)}$

- Vergiss nicht, Klammern zu setzen.

Der Nenner wird im Allgemeinen nicht ausmultipliziert. Dadurch kann später leichter gekürzt werden.

B **2.208** Erweitere den Bruchterm auf den angegebenen Nenner.

a) $\frac{3}{5x} = \frac{?}{10x + 10x^2}$ **b)** $\frac{x+1}{x-3} = \frac{?}{2x^2 - 18}$

Lösung:

a) ursprünglicher Nenner: $5x = 5 \cdot x$

angegebener Nenner:

$10x + 10x^2 =$

$= 10x \cdot (1 + x) = 5 \cdot x \cdot \mathbf{2} \cdot \mathbf{(1 + x)}$

$\frac{3}{5x} = \frac{3 \cdot 2 \cdot (1+x)}{5x \cdot 2 \cdot (1+x)} =$

$= \frac{6 \cdot (1+x)}{10x \cdot (1+x)} = \frac{6 + 6x}{10x + 10x^2}$

- Zerlege sowohl den ursprünglichen als auch den angegeben Nenner so weit wie möglich in Faktoren.
- Der ursprüngliche Nenner muss mit $2 \cdot (1 + x)$ multipliziert werden, um den angegebenen Nenner zu erhalten.
- Erweitere dann Zähler und Nenner mit diesen Faktoren.

b) ursprünglicher Nenner: $x - 3$

angegebener Nenner:

$2x^2 - 18 = 2 \cdot (x^2 - 9) =$

$= \mathbf{2} \cdot \mathbf{(x + 3)} \cdot (x - 3)$

$\frac{x+1}{x-3} = \frac{(x+1) \cdot 2 \cdot (x+3)}{(x-3) \cdot 2 \cdot (x+3)} =$

$= \frac{(x+1) \cdot (2x+6)}{2 \cdot (x^2 - 9)} = \frac{2x^2 + 8x + 6}{2x^2 - 18}$

- Beim Zerlegen in Faktoren hebe zuerst so weit wie möglich heraus.
- Wende die binomischen Formeln an.
- Vergiss nicht, Klammern zu setzen, wenn Summen oder Differenzen multipliziert werden.

Der Hauptnenner von Bruchtermen

Vor der Addition bzw. Subtraktion müssen ungleichnamige Bruchterme auf gleichen Nenner gebracht werden. Der einfachste Term, der ein gemeinsamer Nenner ist, ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Einzelnenner und wird **Hauptnenner** (abgekürzt: HN) oder kleinster gemeinsamer Nenner genannt. Der Hauptnenner enthält alle Faktoren der einzelnen Nenner, mehrfach auftretende Faktoren nur einmal mit der jeweils höchsten vorkommenden Potenz. Die Terme, mit denen die Einzelnenner jeweils multipliziert werden müssen, um den Hauptnenner zu erhalten, nennt man **Erweiterungsfaktoren**.

B **2.209** Bestimme den Hauptnenner von $\frac{1}{18x^3y + 9x^4}$ und $\frac{1}{6x^4y + 3x^5}$ und die Erweiterungsfaktoren.

Lösung:

Zur Bestimmung des Hauptnenners ist folgende Tabelle hilfreich.

Nenner	Faktoren	Erweiterungsfaktor
$18x^3y + 9x^4$	$\mathbf{3^2} \cdot x^3 \cdot \mathbf{(2y + x)}$	x
$6x^4y + 3x^5$	$3 \cdot \mathbf{x^4} \cdot (2y + x)$	3
$HN = 3^2 \cdot x^4 \cdot (2y + x)$		

- Die einzelnen Nenner werden in Faktoren zerlegt.
- Der Hauptnenner ist das Produkt der Faktoren mit der jeweils höchsten Potenz.
- Die Erweiterungsfaktoren sind jene Terme, die im Hauptnenner „fehlen“.

2.210 Bestimme den Hauptnenner und die Erweiterungsfaktoren von $\frac{1}{4x^2 + 4xy + y^2}$, $\frac{1}{4x^2 - y^2}$ und $\frac{1}{8x^2 - 4xy}$.

B

Lösung:

Nenner	Faktoren	Erweiterungsfaktoren
$4x^2 + 4xy + y^2$	$(2x + y)^2$	$4x \cdot (2x - y)$
$4x^2 - y^2$	$(2x + y) \cdot (2x - y)$	$4x \cdot (2x + y)$
$8x^2 - 4xy$	$4x \cdot (2x - y)$	$(2x + y)^2$
$HN = 4x \cdot (2x - y) \cdot (2x + y)^2$		

- Das Produkt der Faktoren mit der jeweils höchsten Potenz ist der Hauptnenner.
- $(2x + y)$ ist in $(2x + y)^2$ bereits enthalten und wird nicht mehr aufgeschrieben.

Auch jedes Vielfache des Hauptnenners ist ein gemeinsamer Nenner. Besonders leicht zu ermitteln ist jener gemeinsame Nenner, der aus dem Produkt der einzelnen Nenner besteht. Bei diesem Vorgehen erhält man im Allgemeinem einen umfangreicheren Bruchterm als Ergebnis, der das Weiterrechnen erschwert.

Addition und Subtraktion von Bruchtermen

2.211 Addiere: $\frac{4}{x + y} + \frac{5x - y}{x^2 - y^2}$

B

Lösung:

Nenner	Faktoren	Erweiterungsfaktoren
$x + y$	$x + y$	$(x - y)$
$x^2 - y^2$	$(x + y) \cdot (x - y)$	1
$HN = (x + y) \cdot (x - y)$		

- Zerlege die einzelnen Nenner in Faktoren.
- Bestimme den Hauptnenner als kgV der einzelnen Faktoren.

$$\frac{4}{x + y} + \frac{5x - y}{x^2 - y^2} = \frac{4 \cdot (x - y) + (5x - y) \cdot 1}{(x + y) \cdot (x - y)} =$$
$$= \frac{4x - 4y + 5x - y}{(x + y) \cdot (x - y)} = \frac{9x - 5y}{(x + y) \cdot (x - y)}$$

- Erweitere die Bruchterme mit den passenden Erweiterungsfaktoren.

Erweitern von Bruchtermen

Aufgaben 2.212 – 2.213: Erweitere die Bruchterme mit dem angegebenen Term.

2.212 **a)** $\frac{x + 4}{x}$ mit $x - 3$ **b)** $\frac{5y^2 + 4}{y - 16}$ mit $7y^2 + 6y$ **c)** $\frac{4z^2 + 1}{6z + z^3}$ mit $4z^2 - 1$ B

2.213 **a)** $\frac{x^2 - 4y}{x + 5}$ mit $x + 5$ **b)** $\frac{7y^2 + 4x}{y^4 - 5x^2}$ mit $y^4 + 5x^2$ **c)** $\frac{x^2y - 3y^4}{y^3 - 1}$ mit $y^3 - 1$ B

2.214 Gib an, ob beim Erweitern ein Fehler gemacht wurde. Stelle die Rechnung gegebenenfalls durch Verändern des Zählers richtig. BC

a) $\frac{3x}{5y} = \frac{3x^2 + 6}{5xy + 10y}$ **b)** $\frac{x^2}{4} = \frac{x^3 - 3x^2}{4x - 12}$ **c)** $\frac{2x}{x - 1} = \frac{2x^2 - 2}{x^2 - 1}$ **d)** $\frac{-a}{a - 2} = \frac{-a^2 + 2a}{a^2 - 4a + 4}$

Aufgaben 2.215 – 2.216: Erweitere jeweils auf den angegebenen Nenner.

B **2.215** **a)** $\frac{x-6}{3x} = \frac{?}{3x^4 + 21x^3}$ **b)** $\frac{2+x}{4x^2} = \frac{?}{8x^4 - 12x^3}$ **c)** $\frac{25}{9x} = \frac{?}{18x^5 - 18x^3}$

B **2.216** **a)** $\frac{6+x}{x+2} = \frac{?}{15x^2 - 60}$ **b)** $\frac{4+x}{4-x} = \frac{?}{32x - 2x^3}$ **c)** $\frac{3x-4}{2x+1} = \frac{?}{12x^3 - 3x}$

D **2.217** Die Mathematik-Professorin fragt die Klasse nach dem gemeinsamen Nenner von $\frac{7x}{x^2} + \frac{8x}{15} - \frac{6}{9x}$ und bekommt drei richtige Antworten: $15x$, $45x^2$ und $135x^3$. Erkläre, wie die Nenner zustande gekommen sein könnten.

Addition und Subtraktion von Bruchtermen

Aufgaben 2.218 – 2.226: Vereinfache die Terme so weit wie möglich.

B **2.218** **a)** $\frac{6d-15}{3d} - \frac{5d^2-13}{18d^4} + \frac{6d-11}{24d^2}$ **b)** $\frac{1-x^2}{9x^2} - \frac{2+x}{18x} - \frac{x-3}{81x^3}$

B **2.219** **a)** $\frac{4\cdot(2+a)}{28a^3} - \frac{a^2+3}{7a^2} - \frac{9\cdot(1-4a)}{8a}$ **b)** $\frac{3k^2+1}{5k^5} + \frac{25-8k}{60k^2} - \frac{5\cdot(2-3k)}{15k}$

B **2.220** **a)** $n - \frac{9-4n^2}{3+n}$ **b)** $\frac{3p-q}{4p+3q} - 2p$ **c)** $r + \frac{12r-7}{4r-5}$

B **2.221** **a)** $3s^2 - \frac{3s^4+15s^2}{s^2+5}$ **b)** $7t^3 - \frac{6t^5-10t^4}{8t^2+11t}$ **c)** $\frac{18u^7+5u^6}{4u-u^2} + u^5$

B **2.222** **a)** $\frac{3xz+1}{5z} - \frac{4-2z}{3x} + 3x$ **b)** $\frac{y-z}{2z} - \frac{32z^2+y}{18y} + 2$ **c)** $\frac{x-2y}{4y} - \frac{y-4x}{6x} - 5$

B **2.223** **a)** $\frac{6r+1}{r-5} - \frac{r-1}{r+5}$ **b)** $\frac{5s^2+7}{s-3} - \frac{2^2-1}{3+s}$ **c)** $\frac{3t^2-4}{t+9} - \frac{4t^2}{t-9}$

B **2.224** **a)** $\frac{3a^2+1}{5a} - \frac{10-2a^2}{10}$ **b)** $\frac{a+4b}{4b+8} - \frac{3a+b}{8b}$ **c)** $\frac{12c^3+5c}{3c} - \frac{15c-8c^3}{2c-5}$

B **2.225** **a)** $\frac{5h-3g}{8g^2+3} + \frac{7g+4h}{11g^2}$ **c)** $\frac{12e+7g}{15e^2} + \frac{3g-2e}{3e^2-9e}$ **e)** $\frac{2hk+5k}{7k^2} - \frac{8hk+11k}{16-3k^2}$

b) $\frac{3-h}{2h+5} - \frac{h^2+11}{6h^2}$ **d)** $\frac{8h-k}{8k-5h} - \frac{h+3k}{12h}$ **f)** $\frac{g}{15gk} + \frac{4k^2-3}{3k-9g}$

B **2.226** **a)** $\frac{6a^2-5}{a^2-9} + \frac{8a}{a+3}$ **d)** $\frac{4c^3-1}{c^2-4} + \frac{9-2c^2}{c+2}$ **g)** $\frac{e+8}{e-1} + \frac{4e^2-7}{e^2-1}$

b) $\frac{7b^2}{16-b^2} - \frac{b^2+5}{4+b}$ **e)** $\frac{3d+4}{d-5} - \frac{8d+1}{d^2-25}$ **h)** $\frac{f^2}{f^2-36} - \frac{7-3f}{f-6}$

c) $\frac{3x+5}{64-x^2} + \frac{5x-42}{8-x}$ **f)** $\frac{y^2-1}{y^2+81} - \frac{8-y}{y-9}$ **i)** $\frac{18-z}{49-z^2} + \frac{z+11}{7+z}$

AB **2.227** Stelle einen Term für den Kehrwert des Gesamtwiderstands von drei parallel geschalteten Widerständen auf, wenn der zweite Widerstand doppelt so groß ist wie der erste und der dritte um 10 Ω kleiner ist als der zweite. Vereinfache den Term so weit wie möglich.
Hinweis: $\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$

Aufgaben 2.228 – 2.233: Vereinfache die Terme so weit wie möglich.

2.228 (B)
a) $\frac{a^2 - 6a}{9a^2 + 6a + 1} + \frac{8a - 5}{3a + 1}$ **c)** $\frac{c^2 + 4}{4c^2 + 4c + 1} + \frac{2 + c}{2c + 1}$ **e)** $\frac{3e}{7 + e} + \frac{12e^2 + 7e}{49 + 14e + e^2}$
b) $\frac{b + 4}{36 + 12b + b^2} - \frac{3 - 2b}{6 + b}$ **d)** $\frac{3d + 4}{5d + 1} - \frac{8d^2 + 1}{25d^2 + 10d + 1}$ **f)** $\frac{8f^2 - 5}{f^2 + 10f + 25} - \frac{9 - f}{f + 5}$

2.229 (B)
a) $\frac{g + 5}{g^2 - 10g + 25} + \frac{2}{g - 5}$ **c)** $\frac{h - 6}{h^2 - 6h + 9} + \frac{2}{h - 3}$ **e)** $\frac{5}{e - 1} + \frac{e}{e^2 - 2e + 1}$
b) $\frac{6 + g}{36 - 12g + g^2} - \frac{2}{6 - g}$ **d)** $\frac{k + 4}{4 - k} - \frac{k^2 - 4}{16 - 8k + k^2}$ **f)** $\frac{n^2 + 4}{n - 8} - \frac{n^3 - 32}{n^2 - 16n + 64}$

2.230 (B)
a) $\frac{2}{r} + \frac{r + 4}{r^2 + 3r} - \frac{2 \cdot (r + 5)}{r^2 - 9}$ **c)** $\frac{1}{r^2 - s^2} + \frac{r + 2s}{r^2 - rs} + \frac{r - s}{r^2}$ **e)** $\frac{t + 1}{8t} - \frac{t^2}{12t + 12} - \frac{1}{t^2 - 1}$
b) $\frac{u + 2}{3u + 15} - \frac{u - 2}{u^3 - 25u} + \frac{2}{9u}$ **d)** $\frac{vx}{v^2 - x^2} + \frac{v + x}{v - x} - \frac{v - x}{v + x}$ **f)** $\frac{4wx}{w^2 - x^2} - \frac{2wx}{w - x} + \frac{x - w}{w + x}$

2.231 (B)
a) $\frac{5xy}{x^2 + 2xy + y^2} - \frac{xy}{4x^2 + 4xy} + \frac{y^2}{16x^2}$ **c)** $\frac{5x - y}{12x + 3y} + \frac{4xy}{16x^2 + 8xy + y^2} - \frac{y^2 + x}{9xy}$
b) $\frac{k}{4k^2 - 8km} + \frac{6}{k^2m - 4km^2 + 4m^3} - \frac{5 + k}{10k^2m}$ **d)** $\frac{p - 9q}{p^3 - 4p^2q} - \frac{8}{2p^2 - 16pq + 32q^2} + \frac{5q + 2p}{8pq}$

2.232 (B)
a) $\frac{m^2}{4m^2 + 8m + 4} - \frac{m}{8m + 8} - \frac{4}{12m^2 - 12} + \frac{m}{m^2 - 2m + 1}$
b) $\frac{1}{n^2 - 10n + 25} + \frac{n^2}{5n^2 - 125} - \frac{-5}{15n - 75} - \frac{n}{n^2 + 10n + 25}$

2.233 (B)
a) $\frac{1}{p^4 - 1} + \frac{1}{p^2 - 2p + 1} - \frac{1}{p^2 + 2p + 1} + \frac{1}{p^2 + 1}$
b) $\frac{1}{25 - q^2} - \frac{1}{25 - 10q + q^2} + \frac{1}{25 + 10q + q^2} - \frac{1}{625 - q^4}$
c) $\frac{r}{9r^2 - 81} + \frac{1}{6r^2 - 36r + 54} - \frac{r}{(3r + 9)^3} - \frac{1}{9r^2 + 54r + 81}$

Aufgaben 2.234 – 2.235: Zeige, dass die Aussagen stimmen, und beschreibe, wie du möglichst geschickt vorgehst.

2.234 (BC) $\frac{2}{1 - 9x^2} - \frac{1}{2 \cdot (1 + 3x)} - \frac{1}{2 \cdot (1 - 3x)} = \frac{1}{(1 + 3x) \cdot (1 - 3x)}$

2.235 (BC) $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2} + \frac{x_5 + x_6}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} + \frac{x_4 + x_5 + x_6}{3}\right)$

Vermischte Aufgaben

Aufgaben 2.236 – 2.239: Vereinfache und kürze so weit wie möglich.

2.236 (B) **a)** $\frac{3a - 4}{a} \cdot \frac{2a}{7} - \frac{6}{7}$ **b)** $\frac{b^2}{4} : \frac{b^3}{12} + \frac{b}{10} \cdot \frac{b^2}{3}$ **c)** $\left(\frac{c}{7} + \frac{4}{c}\right) : \frac{5}{14c} - \frac{4c^2 + 27}{10}$

2.237 (B) **a)** $(2m + 3m^2n) \cdot \frac{1}{m} - 2$ **b)** $\left(\frac{1}{2d} + \frac{3}{4d} + \frac{5}{6d}\right) : d^3 - d^2$ **c)** $\left(\frac{3 - e}{e^2} - \frac{3}{e} + \frac{3}{4}\right) \cdot e^3 + 4e^2$

2.238 (B) **a)** $\left(\frac{g}{g - h} - \frac{g^2}{g^2 - h^2}\right) \cdot \frac{3g}{4h + 4g}$ **b)** $\left(\frac{y}{x - y} + 1\right) \cdot \left(\frac{y}{x + y} - 1\right) : \left(2y - \frac{x^2 + y^2}{y}\right)$

2.239 (B) **a)** $\left(\frac{x - 3}{4} + \frac{2}{x + 3}\right) \cdot \left(\frac{2x^2}{3x - 3} - \frac{2x}{3}\right)$ **b)** $\left(\frac{u^2}{u^2 - 4} - \frac{u - 3}{2 + u}\right) : \left(\frac{3 - u}{2 - u} - \frac{u^2 - 6}{(u - 2)^2}\right)$

2.4.6 Doppelbruchterme

Bruchterme, deren Zähler bzw. Nenner (mindestens) einen Bruchterm enthalten, werden Doppelbruchterme genannt.

Vereinfachen eines Doppelbruchterms: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ mit $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$

Aufgaben 2.240 – 2.244: Forme die Doppelbruchterme in Bruchterme um und vereinfache so weit wie möglich.

B **2.240** **a)** $\frac{a^2 - 1}{\frac{a + 1}{a}}$ **b)** $\frac{\frac{x}{a} + y}{x - y}$

Lösung:

a) $\frac{a^2 - 1}{\frac{a + 1}{a}} = \frac{\frac{a^2 - 1}{1}}{\frac{a + 1}{a}} = \frac{a^2 - 1}{1} : \frac{a + 1}{a} = \frac{a^2 - 1}{1} \cdot \frac{a}{a + 1} = \frac{(a^2 - 1) \cdot a}{a + 1} = \frac{\cancel{(a + 1)} \cdot (a - 1) \cdot a}{\cancel{a + 1}} = a \cdot (a - 1) = a^2 - a$

b) $\frac{\frac{x}{a} + y}{x - y} = \frac{\left(\frac{x}{a} + y\right)}{(x - y)} \cdot \frac{a}{a} = \frac{\left(\frac{x}{a} + y\right) \cdot a}{(x - y) \cdot a} = \frac{x + ay}{ax - ay}$

- Oft lassen sich Doppelbruchterme durch Erweitern vereinfachen. Hier wird der gegebene Bruchterm mit a erweitert.

B **2.241** **a)** $\frac{\frac{a^2}{b}}{\frac{a^6}{b^5}}$ **b)** $\frac{\frac{a^4}{b^5}}{\frac{a^2}{b^3}}$ **c)** $\frac{\frac{c^5}{d^2}}{\frac{c^3}{d^4}}$ **d)** $\frac{\frac{c^2}{d}}{\frac{c^3}{d^2}}$ **e)** $\frac{\frac{2a^2b}{7c}}{\frac{5a^6b^2}{14c}}$ **f)** $\frac{\frac{8ab^2}{3c^4}}{\frac{2a^3b^2}{9c^2}}$

B **2.242** **a)** $\frac{a}{\frac{a^2}{b}}$ **b)** $\frac{b^2}{\frac{a^3}{a}}$ **c)** $\frac{\frac{c^3}{d}}{2c}$ **d)** $\frac{1}{\frac{c}{d}}$ **e)** $\frac{c}{\frac{1}{d}}$ **f)** $\frac{\frac{1}{d}}{c}$

B **2.243** **a)** $\frac{\frac{5a^2b^4c}{7xyz}}{\frac{25a^3b^2c^4}{14x^2y^7c^9}}$ **b)** $\frac{\frac{8x^5y^3z^5}{9a^2b^7c^5}}{\frac{27x^{10}b^4c^7}{16a^2bc}}$ **c)** $\frac{\frac{17d^4e^2f^3}{21x^{-7}y^9z^2}}{\frac{34d^8e^5f^9}{35x^{15}y^3z^{12}}}$ **d)** $\frac{\frac{12x^3y^7z^4}{13d^3e^4f^3}}{\frac{24x^2y^6z^3}{23d^4e^5f^4}}$

B **2.244** **a)** $\frac{\frac{1 + a}{4a}}{\frac{a - 1}{a^4}}$ **b)** $\frac{\frac{2}{3b}}{\frac{14 + 7b}{27b^2}}$ **c)** $\frac{\frac{2}{9c - 18}}{\frac{2c + 4}{c - 2}}$ **d)** $\frac{\frac{4 + 2d}{d^5}}{\frac{2 + d}{d^7}}$

B **2.245** Vereinfache durch geeignetes Erweitern.

a) $\frac{e - 1}{e - \frac{1}{e}}$ **b)** $\frac{f - 1}{\frac{e}{f} - 1}$ **c)** $\frac{\frac{2}{g} + 4f}{g - 2f}$ **d)** $\frac{gh - \frac{g}{h}}{6gh - g^4}$

AB **2.246** Der Gesamtwiderstand einer Parallelschaltung ist der Kehrwert der Summe der Kehrwerte der Teilwiderstände. Gib einen Term für den Gesamtwiderstand an, wenn der zweite Widerstand um 50 Ω größer ist als der erste.

2.247 Vereinfache den Doppelbruch mithilfe von Technologieeinsatz: $\frac{4d - \frac{1}{d}}{\frac{1}{d} + 2d}$

B

Lösung:
Zum Beispiel mit TI-Nspire:
Eingabe als Division: Eingabe über die **mathematischen Vorlagen**:

1.1 *Nicht
(4d−(1/d))/((1/d)+2d)

$\frac{4d - \frac{[]}{[]}}{[]}$

$\frac{4 \cdot d - \frac{1}{d}}{\frac{1}{d} + 2 \cdot d}$ $\frac{4 \cdot d^2 - 1}{2 \cdot d^2 + 1}$

- Der TI-Nspire übernimmt die Eingabe als Doppelbruch und gibt den vereinfachten Doppelbruch aus.

Aufgaben 2.248 – 2.249: Vereinfache die Doppelbrüche so weit wie möglich und kontrolliere das Ergebnis mit Technologieeinsatz.

2.248 **a)** $\frac{1 + \frac{1}{a}}{1 - \frac{1}{a}}$ **b)** $\frac{4d - \frac{1}{d}}{\frac{1}{d} + 2d}$ **c)** $\frac{3 - \frac{1}{g^2}}{\frac{1}{g^2} + 18}$ **d)** $\frac{x - \frac{1}{fx}}{\frac{4}{f} + x^2}$

B

2.249 **a)** $\frac{4p - q}{4p - \frac{4p^2 - q^2}{p - q}}$ **b)** $\frac{\frac{w^2}{2} + \frac{2w^2 - 2v^2}{5}}{v - \frac{66v^2 - 81w^2}{30v}}$ **c)** $\frac{\frac{u - 2t}{-4t}}{u - \frac{t^2u^2 - 4t^4}{4t^3}}$ **d)** $\frac{rs - \frac{r^2 + r^3s}{r^2 - 1}}{(s + r) \cdot (1 - r)}$

B

2.250 Zeige, dass die Aussage stimmt und beschreibe deine Vorgehensweise: $\frac{\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}} = 2$

BCD

2.5 Polynomdivision

Die Division durch ein Polynom wird Polynomdivision genannt. Sie wird im Prinzip wie die Division zweier Zahlen ausgeführt. Dabei muss der Grad des Dividenden größer oder gleich dem Grad des Divisors sein. Die Polynomdivision wird mit dem im folgenden Beispiel beschriebenen Rechenverfahren durchgeführt.

2.251 Berechne $(x^3 - 6x^2 + 16x - 16) : (x - 2)$.

B

Lösung:

$(x^3 - 6x^2 + 16x - 16) : (x - 2) = x^2 - 4x + 8$
$\underline{-x^3 + 2x^2}$
$0 - 4x^2 + 16x$
$\underline{+4x^2 - 8x}$
$0 + 8x - 16$
$\underline{-8x + 16}$
$0 + 0$ Rest

Ergebnis: $x^2 - 4x + 8$

1) $x^3 : x = x^2$
2) $(x - 2) \cdot x^2 = x^3 - 2x^2$;
so Anschreiben, dass gleiche Potenzen untereinander stehen.
3) **Vorzeichenwechsel** und Addition
4) nächster Summand herab
5) $(-4x^2) : x = -4x$; Wiederholung 3) bis 4)
6) $8x : x = 8$; Wiederholung 3) bis 4)
7) Es bleibt 0 Rest.

Dividend und Divisor werden nach fallenden Potenzen geordnet. Für nicht vorkommende Potenzen wird Platz frei gelassen oder 0 als Platzhalter eingesetzt, damit das Untereinanderschreiben gleicher Potenzen möglich ist.

B **2.252** Berechne $(-7 - 5x^2 + 2x^3) : (-3 + x)$.

Lösung:

$$
\begin{array}{l}
(2x^3 - 5x^2 + 0x - 7) : (x - 3) = 2x^2 + x + 3 \\
\underline{-2x^3 + 6x^2} \\
\quad 0 + x^2 + 0x \\
\quad \underline{-x^2 + 3x} \\
\qquad 0 + 3x - 7 \\
\qquad \underline{-3x + 9} \\
\qquad\quad 0 + 2 \text{ Rest}
\end{array}
$$

Ergebnis: $2x^2 + x + 3 + \frac{2}{x-3}$

1) Ordnen nach fallenden Potenzen
2) $2x^3 : x = 2x^2 \Rightarrow (x - 3) \cdot 2x^2 = 2x^3 - 6x^2$
3) **Vorzeichenwechsel** und Addition
4) nächste Stelle herab
5) $x^2 : x = x \Rightarrow (x - 3) \cdot x = x^2 - 3x$
6) Wiederholung von 3) bis 4)
7) $3x : x = 3 \Rightarrow (x - 3) \cdot 3 = 3x - 9$
8) Wiederholung von 3)
9) Es bleibt 2 Rest.

Aufgaben 2.253 – 2.262 Führe die Polynomdivisionen aus.

B **2.253** **a)** $(2z^3 + z^2 - 13z + 6) : (z - 2)$ **b)** $(2y^3 - 3y^2 - 12y + 20) : (y - 2)$

B **2.254** **a)** $(2w^3 - 5w^2 - 4w + 3) : (2w - 1)$ **b)** $(2v^3 - 9v^2 + 3v + 20) : (2v + 1)$

B **2.255** **a)** $(2t^4 - 9t^3 + 5t^2 - 3t - 6) : (t - 4)$ **b)** $(2s^4 + 16s^3 + 48s^2 + 64s + 32) : (s + 2)$

B **2.256** **a)** $(2p^4 + 5p^3 + 9p^2 + 8p + 6) : (p^2 + 2p + 2)$ **b)** $(6n^4 - 19n^3 + 3n - 4) : (3n^2 - 2n + 1)$

B **2.257** **a)** $(h^2 - 4h^3 - 1 + h) : (2h - 1)$ **b)** $(c^2 - 2c^4 + 2c^5 + 3 - 3c^3) : (2c^2 - 3)$

B **2.258** **a)** $(9 - k^4 - 6k + 2k^3) : (k^2 - 3)$ **b)** $(4q^2 - q^5 + 2q - 12 + 3q^3) : (4 - q^3)$

B **2.259** **a)** $(2t^3 + t^5 + 2t) : (1 + t^2)$ **b)** $(3p^3 + p^4 - 6p - p^2) : (2p + p^2)$

B **2.260** **a)** $(4r^3 + r - 2) : (2r - 1)$ **b)** $(-4 + u^4 - 2u - u^3) : (2 + u^2)$

B **2.261** **a)** $\left(x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 3x - 2\right) : \left(x + \frac{1}{2}\right)$ **b)** $(3y^3 + 8y^2 - 9y + 2) : \left(y - \frac{1}{3}\right)$

B **2.262** **a)** $(6g^6 + 5g^4h + 49h^3) : (3g^2 + 7h)$ **b)** $(6c^9 - 13c^6d + 9d^3) : (2c^3 - 3d)$

Aufgaben 2.263 – 2.264: Führe die Polynomdivisionen aus. Schreibe dann als Lösung den Dividend als Produkt von Divisor und Quotient an. Was fällt dir auf?

BD **2.263** **1)** $(a^5 - b^5) : (a - b)$ **2)** $(a^5 + b^5) : (a + b)$

BD **2.264** **1)** $(a^4 - b^4) : (a + b)$ **2)** $(a^4 - b^4) : (a - b)$

B **2.265** Kürze mithilfe der Polynomdivision.

a) $\frac{4x^2 + 28x + 48}{5x + 15} = \frac{?}{5}$ **b)** $\frac{21 - 7z}{3z^2 - 15z + 18} = \frac{7}{?}$

D **2.266** Begründe, ohne die Division auszuführen, welche Lösungen nicht stimmen können.

$(2m^3 + 2m^2 - 2m + 6) : (2m + 3)$

A) $m^2 - 2m - 2$ **B)** $2m^2 - 2m + 2$ **C)** $m^2 - 2m + 2$

Zusammenfassung

Variablen sind Buchstaben, die für unbekannte Zahlen bzw. Größen stehen. Ein **Term** ist ein sinnvoller mathematischer Ausdruck, der aus Variablen, Zahlen und Rechenzeichen besteht.

Ein **Minuszeichen vor einem Klammernterm ändert** beim Auflösen der Klammern die **Vor- und Rechenzeichen** innerhalb der Klammern.

Eine Potenz a^n ist für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ bestimmt. Weiters gilt: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ und $a^0 = 1$

Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

Division von Potenzen mit gleicher Basis

$\frac{a^n}{a^m} = a^n : a^m = a^{n-m} \quad (a \neq 0)$

Potenz eines Produkts

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Potenz eines Bruchs

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0)$

Potenz einer Potenz

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Polynome (mehrgliedrige Terme) werden **multipliziert**, indem **jeder eingliedrige Term des einen Polynoms mit jedem eingliedrigen Term des anderen Polynoms** multipliziert wird.

Binomische Formeln

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $\quad (a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $\quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Gleichnamige Bruchterme werden **addiert** bzw. **subtrahiert**, indem die **Summe** bzw. die **Differenz der Zähler** gebildet wird. Der Nenner bleibt dabei unverändert. **Ungleichnamige Bruchterme** müssen zuerst auf **gemeinsamen Nenner** gebracht werden.

Bruchterme werden **multipliziert**, indem sowohl die **Zähler** als auch die **Nenner** miteinander **multipliziert** werden. Durch einen **Bruchterm** wird **dividiert**, indem mit seinem **Kehrwert multipliziert** wird.

Auflösen eines Doppelbruchterms: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ und $d \neq 0$.

Weitere Aufgaben

Rechnen mit Termen und Potenzen

2.267 Vereinfache den Term. B

a) $5a - 7a^2 + 10a - 15a^3 + 21a^3 - 25a$ **b)** $4b^2 - 6b + 9b^3 - 12b + 15b^3 - 18b^2$

2.268 Hebe heraus. B

a) $x^5y^6z^2 + xy^4z^2 - x^3y^8z^5$ **b)** $x^2y^7z^3 - x^{11}yz^2 + x^8y^4z^6 + x^7y^3z^2$ **c)** $x^{11}y^4z^9 - x^{10}z^7 + x^8y^3z^{11}$

Aufgaben 2.269 – 2.273: Vereinfache die Terme soweit wie möglich.

B **2.269** **a)** $a^{-4} \cdot b^{-3} \cdot a^5 \cdot b^{-5} \cdot a^7$ **b)** $b^{12} \cdot a^{-1} \cdot c^7 \cdot a^{-2} \cdot b^3 \cdot c^{-7} \cdot a^5$ **c)** $c^2 \cdot b^{-3} \cdot a^{-1} \cdot b^0 \cdot c^{-2} \cdot a^5$

B **2.270** **a)** $\left(1 + \frac{5}{2} \cdot \frac{b}{2a}\right) : \frac{b}{8a}$ **b)** $\left(y - \frac{3}{7y} \cdot \frac{5}{6y}\right) : \frac{1}{7y^3}$ **c)** $\left(-\frac{z}{4} \cdot \frac{1}{10} + z^{-1}\right) : 18z$

B **2.271** **a)** $(4x^2y^5z^3 + 7x^5y^6z) \cdot \frac{1}{x^2y^{-1}z^3}$ **c)** $(12xy^8z^2 - 9x^2y^3z^5) \cdot \frac{1}{x^3y^6z^2}$

b) $(24y^4z^5 + 32x^3y^{-8}z^2) \cdot \frac{1}{8x^4y^2z^4}$ **d)** $(36x^{-1}y^3z^7 - 24x^4y^{-9}z^4) \cdot \frac{1}{6x^{-4}y^5z^6}$

B **2.272** $(-7e + 8f)^2 - 9 \cdot (6e - 3f)^2 - (8e + 2f)^2 - (-4e - f)^2$

B **2.273** $(f - 12e)^2 + (-4f - 7e)^2 + (3f + 5e)^2 - 4 \cdot (-8e + 2f)^2$

AD **2.274** Hannes hat sich für Monika ein Zahlenrätsel ausgedacht. Monika soll sich eine Zahl ausdenken und zu dieser eins addieren, die Summe quadrieren und davon zuerst das Quadrat der gedachten Zahl abziehen und zuletzt noch eins subtrahieren. Monika sagt Hannes das Ergebnis, er dividiert es noch durch zwei und nennt ihre gedachte Zahl.

1) Begründe, warum Hannes nur durch zwei dividieren muss, um Monikas Zahl zu kennen.

2) Erfindet zu zweit ein ähnliches Rätsel unter Verwendung einer binomischen Formel.

Aufgaben 2.275 – 2.277: Vereinfache die Terme so weit wie möglich.

B **2.275** **a)** $\left(\frac{3a^2x}{4} - \frac{2y}{3}\right)^2 + \left(\frac{3a^2x}{5} + \frac{10y}{12}\right)^2$ **b)** $\left(\frac{3xy}{4} + \frac{8b^4y^2}{6}\right)^2 - \left(\frac{5xy}{2} - \frac{14b^4y^2}{3}\right)^2$

B **2.276** **a)** $(-3a + 2b)^4 + (5a - b)^4$ **b)** $(2c^2 - 5d^2)^3 - (c^2 - 8d^2)^3$

B **2.277** **a)** $\left(\frac{x}{4} + \frac{2y}{5}\right)^3 + \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)^3$ **b)** $\left(\frac{2a}{3} - \frac{4b}{5}\right)^3 - \left(\frac{5a}{6} + \frac{6b}{10}\right)^3$

D **2.278** Begründe, warum man den Term $\left(\frac{3c}{4} + \frac{d}{3}\right)^3 + \left(\frac{c}{2} - \frac{2d}{3}\right)^3$ nicht wie folgt anschreiben darf:
$\left(\frac{3c}{4} + \frac{d}{3} + \frac{c}{2} - \frac{2d}{3}\right)^3$

Rechnen mit Bruchtermen

Aufgaben 2.279 – 2.282: Vereinfache die Terme so weit wie möglich.

B **2.279** **a)** $\frac{4}{ab} - \frac{5}{bc} + \frac{6}{ac}$ **b)** $\frac{a}{16bc} + \frac{b}{4ac} - \frac{c}{40ab}$ **c)** $\frac{ab}{75c} - \frac{ac}{15b} + \frac{bc}{25a}$

B **2.280** **a)** $\frac{5d}{2ab^3} + \frac{11d^2}{18ab^2}$ **b)** $\frac{5e}{18cb^4} - \frac{12d}{21cb^2}$ **c)** $\frac{9d}{14ef^2} + \frac{7d}{18fe^2}$

B **2.281** **a)** $\frac{5}{4x + 20} - \frac{7}{8x} + 3$ **b)** $\frac{4y}{7y + 28} + y - \frac{9}{42y^2}$ **c)** $18 - \frac{5z}{25z + 40} + \frac{7}{20z}$

B **2.282** **a)** $\frac{xy}{ab} - \frac{(a - x) \cdot (y - a)}{a \cdot (a - b)} + \frac{(x - b) \cdot (y - b)}{b \cdot (b - a)}$ **b)** $\frac{a + b}{(b - c) \cdot (c - a)} + \frac{b + c}{(c - a) \cdot (a - b)} - \frac{c + a}{(a - b) \cdot (b - c)}$

B **2.283** Kürze den Bruchterm. **a)** $\frac{11y^2 - 99}{11xy^2 - 66xy + 99x}$ **b)** $\frac{160z - 80z^2 + 10z^3}{5z^5 - 80z^3}$

Aufgaben 2.284 – 2.294: Vereinfache die Terme, dokumentiere die Bestimmung des gemeinsamen Nenners und kontrolliere das Ergebnis mithilfe von Technologieeinsatz.

2.284 **a)** $\frac{7y-3}{4x^2+20xy+25y^2}-\frac{6xy}{10x^2+25xy}$ **c)** $\frac{6x-5z}{28x+8z}-\frac{z^2+8z^2}{49x^2+28xz+4z^2}$ BC

b) $\frac{c\cdot(b+2)}{9b^2-6bc+c^2}-\frac{bc}{15b^2-5bc}$ **d)** $\frac{8c}{6c^2-24bc+24b^2}-\frac{7+c^3}{4c^3-8bc^2}$

2.285 **a)** $\frac{2}{e+f}-\frac{3f}{f^2-e^2}-\frac{1}{e-f}+\frac{ef}{e^3+f^3}$ **b)** $\frac{g^2+gh}{hg^2-h^3}+\frac{2h}{h^2-g^2}-\frac{g^2-h^2}{hg^2+2h^2g+h^3}-\frac{3}{h+g}$ BC

Hinweis: $e^3+f^3=(e+f)\cdot(e^2-ef+f^2)$

2.286 **a)** $\frac{4q-8p}{9p^2-12pq+4q^2}-\frac{15q^2}{3p+2q}+\frac{5(p+3q)}{9p^2-4q^2}$ **b)** $\frac{3r+5}{16r^2-36s^2}-\frac{7s-2}{16r^2+48rs+36s^2}-\frac{s+5r}{4r-6s}$ BC

2.287 **a)** $\frac{3m\cdot(m+4)}{m^2+2m+1}+\frac{5m^2-3m}{m+1}-\frac{7-8m+9m^2}{m^2-1}$ **b)** $\frac{n^2\cdot(n+1)}{n^2-2n+1}+\frac{-n+2n^2}{n^2-1}-\frac{8n-5}{n-1}$ BC

2.288 **a)** $\frac{2x+6y}{5y}\cdot\left(\frac{10x}{4x+12y}-\frac{3x-9y}{4y}\right)$ **b)** $\frac{2x-2y}{5y}\cdot\left(\frac{x-y}{3x}-\frac{x-2y}{4x-4y}\right)$ BC

2.289 **a)** $\left(10p-\frac{10p^2+q^2}{p+q}\right):\frac{4p^2-4q^2}{p}\cdot\frac{8p+8q}{32q^2}$ **b)** $\left(\frac{1+t^2}{1-t}+t\right):\frac{1}{1-t}\cdot\frac{1-t+t^2}{t}$ BC

2.290 **a)** $\left(\frac{5}{7}+\frac{m}{n}\right)\cdot\left(\frac{5}{m}+\frac{7}{n}\right)-\left(\frac{7}{m}+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(5+\frac{7m}{n}\right)$ **b)** $\left(\frac{m}{4}+\frac{3}{n}\right)\cdot\left(\frac{3}{m}-\frac{4}{n}\right)+\left(\frac{m}{4}-\frac{3}{n}\right)\cdot\left(4+\frac{3n}{m}\right)$ BC

2.291 $\left(\frac{4q}{5p}+\frac{3p}{5q}\right)\cdot\left(\frac{3q}{4p}-\frac{4p}{5q}\right)-\left(\frac{q}{10p}-\frac{p}{2q}\right)\cdot\left(\frac{q}{5p}-\frac{p}{4q}\right)$ BC

2.292 $\frac{-2u^2}{180u^2-320}-\frac{2u-5}{10u^3}-\frac{2}{36u^2+96u^3+64u^4}$ BC

2.293 $\frac{v}{27v^3+27v^2+9v+1}+\frac{2v^2}{9v^2-6v+1}-\frac{3v^3}{9v^2-1}$ BC

2.294 $\frac{1+2w}{4w^2-16w+16}+\frac{3w+4}{16w^2-64}-\frac{5+6w}{8w^3-48w^2+96w-64}$ BC

Vermischte Aufgaben

Aufgaben 2.295 – 2.297: Vereinfache jeweils so weit wie möglich.

2.295 **a)** $\left(\frac{48a^3}{k+1}+\frac{60a}{k-1}\right):\frac{3a^2}{k-1}$ **b)** $\left(\frac{75b^4}{2k+4}+\frac{100b^0}{4k-8}\right):\frac{20b^3}{6k-12}$ **c)** $\left(\frac{2b}{a^4-1}-\frac{3b^2}{a^2+1}\right):\frac{5b^2}{a^4-1}$ B

2.296 **a)** $\left(\frac{2a^4}{b^3}+\frac{8a}{b}-\frac{4a^2}{b^7}\right):\frac{2a^4}{b^2}$ **c)** $\left(\frac{4d^2}{5c^5}-\frac{20d^6}{25c^2}+\frac{6d^4}{40c^9}\right):\frac{24d^3}{15c^3}$ B

b) $\left(\frac{8a^3}{21b^5}-\frac{24a^5}{27b^3}+\frac{64a^4}{33b^8}\right):\frac{16a^2}{9b^4}$ **d)** $\left(\frac{21c^2}{32d^4}-\frac{7c^9}{16d^6}-\frac{91c^7}{48d^{10}}\right):\frac{56c^5}{20d^8}$

2.297 **a)** $3+\frac{4x+1}{4+\frac{5x-3}{2}}$ **b)** $12y-\frac{16+4y}{7-\frac{3y-4}{5y}}$ **c)** $7x+\frac{12-3x}{8+\frac{4x-18}{5}}$ **d)** $5-\frac{8y+40}{9-\frac{4y+16}{4y}}$ B

Terme und Variablen

Aufgaben 2.298 – 2.299: Forme die Doppelbruchterme in Bruchterme um und vereinfache so weit wie möglich.

B **2.298** **a)** $\dfrac{\dfrac{75a^{-3}b^2}{48c^9d^{11}}}{\dfrac{25a^{-4}b^5}{64c^4d^3}}$ **b)** $\dfrac{\dfrac{120e^3f^{-1}g^6h}{136k^9}}{\dfrac{24e^{-7}g^3}{85f^2h^{-2}k^6}}$ **c)** $\dfrac{\dfrac{88g^0h^3k^9}{50m^{-4}n^{-7}}}{\dfrac{55g^{-5}hk^7}{16m^8n^{-12}}}$ **d)** $\dfrac{\dfrac{63u^8}{72v^4w^4x^7y^{-2}}}{\dfrac{21v^{-2}u^2}{36w^{-8}x^3y^{-7}}}$

B **2.299** **a)** $\dfrac{\dfrac{15a^2}{15a^4 + 9a^3}}{\dfrac{25a - 15}{2a}}$ **b)** $\dfrac{\dfrac{12mn^4 - 12n^3p}{9mn + 9p}}{\dfrac{6mn^3 - 6n^2p}{4n^3p + 4n^4m}}$ **c)** $\dfrac{\dfrac{14r^3 + 28r^2s}{r^2s^2 + 9s^2}}{\dfrac{14s + 7r}{9s^2 - 3rs^2}}$ **d)** $\dfrac{\dfrac{u + v}{18w^4}}{\dfrac{4v^2 - 4u^2}{9uw - 9vw}}$

Aufgaben 2.300 – 2.301: Führe die Polynomdivisionen durch.

B **2.300** **a)** $(2t^4 - 9t^3 + 5t^2 - 3t - 6) : (t - 4)$ **b)** $(s^4 + 3s^3 - 7s^2 - 9s - 12) : (s + 4)$

B **2.301** **a)** $(2 + 4h + h^3) : (h - 2)$ **b)** $(v^2 - 3v^3 + 2v^5 + 3) : (2v^2 - 3)$

Aufgaben 2.302 – 2.303: Zerlege die Terme durch die Division in Faktoren.

B **2.302** **a)** $(-y^2 + 4y^6 + 6y - 12y^3) : (-2 + 4y^2)$ **b)** $(z^2 + 2z^5 + 6z + 2) : (-2z + z^2 + 2)$

B **2.303** $(6c^4 - 20c^3 + 60c^2 + 200c - 576) : (2c^2 - 8c + 36)$

ABCD **2.304** Gegeben ist der Term $(2x + 3y + 4z)^2$

1) Warum kannst du die binomischen Formeln hier ohne zusätzliche Klammern nicht anwenden?

2) Wie sind die Klammern zu setzen?

3) Gib eine Formel für $(a + b + c)^2$ an und berechne den Term.

B **2.305** In früheren Zeiten rechnete man oft mit Stammbrüchen (Zähler 1). Um Zerlegungen wie zum Beispiel $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ zu erleichtern, wurden verschiedene Formeln entwickelt. So findet man bei Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci (ca. 1180 – ca. 1241), in seinem „Liber Abbaci" (lat. „Buch des Rechnens") aus dem Jahre 1202 Zerlegungen, welche auf den unten angegebenen Formeln beruhen.

1) Prüfe die Formel für a = 9 und n = 2 nach.

2) Zeige die Richtigkeit der Formel durch Zusammenfassen der Terme auf der rechten Seite der Formel.

a) $\dfrac{a}{na - 1} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n \cdot (na - 1)}$

b) $\dfrac{2a + 3}{(2n + 1) \cdot (2a + 1) - 1} = \dfrac{1}{2n + 1} + \dfrac{1}{(2n + 1) \cdot a + n} + \dfrac{1}{(2n + 1) \cdot [(2n + 1) \cdot (2a + 1) - 1]}$

c) $\dfrac{a + 1}{na - 1} = \dfrac{1}{na - 1} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n \cdot (na - 1)}$

BD **2.306** Es gilt: $\left(a + \frac{1}{b}\right) \cdot \left(b - \frac{1}{a}\right) = \frac{a^2b^2 - 1}{ab}$

1) Prüfe diese Aussage für a = 4 und b = 5 nach.

2) Beweise diese Aussage durch Termumformung.

B **2.307** Beweise die Richtigkeit der folgenden Aussage durch Einsetzen und Vereinfachen der linken Seite:

Wenn $x = \dfrac{a \cdot (1 + t^2)}{1 - t^2}$ und $y = \dfrac{2bt}{1 - t^2}$ ist, dann gilt $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Wissens-Check

		gelöst
1	Für welchen Wert von z kann der Term $\frac{3x-y}{2z-1}$ nicht berechnet werden?	
2	Ordne die Terme den Bezeichnungen Monom, Binom, Polynom, Bruchterm zu: A) $\frac{3}{x}$, B) xy, C) $2x - 3y$, D) $\frac{3a}{4}$, E) $x^2 + 3y - a$, F) $a - b$, G) $x^3 - x^2 + 1$, H) $\frac{a}{b-c}$	
3	Ich weiß, unter welchen Bedingungen Terme mit Potenzen addiert bzw. subtrahiert werden dürfen.	
4	Auf einer Wiese stehen 24 Bäume. Es sind doppelt so viele Laubbäume L wie Nadelbäume N. Welcher Term beschreibt die Anzahl der Bäume? A) 2L + N, B) L + N, C) L + 2N	
5	Setze die richtigen Rechenzeichen ein: $a \cdot (b - c) = a \dots b \dots a \dots c$, $(a \dots b) \cdot c = a \dots c - b \dots c$	
6	Erkläre, welche Fehler beim Herausheben gemacht wurden. $24x^2y - 36xy^3 = -12x^2y\,(-2 - 3y^2)$	
7	Erkläre den Unterschied zwischen $(-3)^2$ und -3^2 und berechne die Ergebnisse.	
8	Berechne die Ergebnisse: A) $a^{3x-1} \cdot a^{4x+2}$ B) $b^{2x-4} : b^{-x-1}$ C) $(c^{5x-2})^{-3x}$	
9	Vereinfache den Term und stelle das Ergebnis mit positiven Exponenten dar. $\left(\frac{a^3b^{-2}x}{x^{-1}a^2b}\right)^{-3}$	
10	Welche der nachfolgenden Terme sind kein Ergebnis einer binomischen Formel? A) $x^2 + y^2$ B) $9z^2 + 12zy + 4y^2$ C) $25a^2 - 50ab + 4b^2$	
11	Ich kenne die Rechenregeln für Bruchterme und kann sie anwenden. Zum Beispiel Addieren und Subtrahieren ist nur möglich, wenn … .	
12	Welche Werte darf x im Bruchterm $\frac{3x+2}{x-2} + \frac{5x+3}{x+2} - \frac{6}{x^2-4}$ nicht annehmen?	
13	Vereinfache den Doppelbruch: $\frac{x + \frac{1}{x}}{1 - \frac{2}{x}}$	

Lösung:
1) für $z = \frac{1}{2}$ 2) Monom: B, D; Binom: C, F; Polynom: E, G; Bruchterm: A, H 3) siehe Seite 71 4) B
5) $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$, $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$ 6) Vorzeichenregeln, x^2 kann nicht herausgehoben werden
7) bei der ersten Rechnung bezieht sich die Potenz auf alles, bei der 2. Rechnung nur auf 3; +9, −9
8) A) a^{7x+1}, B) b^{3x-3}, C) c^{-15x^2+6x} 9) $\frac{b^9}{a^3x^6}$ 10) A, C 11) siehe Seite 85 12) 2, −2 13) $\frac{x^2+1}{x-2}$

3 Gleichungen und Ungleichungen

Das Lösen von Gleichungen ist ein sehr alter Teilbereich der Mathematik. Nachweislich wurden bereits im 2. Jahrtausend v. Chr. von den Babyloniern Gleichungen verwendet. In der klassischen griechischen Mathematik wurden Gleichungen oft durch geometrische Überlegungen gelöst. Der arabische Mathematiker Al-Chwarizmi (ca. 780 – 850) verfasste in Bagdad das erste zusammenfassende Werk über das Lösen von Gleichungen. Durch dieses Werk kamen die so genannten arabischen Ziffern nach Europa und es diente jahrhundertelang als Grundlage der Gleichungslehre.

Muhammed Al-Chwarizmi

3.1 Gleichungen

3.1.1 Grundbegriffe

Mathematiker verwenden Gleichungen, um die Gleichheit von „Dingen“ zum Ausdruck zu bringen. „Dinge“ können dabei Dinge im materiellen Sinn sein, es kann sich aber auch um Begriffe, Vorgänge oder Terme handeln. Bis zum Mittelalter wurden Gleichungen in Form eines Texts angeschrieben. Erst in der Neuzeit wurde es in der Mathematik selbstverständlich, Gleichungen durch Terme und Gleichheitszeichen anzugeben. Das Gleichheitszeichen wird erst seit dem 16. Jahrhundert in der heute üblichen Art verwendet.

ABD **3.1** Christoph kauft zwei verschieden teure DVDs und bezahlt 29,70 €.

1) Wie kann dieser Satz in die Sprache der Mathematik übersetzt werden?
2) Kann der Preis jeder DVD berechnet werden? Begründe deine Antwort.
3) Christoph weiß, dass eine DVD doppelt so teuer ist wie die andere. Berechne die Preise der DVDs.

Eine **Gleichung** entsteht, wenn man zwei Terme durch ein Gleichheitszeichen verbindet.

Die beiden Terme werden mit **Linksterm** (T_L) und **Rechtsterm** (T_R) oder einfach mit „linke Seite“ (LS) und „rechte Seite“ (RS) der Gleichung bezeichnet. Im Folgenden werden Gleichungen behandelt, bei denen **eine** Variable die **Gleichungsvariable** (Unbekannte) ist.

Die **Grundmenge** G einer Gleichung bilden jene Zahlen, die für die Gleichungsvariable vorgesehen sind.

Bezieht sich eine Gleichung nicht auf eine Anwendung, können wir als Grundmenge die Menge der reellen Zahlen verwenden und schreiben $G = \mathbb{R}$. Steht die Gleichungsvariable zum Beispiel für eine Wegstrecke, für die Kantenlänge eines Körpers oder, wie in Aufgabe 3.1, für einen Preis, so ist es sinnvoll, als Grundmenge nur die positiven reellen Zahlen und Null zu wählen, da die angegebenen Größen keine negativen Werte annehmen können. Wird mit einer Gleichung die Anzahl von Gegenständen oder Personen beschrieben, können wir $G = \mathbb{N}$ setzen.

Wir verwenden im Folgenden für Gleichungen, die nicht anwendungsbezogen sind, wenn nicht anders angegeben, $G = \mathbb{R}$. Bei anwendungsbezogenen Aufgaben ist die Grundmenge geeignet zu wählen.

Nicht immer dürfen für die Gleichungsvariable alle Werte der Grundmenge eingesetzt werden.

3.2 Überlege, bei welcher der angegebenen Gleichungen es Zahlen aus der Grundmenge $G = \mathbb{R}$ gibt, die nicht eingesetzt werden dürfen. Begründe deine Antwort.

D

1) $\frac{1}{x} = 2$ ***2)*** $2x + 1 = 9$ ***3)*** $\frac{5x - 3}{x - 1} = 2$ ***4)*** $5x = 0$ ***5)*** $\frac{x}{4x - 1} = 3$ ***6)*** $\frac{x + 1}{2 \cdot (x + 2)} = 1$

Die **Definitionsmenge** einer Gleichung erhält man, wenn man aus ihrer Grundmenge jene Zahlen ausschließt, die in die Gleichung nicht eingesetzt werden dürfen, da sonst zumindest ein Term der Gleichung nicht definiert wäre. Das sind zum Beispiel Zahlen, die auf eine Division durch null führen würden.

Eine Zahl aus der Definitionsmenge ist dann **Lösung** der Gleichung, wenn sie die Gleichung erfüllt, wenn also Linksterm und Rechtsterm durch Einsetzen dieser Zahl den gleichen Wert annehmen.

Die Lösungen einer Gleichung können ermittelt werden, indem man die Gleichung auf eine andere, einfachere Gleichung umformt, die die gleichen Lösungen wie die ursprüngliche Gleichung hat. Solche Umformungen, die die Lösungsmenge einer Gleichung nicht verändern, heißen **Äquivalenzumformungen**. Der Vorgang wird so lange fortgesetzt, bis die Gleichung so vereinfacht ist, dass die Lösungen abgelesen werden können. Zum Beispiel wird die Gleichung $x + 2 = 5$ auf die Form $x = 3$ umgeformt.

Durch Einsetzen einer Lösung in die Gleichung erhält man eine wahre Aussage.

ZB: $3x + 8 = 5x$

$x = 4$ ist eine Lösung, da: $T_L = 3 \cdot 4 + 8 = 20$, $T_R = 5 \cdot 4 = 20$, $T_L = T_R$ ist eine wahre Aussage.
$x = 7$ ist keine Lösung, da: $T_L = 3 \cdot 7 + 8 = 29$, $T_R = 5 \cdot 7 = 35$, $T_L = T_R$ ist eine falsche Aussage.

Alle Lösungen einer Gleichung bilden die **Lösungsmenge** L der Gleichung. Bei Textgleichungen wird anstelle der Angabe der Lösungsmenge eine **Antwort** formuliert.

Nicht jede Gleichung hat genau eine Lösung.

ZB: $4x - 12 = 4x + 1$ Diese Gleichung hat keine Lösung, da jede für x eingesetzte Zahl auf eine falsche Aussage führt.

ZB: $4x - 7 = 4x - 7$ Diese Gleichung hat unendlich viele Lösungen, da jede für x eingesetzte Zahl auf eine wahre Aussage führt.

Bei den in diesem Band behandelten Gleichungen können im Allgemeinen drei Fälle auftreten:

1. Wenn es **genau eine Zahl** der Definitionsmenge gibt, die die Gleichung erfüllt, so hat die Gleichung **genau eine Lösung**.
2. Wenn es **keine Zahl** der Definitionsmenge gibt, die die Gleichung erfüllt, so ist die **Lösungsmenge die leere Menge**, es gilt dann L = { }.
3. Wenn **jede Zahl** der Definitionsmenge die Gleichung erfüllt, so ist die **Definitionsmenge gleichzeitig die Lösungsmenge**, es gilt dann L = D.

Gleichungen und Ungleichungen

Äquivalenzumformungen

Um die erlaubten Umformungen zu veranschaulichen, kann die Gleichung mit einer Waage mit zwei Waagschalen verglichen werden. Überlege, welche Veränderungen an den Gewichten in den beiden Waagschalen durchgeführt werden können, ohne dass die Waage aus dem Gleichgewicht gerät:

- Auf beiden Seiten kann das gleiche Gewicht dazugegeben oder weggenommen werden.
- Auf beiden Seiten können die Gewichte mit dem gleichen von null verschiedenen Wert vervielfacht oder durch diesen geteilt werden.

B **3.3** Ermittle die Lösungsmenge der Gleichung.

a) $x - 7 = 15$ **b)** $2x = 12$

Lösung:

a) $x - 7 = 15 \quad | + 7$

$x - 7 + 7 = 15 + 7$

$x = 22 \quad L = \{22\}$

- Wir addieren auf beiden Seiten die Zahl 7.
- Als Lösung erhalten wir die Zahl 22 und schreiben die Lösungsmenge an.

b) $2x = 12 \quad | : 2$

$\frac{2x}{2} = \frac{12}{2}$

$x = 6 \quad L = \{6\}$

- Wir dividieren beide Seiten durch 2.

Es gibt auch Umformungen, die die Lösungsmenge einer Gleichung verändern, zum Beispiel wenn man beide Seiten einer Gleichung quadriert:

Die Gleichung $x = -2$ hat die Lösungsmenge $L = \{-2\}$. Quadriert man beide Seiten, so erhält man die Gleichung $x^2 = 4$ mit der Lösungsmenge $L = \{-2; 2\}$.

Da solche Umformungen die Lösungsmenge verändern können, sind sie **keine** Äquivalenzumformungen.

Folgende Umformungen sind **Äquivalenzumformungen**, das heißt, sie verändern die Lösungsmenge einer Gleichung nicht:

1) Auf beiden Seiten der Gleichung den gleichen Term addieren bzw. subtrahieren

2) Beide Seiten der Gleichung mit dem gleichen von null verschiedenen Term multiplizieren bzw. durch diesen dividieren

Beim Umformen von Gleichungen wird meist zuerst die Strichrechnung durchgeführt, dann die Punktrechnung.

BD **3.4** Die Gleichung $2x + 1 = 9$ soll auf zwei Arten gelöst werden. Dabei ist jeweils die erste Äquivalenzumformung angegeben. Führe die Umformung durch und löse anschließend die Gleichung. Welcher der beiden Lösungswege ist deiner Meinung nach einfacher und warum?

1) $2x + 1 = 9 \quad | - 1$ **2)** $2x + 1 = 9 \quad | : 2$

3.5 Ermittle die Lösungsmenge der Gleichung $6x - 5 = 7$.

B

Lösung:

$6x - 5 = 7 \quad | + 5$

$6x = 12 \quad | : 6$

$x = 2 \qquad L = \{2\}$

- Wir **addieren zuerst** auf beiden Seiten 5.
- Wir **dividieren anschließend** beide Seiten durch 6.

Die Richtigkeit des Ergebnisses wird mithilfe der **Probe** überprüft. Die Lösung wird in die linke Seite der Angabe (LS) eingesetzt und der Term so weit wie möglich vereinfacht. Anschließend wird in die rechte Seite der Angabe (RS) eingesetzt und vereinfacht. Die beiden Ergebnisse müssen übereinstimmen. Gibt es mehrere Lösungen, so muss der Vorgang für jede Lösung bzw. stichprobenartig durchgeführt werden.

3.6 Ermittle die Lösungsmenge der Gleichung $1{,}6x + 0{,}7 = -4x - 2{,}1$ für ***1)*** $G = \mathbb{R}$, ***2)*** $G = \mathbb{N}$ und überprüfe das Ergebnis mithilfe der Probe.

BC

Lösung:

$1{,}6x + 0{,}7 = -4x - 2{,}1 \quad | + 4x$

$5{,}6x + 0{,}7 = -2{,}1 \quad | - 0{,}7$

$5{,}6x = -2{,}8 \quad | : 5{,}6$

$x = -0{,}5$

- Forme so um, dass die Variable nur mehr auf einer Seite der Gleichung vorkommt.

1) Probe:

LS: $1{,}6 \cdot (-0{,}5) + 0{,}7 = -0{,}8 + 0{,}7 = -0{,}1$

RS: $-4 \cdot (-0{,}5) - 2{,}1 = 2 - 2{,}1 = -0{,}1$

LS = RS $\Rightarrow$ $L = \{-0{,}5\}$

2) $L = \{ \}$

- Da die linke und die rechte Seite gleich sind, ist $(-0{,}5)$ Lösung der Gleichung für $G = \mathbb{R}$; $(-0{,}5)$ ist aber keine natürliche Zahl.

3.7 Gib jeweils die Lösungsmenge der Gleichung für die gegebenen Grundmengen an. BC

1) $G = \mathbb{N}$ ***2)*** $G = \mathbb{Z}$ ***3)*** $G = \mathbb{Q}$ ***4)*** $G = \mathbb{R}$

a) $2x = 3$ ***b)*** $x + 7 = 5$ ***c)*** $3x + 2 = 8$

3.8 Gegeben ist die Gleichung $2x + 4 = 4x - 7$. BCD

1) Welche Grundmenge muss man wählen, damit die Gleichung eine bzw. keine Lösung hat?

2) Ändere die Koeffizienten oder Zahlen der Gleichung so ab, dass sie keine Lösung bzw. unendlich viele Lösungen hat, wenn $G = \mathbb{R}$ ist. Begründe deine Wahl.

3.9 Begründe, warum die Multiplikation mit Null keine Äquivalenzumformung ist. D

3.10 In einer bekannten Denksportaufgabe wird der „Beweis" geführt, dass 2 = 1 ist. Dieser „Beweis" ist nebenstehend vorgerechnet. Wo ist der Fehler in der Argumentation? D

$2 - 2 = 1 - 1$

$2 \cdot (1 - 1) = 1 \cdot (1 - 1)$

$2 = 1$

Aufgaben 3.11 – 3.14: Ermittle jeweils die Lösungsmenge und führe die Probe durch.

3.11 ***a)*** $x - 2 = 3$ ***b)*** $a + 5 = 17$ ***c)*** $-x - 4 = 7$ ***d)*** $6 - s = -1$ ***e)*** $3 - e = 5$ B

3.12 ***a)*** $0{,}5x = 2$ ***b)*** $-3s = 0{,}6$ ***c)*** $3x = -4$ ***d)*** $-5b = 0$ B

3.13 ***a)*** $\frac{x}{2} = 5$ ***b)*** $\frac{3b}{4} = 6$ ***c)*** $\frac{2x - 3}{3} = 5$ ***d)*** $\frac{4b + 7}{5} = 7$ B

3.14 ***1)*** $4 \cdot (x - 1) = 5x + 2$ ***2)*** $5 \cdot (x - 2) = 5x - 10$ ***3)*** $4x + 8 = 2 \cdot (2x + 1)$ B

3.1.2 Lineare Gleichungen

Bei der rechnerischen Behandlung von Gleichungen wird meist nach deren Form unterschieden.

BD **3.15** Forme die gegebenen Gleichungen so um, dass rechts vom Gleichheitszeichen nur die Zahl null steht. Beschreibe die Bauart der entstehenden Gleichung.
1) $2x - 3 = 0,4$ ***2)*** $16y - 5 = -10y$ ***3)*** $3r - 2 = r + 5$ ***4)*** $-2x + 0,9 = 4x - 0,9$

Hat eine Gleichung die Form $a \cdot x + b = 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$), so heißt sie **lineare Gleichung**.
Dabei ist x die Gleichungsvariable, a und b sind Konstanten.
Ist $a \neq 0$, dann hat die Gleichung immer die Lösung $x = -\frac{b}{a}$, wenn $D = \mathbb{R}$ ist.

Der Fall $a = 0$ wird meist gesondert behandelt, da hier die Variable x nicht vorkommt.
Bei $0 \cdot x + b = 0$ werden zwei Möglichkeiten unterschieden:
$b = 0$: Man erhält die wahre Aussage $0 = 0$, somit ist $L = D$.
$b \neq 0$: Man erhält die falsche Aussage $b = 0$, somit ist $L = \{\,\}$.

Nicht jede lineare Gleichung kann sofort als solche erkannt werden. Häufig ist es notwendig, eine gegebene Gleichung zunächst umzuformen und zu vereinfachen. Erst dann kann über die Art der Gleichung eine Aussage gemacht werden.

BCD **3.16** Führt die gegebene Gleichung auf eine lineare Gleichung? Begründe deine Entscheidung. Ermittle – wenn möglich – die Lösung.
1) $x \cdot (x + 3) - 2 = x + 4$ ***2)*** $7 \cdot (x - 1) - 2 \cdot (x - 3) = 2x$ ***3)*** $2x^2 + 4 = 2x \cdot (x - 2)$

Lösung:

1) $x \cdot (x + 3) - 2 = x + 4$
$x^2 + 3x - 2 = x + 4$
$x^2 + 2x - 6 = 0$

Begründung:
Die Gleichung kann nicht auf die Form $ax + b = 0$ gebracht werden, sie ist daher keine lineare Gleichung.

2) $7 \cdot (x - 1) - 2 \cdot (x - 3) = 2x$
$7x - 7 - 2x + 6 = 2x$
$3x - 1 = 0$
$x = \frac{1}{3}$

Nach Vereinfachen des Links- und des Rechtsterms entsteht eine Gleichung der Form $ax + b = 0$ und somit ist die gegebene Gleichung eine lineare Gleichung.

3) $2x^2 + 4 = 2x \cdot (x - 2)$
$2x^2 + 4 = 2x^2 - 4x$
$4x + 4 = 0$
$x = -1$

Da der quadratische Term auf beiden Seiten vorkommt, fällt er durch Subtraktion weg.
Die Gleichung führt auf eine lineare Gleichung.

BCD **3.17** Führt die gegebene Gleichung auf eine lineare Gleichung? Begründe deine Entscheidung.
1) $5a + a^2 = 3$ ***3)*** $3 \cdot (y + 3) + y \cdot (y - 2) = 4y^2 - 2$
2) $3 \cdot (x + 1) - 2x = 1$ ***4)*** $(x + 2)^2 = x^2 - 5x + 7$

Aufgaben 3.18 – 3.20: Löse die Gleichungen für $G = \mathbb{R}$ und führe die Probe durch.

B **3.18** ***a)*** $2x + 1 = 5$ ***b)*** $-3v + 1 = -2$ ***c)*** $0,4t - 0,4 = 0$ ***d)*** $1,2 - 0,8s = 0,4$

B **3.19** ***a)*** $4x - 2 = 3x$ ***b)*** $14s - 15 = -11s$ ***c)*** $2b - 1 = 2b + 2$ ***d)*** $-3r + 0,5 = 2r - 0,5$

B **3.20** ***a)*** $5x - (2x + 2) = 3$ ***b)*** $4b - (5b - 6) = 7$ ***c)*** $5 - (2r - 6) = 6r - 5$

Aufgaben 3.21 – 3.24: Löse die Gleichungen für $G = \mathbb{R}$ und führe die Probe durch.

3.21 **a)** $\frac{x}{4} = 3$ **b)** $\frac{2a}{3} = 5$ **c)** $\frac{3b}{2} = \frac{2}{7}$ **d)** $\frac{4s}{5} = \frac{3}{4}$ B

3.22 **a)** $8v - (v - 1) = 5v - (2v - 3)$ **b)** $7s - (2s + 3) = 3s - (5s - 4)$ B

3.23 **a)** $3t - [t - (2 - t)] = 4$ **b)** $5b - [(4b + 1) - 2] = 2$ **c)** $9s - [-2s - (3s - 6)] + 2 = -4$ B

3.24 **a)** $2 \cdot (x + 3) = 3x + 4$ **b)** $5 \cdot (x + 4) - 3 = 2x + 5$ **c)** $5x + 2 = 5 \cdot (x + 3) - 13$ B

3.25 Eine Gleichung wurde auf zwei verschiedene Wege gelöst. Gib die jeweiligen Äquivalenzumformungen an. Beschreibe, worauf beim Lösen jeweils geachtet werden muss. CD

Weg 1: $\frac{2x}{5} - 1 = 4$
$\frac{2x}{5} = 5$
$2x = 25$
$x = 12{,}5$

Weg 2: $\frac{2x}{5} - 1 = 4$
$2x - 5 = 20$
$2x = 25$
$x = 12{,}5$

3.26 Arbeite mit deiner Sitznachbarin oder deinem Sitznachbarn. Die Gleichung soll auf zwei verschiedene Arten gelöst werden. Besprecht, wer welchen Weg wählt. Schreibt die jeweiligen Äquivalenzumformungen auf und vergleicht eure Lösungen. ABC

a) $2 \cdot (x - 1) = 5$ **b)** $5 \cdot (2b + 4) = 8$ **c)** $\frac{r}{2} + 3 = 5$ **d)** $\frac{3x}{7} - 4 = \frac{1}{2}$

3.27 Tim hat bei der Hausübung die Gleichungen wie folgt gelöst. Korrigiere seine Fehler. Hätte es einen einfacheren Rechenweg gegeben? Wenn ja, gib diesen an. BCD

1)
$4x - 3 = 8 \quad | : 4$
$x - 3 = 2 \quad | + 3$
$x = 5$

2)
$\frac{x}{5} + 2 = 1 \quad | \cdot 5$
$x + 2 = 5 \quad | - 2$
$x = 3$

3)
$\frac{x}{2} + \frac{1}{3} = 4 \quad | \cdot 6$
$3x + 2 = 4 \quad | - 2$
$3x = 2 \quad | : 3$
$x = \frac{2}{3}$

Aufgaben 3.28 – 3.35: Löse die Gleichungen für $G = \mathbb{R}$.

3.28 **a)** $6c - ((6 - 8c) - (12c - 8)) = 2c - (5 - 4c)$ B
b) $2b - ((2b + 2) + 3b) = b - (3b + 6) - (2b - 10)$

3.29 **a)** $4x - [10x + 5 - (5x - 12)] = 3x - 4 - (2x + 6) - \{4x - 3 + [6x + 5 - (3x + 5)]\}$ B
b) $6x - [7x + 3 - (6x + 1)] - 4 = -x + 3 - \{6x + 7 - [3x - (3x + 4) + 1 - (5x + 3)]\}$

3.30 **a)** $7 \cdot (4x - 2) = 5 \cdot (2x + 1)$ **b)** $3 \cdot (4s - 5) - 6s = 6 \cdot (2s - 2) + 4s$ B

3.31 **a)** $7 \cdot (8a + 1) - 3 \cdot (2a + 3) = 5 \cdot (a + 1) + 3 \cdot (2a + 2)$ B
b) $12 \cdot (4x - 7) - 11 \cdot (3x + 5) = 9 \cdot (5x - 6) - 10 \cdot (x + 4)$

3.32 **a)** $(x + 1) \cdot (x - 2) = (x + 3) \cdot (x - 1)$ **b)** $(2c + 2) \cdot (2c - 5) = (c + 1) \cdot (4c - 3)$ B

3.33 **a)** $(2x + 4) \cdot (x + 2) = (3x + 2) \cdot (2x - 3) - (2x - 4) \cdot (2x - 2)$ B
b) $(2b - 4) \cdot (2b + 3) + (2b + 6) \cdot (b - 5) = (3b + 3) \cdot (2b + 6)$

3.34 **a)** $(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = 2$ **b)** $(2a + 1)^2 - (a + 3)^2 = 3a^2$ **c)** $(3y + 3)^2 = 5y^2 + (2y - 3)^2$ B

3.35 **a)** $3 \cdot (2x - 1)^2 - 4 \cdot (x + 2)^2 = 8 \cdot (x + 1)^2 - 5 \cdot (4x - 3)$ B
b) $2 \cdot (5x + 1) \cdot (2x - 2) - 3 \cdot (2x - 1)^2 = (4x - 1)^2 - 2 \cdot (2x - 2)^2$

3.36 Dein Mathematiklehrer hat bei der Angabe der Gleichung einen Fehler gemacht, dadurch ist die Gleichung für dich noch nicht lösbar. Welche(n) Koeffizienten müsste er wie ändern, damit eine lineare Gleichung entsteht? Löse die Gleichung anschließend. BC
a) $(4x + 1)^2 = 3x \cdot (4x + 5) + 13$ **b)** $(2x + 3) \cdot (x - 1) = 4x^2 - (x + 2)^2$

Gleichungen und Ungleichungen

Aufgaben 3.37 – 3.43: Löse die Gleichungen für G = ℝ.

B **3.37** $\frac{a+1}{4} = \frac{2a}{3} - 1$

Lösung:

$$\frac{a+1}{4} = \frac{2a}{3} - 1 \quad | \cdot 12$$
$$3 \cdot (a+1) = 4 \cdot 2a - 12$$
$$3a + 3 = 8a - 12 \quad | -3a + 12$$
$$5a = 15 \quad | :5$$
$$a = 3$$

- Erweitern auf den Hauptnenner 12 ergibt: $\frac{3 \cdot (a+1)}{12} = \frac{4 \cdot 2a}{12} - \frac{12}{12}$
- Beim Multiplizieren mit dem Hauptnenner müssen die Zähler jeweils mit dem richtigen Faktor erweitert werden.

B **3.38** **a)** $\frac{4z}{5} + 3 = \frac{2z}{3}$ **b)** $\frac{x}{3} + \frac{x}{6} - \frac{x}{2} = 3$ **c)** $\frac{5y}{2} + 3 = \frac{3y}{5} - 1$ **d)** $\frac{b}{18} + \frac{4b}{9} - \frac{b}{3} = 4$

B **3.39** **a)** $\frac{x+2}{3} = \frac{x-5}{4}$ **b)** $\frac{4y-1}{5} = \frac{3y+2}{3}$ **c)** $\frac{z-3}{5} + 2 = \frac{z+2}{3} - 1$ **d)** $\frac{2t-1}{4} + 1 = \frac{3t-3}{2} - t$

B **3.40** **a)** $\frac{s+2}{3} + \frac{s+5}{2} - \frac{s-3}{4} = 1$ **b)** $\frac{2b+1}{2} + \frac{3b-4}{5} - \frac{b+6}{6} = 3$ **c)** $\frac{3x-2}{7} - \frac{5x+2}{3} - \frac{2x-6}{14} = 5$

B **3.41** **a)** $\frac{x-1}{5} + \frac{x+2}{3} = \frac{x-2}{2} - \frac{x+4}{10}$ **b)** $\frac{z-2}{4} - \frac{4z+1}{2} = \frac{3z+4}{6} - \frac{2z-3}{3}$ **c)** $\frac{4r+10}{8} + \frac{3r-8}{6} = \frac{2r+3}{10} - \frac{8r-13}{12}$

B **3.42** **a)** $\frac{3c-8}{5} - \left(\frac{2c-6}{8} - \frac{c}{6}\right) = \frac{3c+4}{15} + \frac{c-3}{4}$ **b)** $\frac{2b+3}{12} - \left(\frac{2b-9}{21} - \frac{b+6}{4}\right) = \frac{b+4}{7} - \frac{2b-3}{14}$

B **3.43** **a)** $\frac{3x}{5} - \left(\frac{2x-1}{6} + \frac{2x-3}{4}\right) = \frac{x-2}{4} - \left(\frac{2x-3}{2} + \frac{4x+1}{3}\right)$ **b)** $\frac{3s-1}{7} + \frac{s-7}{15} = \frac{2s+1}{7} - \left(\frac{s+3}{5} - \frac{s-2}{3} - \frac{2s+2}{9}\right)$

Weitere Aufgaben im Zusatzheft

TE **Technologieeinsatz: Gleichungen**

GeoGebra: www.verlaghpt.at

ZB: Die Gleichung $\frac{x}{3} - 4 = x$ wird schrittweise am TI-Nspire gelöst.

TI_Gleichungen	
$\left(\frac{x}{3}-4=x\right)\cdot 3$	$x-12=3\cdot x$
$(x-12=3\cdot x)-x$	$-12=2\cdot x$
$\frac{-12=2\cdot x}{2}$	$-6=x$

Mithilfe eines Taschenrechners oder Computerprogramms mit CAS (Computer Algebra System) können die Äquivalenzumformungen Schritt für Schritt nachvollzogen werden. Dazu wird die Gleichung in Klammern gesetzt und die Rechenoperation so auf die gesamte Gleichung angewendet.

Auch die Probe kann einfach durchgeführt werden. ZB: $\frac{2a+1}{4} = \frac{a}{3} - 1$, $a = -\frac{15}{2}$

*Nicht gespeicherte	
$\frac{2\cdot a+1}{4}=\frac{a}{3}-1 \mid a=\frac{-15}{2}$	true

Mithilfe der „vertikalen Linie" (with-Operator) ctrl = wird für die Variable ein Wert eingesetzt. Durch Einsetzen der Lösung in die Gleichung erhält man eine wahre Aussage (true).

B **3.44** Löse die Gleichung mit einem CAS Schritt für Schritt und führe die Probe durch.
TE **a)** $2a + 3 = 3a + 7$ **b)** $\frac{x}{9} + 2 = \frac{2}{5}$ **c)** $\frac{s+1}{9} = \frac{2s-1}{5} - 2$

BD **3.45** Carina verwendete bei der Hausübung (unerlaubterweise) einen Taschenrechner. Dieser gab für die Multiplikation mit 6 nebenstehendes Ergebnis aus. Daraufhin wurde Carina von ihrer Lehrerin aufgefordert, dieses Ergebnis zu erklären. Kannst du Carina helfen?
TE

*Nicht gespeicherte	
$\left(\frac{x-1}{3}+2=\frac{3\cdot x-2}{2}+1\right)\cdot 6$	$2\cdot(x+5)=9\cdot x$

3.1.3 Textgleichungen

Viele als Text formulierte Probleme lassen sich mathematisch durch eine Gleichung beschreiben. Dabei wird für eine unbekannte Größe eine Variable gewählt. Gibt es weitere Unbekannte, werden diese ebenfalls mithilfe der gewählten Variablen ausgedrückt.

Grund- und Definitionsmenge ergeben sich bei Textgleichungen aus dem Zusammenhang. Überlege aber immer, ob die ermittelte Lösung der Gleichung auch eine sinnvolle Lösung des Problems darstellt. Die Probe muss immer anhand des Angabetexts gemacht werden. Das Ergebnis wird im Allgemeinen in Form einer Antwort und nicht als Lösungsmenge angegeben.

3.46 Übersetze den gegebenen Text in eine Gleichung. A

a) Die doppelte Geschwindigkeit beträgt $5\,\frac{m}{s}$.
b) Ein Rohr und ein doppelt so langes Rohr sind zusammen 6 m lang.
c) Multipliziert man ein Drittel einer Zahl mit einem Viertel der Zahl, so erhält man 12.
d) Wird die Höhe des Hügels um ein Zehntel vermindert, so ergeben sich 220 m.
e) Verlängert man eine Strecke um das Dreifache, so erhält man 40 km.

3.47 Ordne dem gegebenen Text eine passende Gleichung zu. Auch Mehrfachnennungen sind möglich. Gib an, welche der Größen der Gleichungsvariablen x entspricht. A

1) In einer Klasse mit 24 Schülerinnen und Schülern ist die Anzahl der Schüler dreimal so groß wie die Anzahl der Schülerinnen.
2) Verdoppelt man die Masse von Zement, so erhält man um 10 kg mehr als das 1,5-Fache der ursprünglichen Masse.
3) Für eine kleine und zwei große Pizzas werden 24,00 € bezahlt. Die große Pizza kostet 1,5-mal so viel wie die kleine.
4) Verdoppelt man eine Zahl und addiert das 1,5-Fache der ursprünglichen Zahl, so erhält man 10.

A) $24 - x = 3x$ ***C)*** $2x = 1{,}5x + 10$ ***E)*** $x + 3x = 24$
B) $2x + 1{,}5x = 10$ ***D)*** $2x = 10 - 1{,}5x$ ***F)*** $x + 1{,}5x = 24$

3.48 „Verlängert man die Seitenlängen eines Quadrats um 2 cm, so erhält man ein um 24 cm^2 größeres Quadrat. Gib die Seitenlänge des ursprünglichen Quadrats an." ACD
Ein Schüler stellt zum gegebenen Text folgende Gleichung auf: $(a + 2)^2 + 24 = a^2$
Welchen Fehler hat er gemacht? Stelle die Gleichung richtig.

3.49 „Ein 3 m langes Seil soll so in zwei Teile geteilt werden, dass der zweite Teil um 80 cm kürzer ist als der erste. Wie lang ist der erste Teil?" Mona erhält für den ersten Teil als Lösung 70 cm, Andreas erhält 320 cm. Warum können beide Lösungen nicht stimmen? AD

3.50 „Das Doppelte einer Zahl vermindert um 3 ergibt 5." AC
Diese Formulierung kann auf zwei Arten interpretiert werden. Formuliere den Text für beide Möglichkeiten so, dass die Angabe eindeutig wird.

3.51 Gegeben ist die Gleichung $(x + 30) + \frac{x}{3} + x = 100$. ABC

1) Schreibe einen passenden Text, wobei x das Taschengeld pro Monat ist.
2) Löse die Gleichung.
3) Erkläre, wie sich die Summe ändert, wenn das Taschengeld x um 10,00 € erhöht wird.

Gleichungen und Ungleichungen

Aufgaben mit Zahlen

Aufgaben 3.52 – 3.57: Berechne jeweils die gesuchte Zahl.

AB **3.52** Addiert man zum Fünffachen einer Zahl 7, so erhält man 42.

AB **3.53** Das Produkt einer Zahl und der um drei vergrößerten Zahl ist die Summe aus dem Quadrat der Zahl und zwölf.

AB **3.54** Welche Zahl bleibt gleich, wenn man sie mit zwei Fünftel multipliziert und neun addiert?

AB **3.55** Subtrahiert man von einer Zahl zehn und multipliziert anschließend die Differenz mit drei, so erhält man die Hälfte der Zahl.

AB **3.56** Addiert man zum Vierfachen einer Zahl 13 und dividiert die Summe durch sieben, so erhält man das 1,5-fache der Zahl.

AB **3.57** Dividiert man das Dreifache einer Zahl durch fünf, so ist das Ergebnis um vier kleiner als die Zahl selbst.

Aufgaben aus Wirtschaft und Technik

ABC **3.58** Ein 2 m langer Stahlträger soll in drei Teile geteilt werden. Der zweite Teil soll um 25 cm länger sein als der erste, der dritte um 45 cm länger als der zweite. Berechne die Längen der einzelnen Teile. Wie lautet die Lösung, wenn der Träger nur 80 cm lang ist? Dokumentiere deine einzelnen Gedanken- und Rechenschritte.

Lösung:
Länge des ersten Teils: x
Länge des zweiten Teils: $x + 25$ cm
Länge des dritten Teils: Länge zweiter Teil + 45 cm = $x + 25$ cm + 45 cm = $x + 70$ cm

Definitionsmenge: $x > 0$ cm — Die Länge ist eine positive Größe.

$$\begin{aligned} x + (x + 25\text{ cm}) + (x + 70\text{ cm}) &= 200\text{ cm} \\ x + x + 25\text{ cm} + x + 70\text{ cm} &= 200\text{ cm} \\ 3x + 95\text{ cm} &= 200\text{ cm} \\ 3x &= 105\text{ cm} \\ x &= 35\text{ cm} \end{aligned}$$

Alle drei Längen addiert ergeben 2 m = 200 cm.

Länge des ersten Teils: 35 cm
Länge des zweiten Teils: 35 cm + 25 cm = 60 cm
Länge des dritten Teils: 60 cm + 45 cm = 105 cm

Probe: Summe: 35 cm + 60 cm + 105 cm = 200 cm
Gesamtlänge: 2 m = 200 cm

Die Länge des ersten Teils beträgt 35 cm, die Länge des zweiten 60 cm und die Länge des dritten 105 cm.

Ist der Träger nur 80 cm lang, so erhält man die Gleichung:

$$\begin{aligned} 3x + 95\text{ cm} &= 80\text{ cm} \\ 3x &= -15\text{ cm} \\ x &= -5\text{ cm} \end{aligned}$$

Die Lösung $x = -5$ cm liegt nicht in der Definitionsmenge, sie ist nicht sinnvoll. Die Aufgabe hat in diesem Fall keine Lösung.

3.59 Ein Stahlrohr soll so in drei Teile geteilt werden, dass der zweite Teil um 72 cm kürzer ist als die Hälfte des ersten Teils. Der dritte Teil soll um 60 cm länger sein als der erste und der zweite zusammen. Ebenso soll der dritte Teil um 70 cm länger sein als der erste Teil. ABC

1) Gib eine Mindestlänge für den ersten Teil an.
2) Berechne die Längen der einzelnen Teile.
3) Wie lautet die Lösung, wenn der dritte Teil 40 cm länger ist als der erste Teil?

3.60 Drei Kräfte wirken in dieselbe Richtung. Die erste Kraft ist doppelt so groß wie die zweite und die dritte beträgt 70 % der ersten Kraft. Die resultierende Kraft beträgt 3,52 kN. Berechne die einzelnen Kräfte. AB

3.61 Der Gewinn einer Gesellschaft beträgt 560 000,00 € und soll auf die drei Gesellschafter so aufgeteilt werden, dass der zweite $\frac{4}{5}$ des Gewinnanteils des ersten und der dritte $\frac{2}{3}$ des Gewinnanteils des zweiten Gesellschafters erhält. ABCD

1) Zwei Sitznachbarn haben unterschiedliche Ansätze für die Gleichung aufgeschrieben:
A) $x + \frac{4}{5}x + \frac{8}{15}x = 560\,000{,}00$ € ***B)*** $\frac{5}{4}x + x + \frac{2}{3}x = 560\,000{,}00$ €
Erkläre, wie die beiden Ansätze zustande kommen, und berechne die einzelnen Anteile.
2) Der Gewinn verdoppelt sich im nächsten Jahr. Verdoppeln sich auch die Gewinnanteile der Gesellschafter? Formuliere deine Überlegungen.

3.62 Ein Industriebetrieb kauft von einer Zulieferfirma drei verschiedene elektronische Bauteile und bezahlt 11 594,00 €. Berechne die Kosten für die einzelnen Bauteile, wenn die Kosten für Bauteil B 87 % der Kosten von Bauteil A und die Kosten von Bauteil C 24 % der Kosten von Bauteil A und Bauteil B zusammen betragen. AB

3.63 Die 822 500,00 € Baukosten einer Produktionshalle werden unter den vier Betreibern folgendermaßen aufgeteilt: Der zweite bezahlt um 350 000,00 € mehr als der erste, der dritte die Hälfte des Anteils des zweiten und der vierte $\frac{1}{3}$ des Anteils des ersten Betreibers. ABCD

1) Welcher Betreiber bezahlt am meisten? Begründe zuerst und rechne dann nach.
2) Aufgrund unerwarteter Umstände erhöhen sich die Baukosten um 10 %. Ist es gerecht, wenn die Aufteilung wieder wie angegeben erfolgt?

3.64 In zwei Rohstoffsilos befinden sich insgesamt 5,7 t eines Rohstoffs. Wenn aus dem ersten Silo $\frac{1}{3}$ des Inhalts und aus dem zweiten Silo $\frac{2}{5}$ entnommen werden, befindet sich in beiden Silos die gleiche Menge. Berechne die ursprünglich in den Silos enthaltenen Mengen. AB

3.65 Phillip möchte sich ein gebrauchtes Kleinmotorrad kaufen, das um 20 % billiger als der Neupreis angeboten wird. Für sein altes Moped würde er 15 % des Neupreises des Kleinmotorrads erhalten. Er könnte das Kleinmotorrad dann um 975,00 € Aufzahlung kaufen. Phillip hat nur 800,00 € gespart. Wie viel müsste er für sein altes Moped bekommen, damit er sich das Kleinmotorrad kaufen kann? Beschreibe deine Überlegungen. ABC

3.66 Ein 40 cm breiter Weg soll mit Steinplatten gepflastert werden. Zur Auswahl stehen Steinplatten mit einer Größe von 40 cm x 40 cm und von 40 cm x 15 cm. Verlegt man die größeren Platten, so würde man um 25 Platten weniger benötigen als beim Verlegen der kleinen Platten. Bei beiden Typen entsteht kein Verschnitt und sie werden ohne Fuge verlegt. Die großen Steinplatten kosten 20,50 € pro Stück und die kleinen 7,60 €. ABD

1) Für welche Plattengröße sollte man sich entscheiden? Vergleiche die Gesamtpreise und überlege, welche Vor- und Nachteile größere oder kleinere Platten haben.
2) Wie lang ist der Weg?

Bewegungsaufgaben

ABC **3.67** Eine Schülerin fährt um 7:00 Uhr von zuhause mit ihrem Moped in die Schule. Ihr Vater findet ihren Taschenrechner und fährt ihr eine Viertelstunde später mit dem PKW nach, um ihr den Taschenrechner zu bringen. Die mittlere Geschwindigkeit des Mopeds beträgt $30\,\frac{km}{h}$, die des PKWs $60\,\frac{km}{h}$. Kann der Vater die Tochter erreichen, bevor sie bei der 15 km entfernt liegenden Schule ankommt?

Lösung:

Skizze:

Schule

7:00 Uhr, $30\,\frac{km}{h}$ — s_1

7:15 Uhr, $60\,\frac{km}{h}$ — s_2

	Geschwindigkeit	Zeit	Weg
Tochter	$30\,\frac{km}{h}$	t	$30\,\frac{km}{h}\cdot t$
Vater	$60\,\frac{km}{h}$	t – 0,25 h	$60\,\frac{km}{h}\cdot(t-0{,}25\,h)$

- Wir verwenden den Zusammenhang $s = v \cdot t$.

$$s_1 = s_2$$
$$30\,\frac{km}{h}\cdot t = 60\,\frac{km}{h}\cdot(t-0{,}25\,h)$$
$$30\,\frac{km}{h}\cdot t = 60\,\frac{km}{h}\cdot t - 15\,km$$
$$30\,\frac{km}{h}\cdot t = 15\,km$$
$$t = 0{,}5\,h$$
$$s = 30\,\frac{km}{h}\cdot 0{,}5\,h = 15\,km$$

- Beim Überholvorgang müssen die beiden Wegstrecken gleich sein.

Der Vater erreicht die Tochter genau vor der Schule.

Probe:
- Wir berechnen die zurückgelegten Wege, diese müssen gleich sein.

$s_1 = 15\,km$

$s_2 = 60\,\frac{km}{h}\cdot(0{,}5\,h - 0{,}25\,h) = 15\,km$

$s_1 = s_2$

ABC **3.68** Boris und Alexander wohnen 210 km voneinander entfernt. Für ein Treffen beschließen sie, um 18:00 Uhr aufzubrechen und einander entgegenzufahren. Boris erreicht eine mittlere Geschwindigkeit von $80\,\frac{km}{h}$, Alexander von $60\,\frac{km}{h}$.

1) Wie weit von Boris entfernt treffen die beiden einander?

2) Für ein weiteres Treffen wählen sie denselben Ort. Diesmal kann auch Alexander mit einer mittleren Geschwindigkeit von $80\,\frac{km}{h}$ fahren. Wie lang muss er auf Boris warten?

AB **3.69** Jemand fährt 1,5 Stunden lang mit einer konstanten Geschwindigkeit und kann so eine bestimmte Strecke zurücklegen. Wird die Geschwindigkeit um 20 % reduziert, so ist die in derselben Zeit gefahrene Strecke um 15 km kürzer. Berechne die ursprüngliche Geschwindigkeit.

ABCD **3.70** Für die Fahrt von Wien nach Linz benötigt eine Autofahrerin zwei Stunden. Bei der Rückfahrt kann sie die mittlere Geschwindigkeit um $10\,\frac{km}{h}$ erhöhen und benötigt zwölf Minuten weniger Fahrzeit.

1) Berechne die mittleren Geschwindigkeiten bei der Hin- und Rückfahrt. Sind diese Geschwindigkeiten realistisch?

2) Stimmt die Aussage: „Wenn die mittlere Geschwindigkeit um $20\,\frac{km}{h}$ erhöht wird, dann ist die Fahrzeit um 24 Minuten kürzer."? Begründe deine Antwort.

Leistungsaufgaben

3.71 Das Wasserbecken eines Industriebetriebs hat zwei Zuflüsse und einen Abfluss. Das Befüllen des Beckens dauert durch den ersten Zufluss Z_1 allein 2 Stunden und durch den zweiten Zufluss Z_2 allein 6 Stunden, wenn kein Wasser abfließt. Das Entleeren des vollen Beckens dauert 9 Stunden, wenn kein Wasser zufließt. Wie lang dauert das Füllen des leeren Beckens mit beiden Zuflüssen, wenn gleichzeitig ständig Wasser abfließt?

AB

Lösung:

	$\frac{\text{Volumen}}{\text{h}}$	**Volumen insgesamt**
Z_1	$\frac{V}{2\,h}$	$\frac{V}{2\,h} \cdot t$
Z_2	$\frac{V}{6\,h}$	$\frac{V}{6\,h} \cdot t$
Abfluss	$\frac{V}{9\,h}$	$\frac{V}{9\,h} \cdot t$

- Das Befüllen dauert durch den ersten Zufluss 2 h, also beträgt das Zuflussvolumen pro Stunde $\frac{V}{2\,h}$. Die gesuchte Befülldauer ist t, also beträgt das Zuflussvolumen durch den ersten Zufluss insgesamt $\frac{V}{2\,h} \cdot t$. Analog für den zweiten Zufluss und den Abfluss.

$$\frac{V}{2\,h} \cdot t + \frac{V}{6\,h} \cdot t - \frac{V}{9\,h} \cdot t = V \quad | : V$$
$$\frac{1}{2\,h} \cdot t + \frac{1}{6\,h} \cdot t - \frac{1}{9\,h} \cdot t = 1 \quad | \cdot 18\,h$$
$$9t + 3t - 2t = 18\,h$$
$$10t = 18\,h$$
$$t = 1{,}8\,h$$

- Das Gesamtvolumen ist das zufließende Volumen vermindert um das abfließende Volumen. Da wir durch V dividieren ($V \neq 0$), ist die Angabe vom Volumen unabhängig.

Das Füllen des Beckens dauert 1 Stunde und 48 Minuten.

Probe:

- Wir berechnen die einzelnen Volumenanteile und kontrollieren die Summe.

Z_1: $\frac{V}{2\,h} \cdot 1{,}8\,h = 0{,}9 \cdot V$ $\quad Z_2$: $\frac{V}{6\,h} \cdot 1{,}8\,h = 0{,}3 \cdot V$

Abfluss: $\frac{V}{9\,h} \cdot 1{,}8\,h = 0{,}2 \cdot V$

$0{,}9 \cdot V + 0{,}3 \cdot V - 0{,}2 \cdot V = 1 \cdot V$

3.72 Ein Klärbecken hat drei Zuflüsse. Fließt nur durch den ersten Wasser zu, ist das Becken in 3,5 Tagen gefüllt. Durch den zweiten Zufluss allein ist es in 5 Tagen und durch den dritten in 2,4 Tagen gefüllt. Nach wie vielen Tagen ist es gefüllt, wenn alle drei Zuflüsse gleichzeitig geöffnet sind? Dokumentiere deinen Rechenweg.

ABC

3.73 Bei starkem Regen wird das Wasser zum Beispiel aus Kanälen in Hochwasserauffang-becken gesammelt. Ein solches Becken füllt sich bei Starkregen in 4 Stunden, wenn in dieser Zeit kein Wasser abfließt. Das Entleeren dauert 11 Stunden, wenn kein Wasser zufließt. An einem Tag regnet es sieben Stunden lang stark. Kann das anfangs leere Becken das Wasser auffangen, wenn gleichzeitig ständig Wasser abfließt?

ABC

3.74 Zum Aufschütten eines Damms werden drei verschieden große LKW eingesetzt. Wird nur der erste LKW eingesetzt, dauert das Aufschütten 23 Tage. Der zweite LKW benötigt allein 40 Tage, der dritte 27 Tage.

ABD

1) Wie lang dauert das Aufschütten, wenn alle drei LKW gleichzeitig eingesetzt werden?
2) Überlege, ob der Einsatz der drei LKW auch kostengünstiger ist als der Einsatz des ersten LKWs allein. Welche Faktoren könnten dabei von Bedeutung sein?

AB **3.75** Eine Betonmischanlage produziert in 12 Stunden 540 m^3 Beton. Eine zweite benötigt 20 Stunden und eine dritte 60 Stunden für die gleiche Menge. Wie lang müssen die drei Anlagen gemeinsam in Betrieb sein, um 540 m^3 Beton herzustellen?

ABD **3.76** Nach einem Hochwasser müssen aus dem Keller eines Einfamilienhauses 85 m^3 Wasser abgepumpt werden. Um 7:00 Uhr wird zunächst eine Pumpe mit einer Pumpleistung von 80 $\frac{\ell}{min}$ eingesetzt. Nach zweieinhalb Stunden kann zusätzlich eine Pumpe mit einer Leistung von 60 $\frac{\ell}{min}$ eingesetzt werden.
1) Kann das Wasser bis 18:00 Uhr aus dem Keller abgepumpt werden? Begründe.
2) Wie lang hätte es gedauert, wenn nur die erste Pumpe eingesetzt worden wäre?

AB **3.77** Drei Pumpen einer Kläranlage sollen 210 m^3 Klärschlamm abpumpen. Die erste Pumpe fördert 110 $\frac{\ell}{min}$. Die zweite Pumpe fördert 160 $\frac{\ell}{min}$ und wird 2 Stunden später als die erste in Betrieb genommen. Die dritte Pumpe fördert 210 $\frac{\ell}{min}$ und wird 6 Stunden später als die erste in Betrieb genommen. Wie lang dauert das Abpumpen insgesamt?

Mischungsaufgaben

AB **3.78** Walzbronzen sind Legierungen aus Kupfer und Zinn. Zur Herstellung von Bronzeteilen werden 87 kg Walzbronze CuSn6 (94 % Kupfer und 6 % Zinn) benötigt. Berechne, wie viel Kilogramm CuSn4 (96 % Kupfer und 4 % Zinn) und wie viel Kilogramm CuSn10 (90 % Kupfer und 10 % Zinn) dafür geschmolzen werden müssen.

Lösung:
Die Prozentangaben beschreiben hier Massenanteile (1 kg CuSn6 besteht aus 0,94 kg Kupfer und 0,06 kg Zinn).

Material	Masse	Zinnanteil	Zinnmasse
CuSn4	m_1	4 %	$0{,}04 \cdot m_1$
CuSn10	$87\text{ kg} - m_1$	10 %	$0{,}10 \cdot (87\text{ kg} - m_1)$
CuSn6	87 kg	6 %	$0{,}06 \cdot 87\text{ kg}$

- Die Summe der Zinnmassen der zur Herstellung verwendeten Bronzen muss die Zinnmasse in 87 kg CuSn6 ergeben. Wir erhalten daher die untenstehende Gleichung.

$$0{,}04 \cdot m_1 + 0{,}1 \cdot (87\text{ kg} - m_1) = 0{,}06 \cdot 87\text{ kg}$$
$$0{,}04 \cdot m_1 + 8{,}7\text{ kg} - 0{,}1 \cdot m_1 = 5{,}22\text{ kg}$$
$$8{,}7\text{ kg} - 0{,}06 \cdot m_1 = 5{,}22\text{ kg}$$
$$3{,}48\text{ kg} = 0{,}06 \cdot m_1$$
$$m_1 = 58\text{ kg}$$

- Lösen der Gleichung

$$m_2 = 87\text{ kg} - m_1 = 87\text{ kg} - 58\text{ kg} = 29\text{ kg}$$

- Berechnen der zweiten Masse

Probe:
58 kg CuSn4 $\Rightarrow$ $0{,}04 \cdot 58\text{ kg} = 2{,}32\text{ kg}$
29 kg CuSn10 $\Rightarrow$ $0{,}1 \cdot 29\text{ kg} = 2{,}9\text{ kg}$
$2{,}32\text{ kg} + 2{,}9\text{ kg} = 5{,}22\text{ kg}$
87 kg CuSn6 $\Rightarrow$ $0{,}06 \cdot 87\text{ kg} = 5{,}22\text{ kg}$

- Wir berechnen die einzelnen Zinnmassen und kontrollieren die Summe.

Es müssen 58 kg CuSn4 und 29 kg CuSn10 eingeschmolzen werden, um 87 kg Walzbronze CuSn6 zu erhalten.

Bemerkung: Die Berechnung kann auch mithilfe der Kupfermassen durchgeführt werden.

3.79 Sind folgende Aussagen richtig oder falsch? Begründe deine Antwort. D

1) Mischt man die gleichen Mengen 50 %iger Salzlösung und 40 %iger Salzlösung, so erhält man eine 90 %ige Salzlösung.

2) Werden 10 Liter einer 10 %igen Zuckerlösung mit 10 Liter Wasser gemischt, so erhält man eine 5 %ige Zuckerlösung.

3) Beim Mischen einer 20 %igen Salzlösung mit einer 40 %igen Salzlösung liegt der Salzgehalt der Mischung unter 20 %.

4) 5 kg Bronze enthalten 1 kg Zinn. Diese wird mit 7 kg Bronze mit einem Zinnanteil von 2 kg gemischt. Die Mischung enthält nun 3 kg Zinn.

3.80 250 kg einer Legierung mit 60 % Kupfer und 40 % Zinn sollen durch Zusatz von reinem Kupfer zu Bronze CuSn12 (88 % Kupfer, 12 % Zinn) verarbeitet werden. Welche Menge an Kupfer muss zugefügt werden? Welche Menge CuSn12 erhält man nach der Verarbeitung? AB

GOLD SILVER BRONZE

3.81 Messing ist eine Kupfer-Zink-Legierung. Aus 420 kg einer Messingsorte mit 50 % Zinkanteil sollen durch Beifügen einer anderen Messingsorte 960 kg Messing mit 60 % Zinkanteil hergestellt werden. Berechne den Zinkanteil des beizufügenden Messings. AB

3.82 Wie hoch ist der Kohlenstoffgehalt der Mischung, die durch Einschmelzen von 32 t Gusseisen und 18 t Stahl entsteht, wenn dieses Gusseisen einen Kohlenstoffgehalt von 3,2 % und dieser Stahl einen Kohlenstoffgehalt von 0,5 % hat? AB

3.83 Wie viel Kilogramm einer 30 %igen Salzlösung und wie viel Kilogramm einer 15 %igen Salzlösung müssen gemischt werden, um 14 kg einer 21 %igen Salzlösung zu erhalten? AB

3.84 Für einen Versuch soll aus 300 mℓ einer 35 %igen Kochsalzlösung eine Kochsalzlösung mit dem Salzgehalt des Toten Meers hergestellt werden. Wie viel Milliliter Wasser sind dafür notwendig? Recherchiere dazu die Salzkonzentration des Toten Meers. ABC

3.85 Wie viel Gramm Wasser müssen verdampft werden, um aus 200 g einer 40 %igen Schwefelsäure 98 %ige Schwefelsäure zu erhalten? AB

3.86 Zur Herstellung von 360 kg Messing mit 65 % Zinkanteil sollen 90 kg Messing mit 50 % Zinkanteil verarbeitet werden. Berechne, wie viel Messing mit 80 % Zinkanteil und wie viel Messing mit 30 % Zinkanteil zusätzlich benötigt werden. AB

Technologieeinsatz: Lösen von Gleichungen

TE

Gleichungen können mithilfe eines Taschenrechners oder Computerprogramms mit CAS gelöst werden. Die Aufgaben sollten aber trotzdem „händisch" bearbeitet werden, der Technologieeinsatz kann als Kontrolle verwendet werden.

GeoGebra, Excel: www.verlaghpt.at

TI-Nspire

1: Aktionen
2: Zahl
3: Algebra — 1: Löse
4: Analysis — 2: Faktorisiere

1.1 *Nicht gespeicherte

$\text{solve}\left(\frac{b+2}{3}+1=\frac{b}{2},b\right)$ $b=10$

solve(Gleichung,Variable)

Der Befehl kann direkt eingetippt oder über das Menü **3: Algebra**, **1: Löse** ausgewählt werden. Danach werden die Gleichung und – durch einen Beistrich getrennt – die Variable eingegeben.

3.1.4 Bruchgleichungen

AD **3.87** Das Fünffache einer Zahl gebrochen durch die um 2 vermehrte Zahl ergibt 3. Wie kann die Aufgabe als Gleichung aufgeschrieben werden? Worauf muss beim Lösen geachtet werden?

Eine Gleichung, bei der die Variable mindestens einmal im Nenner vorkommt, heißt **Bruchgleichung**.

Wie bei den Bruchtermen darf kein Nenner eines Terms der Bruchgleichung null werden. Wir erhalten daher die Definitionsmenge einer Bruchgleichung, indem wir aus der Grundmenge genau jene Werte ausschließen, für die einer der Nenner den Wert null annimmt.

ZB: $\frac{5x-3}{2x-1} + \frac{3}{4} = \frac{2}{x}$

Hier dürfen die Nenner der Terme $\frac{5x-3}{2x-1}$ und $\frac{2}{x}$ nicht null werden. Wir ermitteln, für welche Werte von x dieser Fall eintritt:

Nenner 1: $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$; Nenner 2: $x = 0$

Diese Werte sind aus der Grundmenge auszuschließen. Wir schreiben:

$D = G \setminus \left\{0; \frac{1}{2}\right\}$ oder $x \neq 0$ und $x \neq \frac{1}{2}$

Um die Lösungsmenge einer Bruchgleichung zu ermitteln, gehen wir folgendermaßen vor:

- Definitionsmenge ermitteln
- Einzelne Bruchterme, wenn möglich, durch Herausheben und Kürzen vereinfachen
- Linksterm und Rechtsterm der Gleichung auf den gleichen Hauptnenner bringen; der Hauptnenner ist das kleinste gemeinsame Vielfache aller Nenner der Gleichung.
- Multiplizieren der Gleichung mit dem Hauptnenner
- Lösen der Gleichung durch Anwenden von Äquivalenzumformungen

B **3.88** Ermittle die Lösungsmenge der Gleichung $\frac{3}{x} + 6 = \frac{3}{4}$ für $G = \mathbb{R}$.

Lösung:

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- x darf nicht null sein.

$HN = kgV(x, 4) = 4 \cdot x$
- Der Hauptnenner (HN) ist das kleinste gemeinsame Vielfache aller Nenner der Gleichung.

$\frac{3 \cdot 4 + 6 \cdot 4 \cdot x}{4 \cdot x} = \frac{3 \cdot x}{4 \cdot x} \quad | \cdot 4 \cdot x$
- Die einzelnen Terme werden erweitert.
- Die Gleichung wird mit dem Hauptnenner multipliziert.

$3 \cdot 4 + 6 \cdot 4 \cdot x = 3 \cdot x$

$12 + 24x = 3x \quad | -3x - 12$

$21x = -12 \quad | : 21$

$x = -\frac{12}{21}$

$x = -\frac{4}{7}$
- Die beiden obigen Schritte können auch zu einem zusammengefasst werden. Dabei werden die Zähler mit dem jeweiligen Erweiterungsfaktor multipliziert, der Nenner fällt dann sofort weg.

$L = \left\{-\frac{4}{7}\right\}$
- $\left(-\frac{4}{7}\right)$ ist in der Definitionsmenge enthalten und daher Lösung.

3.89 Ermittle Definitions- und Lösungsmenge der Gleichung $\frac{x+4}{x^2-4x}+\frac{6x}{3x-12}=\frac{2x-1}{x}$ für $G=\mathbb{R}$. B

Lösung:

Nenner	Faktoren	Erweiterungsfaktoren
x^2-4x	$x\cdot(x-4)$	**3**
$3x-12$	$3\cdot(x-4)$	**x**
x	x	**$3\cdot(x-4)$**
$HN=3\cdot x\cdot(x-4)$		

- Alle Nenner der Bruchgleichung werden so weit wie möglich in Faktoren zerlegt.

$x=0;\ \ x-4=0 \ \Rightarrow\ x=4$

$\Rightarrow\ D=\mathbb{R}\setminus\{0;4\}$

- Da der Hauptnenner alle in den Nennern vorkommenden Faktoren enthält, kann aus diesem die Definitionsmenge der Bruchgleichung ermittelt werden.

$$\frac{(x+4)\cdot 3}{HN}+\frac{6x\cdot x}{HN}=\frac{(2x-1)\cdot 3\cdot(x-4)}{HN} \quad |\cdot HN$$

- Erweitern und Multiplizieren mit dem Hauptnenner

$$(x+4)\cdot 3+6x\cdot x=(2x-1)\cdot 3\cdot(x-4)$$
$$3x+12+6x^2=6x^2-27x+12 \quad |-6x^2$$
$$3x+12=-27x+12 \quad |+27x-12$$
$$30x=0$$
$$x=0$$
$$0\notin D\ \Rightarrow\ L=\{\,\}$$

- 0 ist nicht in der Definitionsmenge enthalten und daher keine Lösung.

Bemerkungen:

- Beachte, dass das Multiplizieren der Gleichung mit dem Hauptnenner nur dann eine Äquivalenzumformung ist, wenn dieser ungleich null ist.
- Bei Bruchgleichungen mit Doppelbrüchen wird nach der Ermittlung der Definitionsmenge so umgeformt, dass eine Bruchgleichung mit einfachen Brüchen entsteht.

3.90 Bestimme die Definitionsmenge der gegebenen Gleichung. B

a) $\frac{3}{x}=7$ **b)** $\frac{5}{x-1}=2$ **c)** $\frac{x-6}{2x-2}=3$ **d)** $\frac{4x-2}{2x+1}=\frac{2x}{x-1}$ **e)** $\frac{6x-1}{3x+0{,}3}=\frac{8x-1}{4x-0{,}4}$

3.91 Gib drei Bruchgleichungen an, die die gegebene Definitionsmenge haben. A

a) $D=\mathbb{R}\setminus\{0;2\}$ **b)** $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;3\}$ **c)** $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3};0;\frac{1}{2}\right\}$ **d)** $D=\mathbb{R}\setminus\{-0{,}3;5\}$

3.92 Erkläre, wie die beiden unterschiedlichen Lösungswege der Gleichung $\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x^2-1}$ zu beurteilen sind. D

$\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x^2-1}$

$x^2-1=x^2+x$

$x=-1 \qquad L=\{-1\}$

$\frac{1}{x}=\frac{\cancel{x+1}^{\,1}}{\cancel{(x+1)}(x-1)}$

$x-1=x$

$-1=0 \qquad L=\{\,\}$

Aufgaben 3.93 – 3.97: Gib jeweils die Definitionsmenge an und löse die Gleichungen für $G=\mathbb{R}$.

3.93 **a)** $\frac{3}{x}=1$ **b)** $\frac{7}{x}=9$ **c)** $\frac{3}{5x}=4$ **d)** $\frac{5}{6b}=10$ B

3.94 **a)** $\frac{3}{2x-3}=4$ **b)** $\frac{2}{3b+5}=7$ **c)** $\frac{3}{2b+3}=\frac{3}{7}$ **d)** $\frac{4}{3y-5}=\frac{2}{5}$ B

3.95 **a)** $\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x}$ **b)** $\frac{3}{2r-2}=\frac{4}{5r}$ **c)** $\frac{1}{3a-2}=\frac{2}{2a-3}$ **d)** $\frac{9}{6x-3}=\frac{7}{2x+3}$ B

3.96 **a)** $\frac{t+1}{t-1}=\frac{2t}{2t+1}$ **b)** $\frac{x-1}{x+1}=\frac{3x}{3x+3}$ **c)** $\frac{4r+6}{r-4}-\frac{8r+10}{2r+5}=0$ **d)** $\frac{4c+2}{2c-3}-\frac{6c+1}{3c-6}=0$ B

3.97 **a)** $\frac{4}{x}-2=\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{2}{b}+\frac{3}{b}=8$ **c)** $\frac{1}{4s}-2=\frac{1}{2s}$ **d)** $\frac{1}{5b}-\frac{1}{20b}=5+\frac{1}{15b}$ B

Gleichungen und Ungleichungen

BCD **3.98** Beim Lösen der Gleichung $\frac{4}{x} - \frac{3}{x^2 + x} = \frac{5}{x + 1}$ schlagen Daniela und Stefan zwei unterschiedliche Lösungswege ein.
Daniela bestimmt den Hauptnenner und erhält: $4 \cdot (x + 1) - 3 = 5x$
Stefan rechnet mit dem Produkt aller Nenner: $4 \cdot (x^2 + x) \cdot (x + 1) - 3x \cdot (x + 1) = 5x \cdot (x^2 + x)$

1) Erkläre, welche Vor- bzw. Nachteile sich dadurch ergeben.

2) Zeige durch Nachrechnen, dass Daniela die Lösung $x = 1$ erhält und Stefan die Gleichung $x^3 - x = 0$, die er noch nicht lösen kann.

3) Überprüfe durch Einsetzen, dass die Gleichung $x^3 - x = 0$ die Lösungen $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$ hat. Kann Stefan nun trotzdem die einzige richtige Lösung der ursprünglichen Gleichung angeben? Begründe deine Antwort.

Aufgaben 3.99 – 3.104: Gib jeweils die Definitionsmenge an und löse die Gleichung für G = ℝ.

B **3.99** **a)** $-\frac{3x + 5}{x + 1} = \frac{6}{9x + 9} - \frac{5}{3x + 3}$ **b)** $\frac{4x - 3}{8x - 6} + \frac{4x - 6}{16x - 12} = \frac{x - 1}{4x - 3}$ **c)** $\frac{3t - 1}{t - 2} - \frac{1 - 2t}{2t - 4} = \frac{6t + 6}{3t - 6}$

B **3.100** **a)** $\frac{2}{x^2 - 2x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x - 2}$ **b)** $\frac{5}{a} + \frac{1}{a + 5} = \frac{1}{a^2 + 5a}$ **c)** $\frac{5}{r} - \frac{1}{r + 3} = \frac{4}{r^2 + 3r} + \frac{2}{r}$

B **3.101** **a)** $\frac{3}{x - 2} - \frac{5}{2x + 4} = \frac{13}{3x + 6} - \frac{4}{x + 2}$ **b)** $\frac{3}{3a - 3} - \frac{5}{a} = \frac{1}{5a - 5} - \frac{2}{a^2 - a}$ **c)** $\frac{2x}{3 + x} - \frac{8x}{12 + 4x} = \frac{1}{2x} - \frac{4}{6x + 2x^2}$

B **3.102** **a)** $\frac{4}{b - 3} - \frac{1}{b + 3} = \frac{3}{b^2 - 9}$ **b)** $\frac{2}{r - 4} = \frac{4}{r + 4} - \frac{3r}{r^2 - 16}$ **c)** $\frac{2}{a - 1} + \frac{3}{a + 1} = \frac{7a}{a^2 - 1} - \frac{2}{a}$

B **3.103** **a)** $\frac{5}{t^2 + 6t + 9} - \frac{2}{t^2 - 9} = \frac{3}{t^2 + 3t}$ **b)** $\frac{x}{2x^2 - 16x + 32} = \frac{1}{2x - 8} + \frac{3}{x^2 - 4x}$ **c)** $\frac{a^2 - 4}{4a^2 + 12a + 9} - \frac{a}{4a + 6} = \frac{1}{2a + 3}$

B **3.104** **a)** $\frac{-10}{x^3 - 10x^2 + 25x} + \frac{1}{x^2} = \frac{2}{x^2 + 5x} - \frac{1}{x^2 - 25}$ **b)** $\frac{-2}{2x^2 - 8} + \frac{1}{x} = \frac{1}{(x - 2)^2} + \frac{1}{x + 2}$

D **3.105** Was ist falsch? $\frac{1}{2 - x} - \frac{6}{x + 2} = \frac{1}{x - 2} \Rightarrow \frac{1}{\cancel{x - 2}} - \frac{6}{x + 2} = \frac{1}{\cancel{x - 2}} \Rightarrow -\frac{6}{x + 2} = 0 \Rightarrow 6 = 0, L = \{ \}$

Aufgaben 3.106 – 3.109: Gib jeweils die Definitionsmenge an und löse die Gleichung für G = ℝ.

B **3.106** **a)** $\frac{r + 2}{r - 2} + \frac{4r}{2r - 4} = -\frac{r - 3}{6 - 3r}$ **b)** $\frac{k - 4}{2 - k} - \frac{3}{k - 2} = \frac{3k + 2}{8 - 4k} + \frac{k}{6 - 3k}$ **c)** $\frac{4 - 5c}{c + 1} = \frac{3 + 4c}{1 - c} - \frac{c^2 + 8c + 17}{c^2 - 1}$

B **3.107** **a)** $\frac{\frac{x}{4} - \frac{x}{3}}{2} = \frac{1}{8}$ **b)** $\frac{2}{\frac{a}{5} - 3} = 5$ **c)** $\frac{\frac{s}{4} - 1}{\frac{s}{5} + 2} = 1$ **d)** $\frac{b + 1}{\frac{3b}{2} - \frac{b}{6}} = 3$

B **3.108** **a)** $\frac{\frac{k - 1}{2}}{\frac{k + 1}{3}} = 2$ **b)** $\frac{\frac{y + 2}{5}}{\frac{y - 3}{4}} = \frac{4}{3}$ **c)** $\frac{\frac{5a - 2}{6}}{\frac{4a + 5}{5}} = \frac{5}{3}$ **d)** $\frac{\frac{3x - 15}{2}}{\frac{15x + 10}{10}} = \frac{21}{4}$

B **3.109** **a)** $\frac{1 - \frac{x + 1}{x - 1}}{1 - \frac{x - 1}{x + 1}} = 2$ **b)** $\frac{\frac{z + 1}{z - 1} - \frac{z - 1}{z + 1}}{1 - \frac{z - 1}{z + 1}} = 3$ **c)** $\frac{\frac{x + 3}{x - 3} - \frac{x - 3}{x + 3}}{\frac{3 - x}{3 + x} - \frac{3 + x}{3 - x}} = -1$ **d)** $\frac{\frac{2}{t - 2}}{\frac{t - 2}{t + 2} - \frac{t + 2}{t - 2}} = 1$

AB **3.110** Wird die Summe aus drei und einer Zahl durch das Vierfache der Zahl dividiert, so erhält man die Zahl gebrochen durch die Differenz aus dem 4-fachen der Zahl und 6. Wie lautet die Zahl?

AB **3.111** Zwei Arbeiter benötigen für eine Arbeit gemeinsam 20 Tage. Wie viele Tage benötigt der zweite Arbeiter allein, wenn der erste Arbeiter allein 30 Tage arbeiten müsste?

AB **3.112** Bei der Parallelschaltung von zwei Widerständen R_1 und R_2 ist R_2 um 10 Ω kleiner als R_1. Der Gesamtwiderstand R_{ges} ist ein Drittel von R_1. Berechne R_1, R_2 und R_{ges}.
Hinweis: $\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

3.1.5 Gleichungen mit Formvariablen

3.113 Das Produkt zweier Zahlen ist acht. Ein Faktor kann die Werte 5, 3, 1 oder 0 annehmen. Schreibe als Gleichung an und berechne jeweils den zweiten Faktor. Ist dies für alle Werte möglich? Wie kann der Faktor berechnet werden, ohne jedes Mal die Gleichung zu lösen? ABCD

Eine Gleichung kann mehrere Variablen enthalten. Soll die Gleichung nach einer der Variablen gelöst werden, muss diese Gleichungsvariable angegeben sein. Alle anderen Variablen heißen dann **Formvariablen** und werden beim Lösen wie Zahlen behandelt.

Eine Gleichung, die neben der Gleichungsvariablen weitere Variablen enthält, heißt **Gleichung mit Formvariablen**.

Bei der Division durch einen Term, der Formvariablen enthält, ist zu beachten, dass die Division nicht zulässig ist, wenn der Term den Wert null annimmt. Dieser Fall ist getrennt zu behandeln.

3.114 Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $a \cdot (x + 1) = 3 \cdot (b - x) + a$ für x, $G = \mathbb{R}$. B

Lösung:

$a \cdot (x + 1) = 3 \cdot (b - x) + a$

$ax + a = 3b - 3x + a$

$ax + 3x = 3b$

$(a + 3) \cdot x = 3b$

Fall 1: $a + 3 \neq 0 \Rightarrow x = \frac{3b}{a+3} \quad L = \left\{\frac{3b}{a+3}\right\}$

Fall 2: $a + 3 = 0 \Rightarrow 0 \cdot x = 3b$

1) Für $b = 0 \Rightarrow 0 \cdot x = 0 \Rightarrow L = \mathbb{R}$

2) Für $b \neq 0 \Rightarrow 0 \cdot x = 3b \Rightarrow L = \{\,\}$

- x ist die Gleichungsvariable, a und b sind die Formvariablen. Sie werden beim Lösen wie Zahlen behandelt.
- Wegen der Division durch (a + 3) muss der Fall a + 3 = 0 gesondert behandelt werden.

Je nachdem, welche Werte a und b annehmen, erhalten wir eine der drei ermittelten Lösungsmengen.

3.115 Ein Vater möchte das Taschengeld unter seinen drei Töchtern so verteilen, dass die zweitälteste Tochter um den Betrag a mehr bekommt als die jüngste und die älteste das Doppelte der zweitältesten. Insgesamt stellt er 100,00 € zu Verfügung. Gib das jeweilige Taschengeld an, wenn a = 20,00 €; 30,00 €; 40,00 € ist. Erkläre, welche der Werte für a möglich sind. ABD

3.116 Bei einem angemeldeten Handy können die monatlichen Kosten K mit der Gleichung $K = a + b \cdot x$ berechnet werden, wobei a die Grundgebühr, b der Minutentarif und x die Gesprächsdauer ist. Magdalena kann zwischen zwei Handy-Tarifen wählen: a = 5,00 € und b = 10 Cent pro Minute oder a = 10,00 € und b = 5 Cent pro Minute. Für welchen Tarif sollte sie sich entscheiden, wenn sie im Monat genau 20,00 € zur Verfügung hat? Bestimme x zuerst allgemein. BC

Aufgaben 3.117 – 3.122: Löse die Gleichungen nach x für $G = \mathbb{R}$. Führe eine Fallunterscheidung durch, wenn es erforderlich ist.

3.117 ***a)*** $x - a = b$ ***b)*** $x + 5a = 2b$ ***c)*** $3a - 2x = 8a + 5x$ B

3.118 ***a)*** $5 \cdot (2x + 2a) - 3a = x + 3a$ ***b)*** $4 \cdot (x - a) = 2 \cdot (x + b) + 2a$ B

3.119 ***a)*** $a - b \cdot (b + x) = 1$ ***b)*** $a \cdot (x + b) = x + 3b$ B

3.120 ***a)*** $a \cdot (b - 2x) = 2b \cdot (a + x) + 3ax$ ***b)*** $2ax + a \cdot (a + 3x) = a^2 \cdot (a + x)$ B

3.121 ***a)*** $(x + b) \cdot (x - a) = (x + 3b)^2$ ***b)*** $(b - 3x)^2 = 9 \cdot (a + x^2) + 4ax$ B

3.122 ***a)*** $\frac{2ax}{b} = 3$ ***b)*** $\frac{bx}{3a} = a$ ***c)*** $\frac{x}{2a} = \frac{bx}{3}$ ***d)*** $\frac{abx}{5} = \frac{2bx}{3}$ B

3.2 Umformen von Formeln

In der Technik und in den Naturwissenschaften wird der Zusammenhang zwischen mehreren Größen üblicherweise in Form einer Gleichung angegeben. Solche Gleichungen heißen Formeln. Im Mathematikunterricht der Unterstufe hast du bereits viele Formeln kennen gelernt, die Zusammenhänge zwischen geometrischen Größen angeben, im Physikunterricht Formeln für den Zusammenhang physikalischer Größen.

BD **3.123** Ein Trapez mit 5 cm Höhe hat einen Flächeninhalt von 47,5 cm^2. Setze für die Länge der Seite c der Reihe nach 6 cm, 7 cm und 9 cm in die Flächeninhaltsformel $A = \frac{(a + c) \cdot h}{2}$ ein und berechne die Länge der Seite a. Überlege, wie du die drei Werte schneller hättest berechnen können.

Sollen mehrere Berechnungen durchgeführt werden, ist es sinnvoller, eine Formel zuerst umzuformen und erst dann alle Werte einzusetzen.

Formeln sind Gleichungen mit Formvariablen. Die Variablen stehen oft für technische oder naturwissenschaftliche Größen.
Eine **Formel umformen** heißt, die Gleichung nach einer der enthaltenen Variablen zu lösen.

BCD **3.124** Die Volumenformel für einen Drehkegel lautet $V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$.

1) Skizziere einen Drehkegel und kennzeichne die in der Formel vorkommenden Größen.
2) Mit welcher anderen Volumenformel hängt diese Formel zusammen?
3) Wie ändert sich das Volumen, wenn h bzw. wenn r verdoppelt wird?
4) Forme die Formel so um, dass r berechnet werden kann. Begründe, ob Fallunterscheidungen notwendig sind.

Lösung:
1) r ... Radius des Basiskreises, h ... Höhe
2) Das Volumen ist ein Drittel des Volumens des Drehzylinders mit Radius r und Höhe h.
3) h verdoppelt: $V_{neu} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot h = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h = 2 \cdot V \Rightarrow$ V verdoppelt

r verdoppelt: $V_{neu} = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot r)^2 \cdot \pi \cdot h = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h = 4 \cdot V \Rightarrow$ V vervierfacht

4)
$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3} \qquad | \cdot 3$$
$$3 \cdot V = r^2 \cdot \pi \cdot h \qquad | : (\pi \cdot h)$$
$$\frac{3 \cdot V}{\pi \cdot h} = r^2$$
$$r = \sqrt{\frac{3 \cdot V}{\pi \cdot h}}$$

Da alle vorkommenden Größen größer als null sein müssen, kann die Division ohne Fallunterscheidung erfolgen. Auch das Wurzelziehen ist möglich.

Es gelten dieselben Regeln wie für das Lösen von Gleichungen, wobei die Angabe von Grund-, Definitions- und Lösungsmenge meist nicht notwendig ist. Auch eine Fallunterscheidung kann in der Regel entfallen.

Das nächste Beispiel zeigt eine mögliche Vorgangsweise für das Umformen von Formeln. Diese Schritte können bei jeder Formel in der angegebenen Reihenfolge angewendet werden. Es sind aber natürlich nicht bei jeder Formel alle Schritte erforderlich und häufig gibt es auch (mehrere) andere kürzere bzw. elegantere Lösungsmöglichkeiten.

3.125 Forme die Formel für das Verhältnis elektrischer Spannungen $\frac{U_1}{U_2} = R_1 \cdot \left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_2}\right)$ so um, dass der Ohm'sche Widerstand R_a berechnet werden kann. **B**

Lösung:

$$\frac{U_1}{U_2} = R_1 \cdot \left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_a} - \frac{R_1}{R_2}$$
- Klammern auflösen

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1 \cdot R_2 - R_1 \cdot R_a}{R_a \cdot R_2} \qquad | \cdot R_a \cdot R_2 \cdot U_2$$
- Bruchfrei machen

$$U_1 \cdot R_a \cdot R_2 = (R_1 \cdot R_2 - R_1 \cdot R_a) \cdot U_2$$
- Klammern auflösen

$$U_1 \cdot R_a \cdot R_2 = R_1 \cdot R_2 \cdot U_2 - R_1 \cdot R_a \cdot U_2 \qquad | + R_1 \cdot R_a \cdot U_2$$
- Terme mit der gesuchten Variablen auf eine Seite, alle anderen Terme auf die andere Seite bringen

$$U_1 \cdot R_a \cdot R_2 + R_1 \cdot R_a \cdot U_2 = R_1 \cdot R_2 \cdot U_2$$
- Gesuchte Variable herausheben

$$R_a \cdot (U_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot U_2) = R_1 \cdot R_2 \cdot U_2 \qquad | : (U_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot U_2)$$
- Durch den in den Klammern verbleibenden Term dividieren

$$R_a = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot U_2}{U_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot U_2}$$

3.126 Die Formel aus Aufgabe 3.125 lässt sich auch auf andere Arten umformen. Die ersten Schritte einer Umformung sind jeweils vorgegeben. Stelle die Umformung fertig und überlege dir eine weitere Möglichkeit. Dokumentiere deine Rechenschritte. **BC**

1) $\frac{U_1}{U_2} = R_1 \cdot \left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_2}\right) \qquad | : R_1$

2) $\frac{U_1}{U_2} = R_1 \cdot \left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_2}\right)$

$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_a} - \frac{R_1}{R_2} \qquad | + \frac{R_1}{R_2}$

3.127 Der Druck p ist das Verhältnis der Kraft F zur Fläche A. **ABD**

1) Schreibe eine Formel für den Druck p an.

2) Wie ändert sich der Druck, wenn die Kraft bzw. wenn die Fläche verdoppelt wird?

3) Forme die Formel nach der Fläche A um.

3.128 Das Ohm'sche Gesetz lautet: $U = R \cdot I$ **BD**

1) Welche Bedeutung haben die vorkommenden Größen?

2) Wie muss man R ändern, wenn I verdreifacht wird und U konstant bleiben soll?

3) Forme nach R um.

Gleichungen und Ungleichungen

BC **3.129** Gegeben ist die Formel $u = 2a + c$.

1) Der Umfang welchen Dreiecks wird durch die Formel beschrieben?

2) Forme die Formel nach der Seitenlänge a um.

BD **3.130** Ein Schüler führt folgende Formelumformung durch: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ | Kehrwert

$R = R_1 + R_2$

Erkläre anhand eines einfachen Zahlenbeispiels, warum dies nicht stimmen kann.

BCD **3.131** Armin erhält durch Umformen der Formel

$V = \frac{\gamma \cdot r^3 \cdot \pi}{12} \cdot (3 \cdot h - 2 \cdot r)$ für h: $h = \frac{4 \cdot V}{\gamma \cdot r^3 \cdot \pi} + \frac{2 \cdot r}{3}$

1) Welche Rechenschritte hat er ausgeführt?

2) Als Kontrolle benutzt er einen Taschenrechner. Erkläre, ob die Ergebnisse gleich sind.

1.1 *Nicht gespeicherte

$\text{solve}\left(v=\frac{\gamma \cdot r^3 \cdot \pi}{12} \cdot (3 \cdot h-2 \cdot r), h\right)$

$h=\frac{2 \cdot (\gamma \cdot \pi \cdot r^4+6 \cdot v)}{3 \cdot \gamma \cdot \pi \cdot r^3}$

BCD **3.132** Die Volumenformel für eine quadratische Pyramide lautet $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$.

1) Skizziere eine Pyramide und kennzeichne die in der Formel vorkommenden Größen.

2) Wie ändert sich das Volumen, wenn a verdoppelt bzw. wenn h halbiert wird?

3) Forme die Formel so um, dass a berechnet werden kann. Begründe, ob Fallunterscheidungen notwendig sind.

Aufgaben 3.133 – 3.137: Die folgenden Formeln sind dir aus der Unterstufe bekannt. Benenne die vorkommenden Größen und forme anschließend auf die gesuchte Größe um.

BC	**3.133**	$A = a \cdot b$	Flächeninhalt des Rechtecks	b = ?
BC	**3.134**	$u = 2 \cdot r \cdot \pi$	Umfang des Kreises	r = ?
BC	**3.135**	$A = \frac{e \cdot f}{2}$	Flächeninhalt des Deltoids	e = ?
BC	**3.136**	$b = \frac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180°}$	Länge des Kreisbogens	α = ?
BC	**3.137**	$Z = K \cdot p \cdot \frac{t}{360\,d}$	Zinsen für die Zeit t in Tagen	p = ?

Aufgaben 3.138 – 3.142: Forme die Formeln auf die gesuchte Größe um.

B	**3.138**	$u = 2 \cdot (a + b)$	Länge der Seite a = ?	Umfang des Rechtecks
B	**3.139**	$s = \frac{a+b+c}{2}$	Länge der Seite b = ?	Halber Umfang des Dreiecks
B	**3.140**	$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$	Radius der Grundfläche r = ?	Volumen des Kreiszylinders
B	**3.141**	$A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$	Länge der Seite a = ?	Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks
B	**3.142**	$\rho = \frac{2 \cdot A}{a+b+c}$	Länge der Seite c = ?	Inkreisradius des Dreiecks

BD **3.143** Vor allem in den USA werden Grad Fahrenheit (°F) als Einheit für die Temperatur verwendet. Die Umrechnung einer Temperatur φ in °F auf die Temperatur ϑ in °C erfolgt nach folgender Formel: $\frac{\vartheta}{°C} = \frac{5}{9} \cdot \left(\frac{\varphi}{°F} - 32\right)$

1) Erkläre, ob bei gleicher Temperatur der Zahlenwert in °C oder in °F höher ist.

2) Würdest du in 100 °F heißem Wasser baden wollen? Begründe deine Antwort.

3) Gib eine Formel für die Umrechnung einer Temperatur von °C in °F an.

Formeln aus dem naturwissenschaftlichen Bereich

3.144 Das Boyle-Mariott'sche Gesetz lautet $p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$. Recherchiere, wo dieses Gesetz Anwendung findet. Drücke die Gleichung in eigenen Worten aus und forme nach V_2 um. BCD

Aufgaben 3.145 – 3.166: Forme die Formeln nach der gesuchten Größe um.

Nr.	Formel	Gesuchte Größe	Bezeichnung	
3.145	$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$	Absolute Temperatur T = ?	Gleichung des idealen Gases	B
3.146	$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$	Masse m_2 = ?	Anziehungskraft zweier Massen	B
3.147	$v = v_0 + a \cdot t$	Beschleunigung a = ?	Geschwindigkeit bei gleichmäßig beschleunigter Bewegung	B
3.148	$\eta = \frac{P_E - P_V}{P_E}$	Verlustleistung P_V = ?	Wirkungsgrad	B
3.149	$E_{kin} = \frac{m \cdot v^2}{2}$	Geschwindigkeit v = ?	Kinetische Energie	B
3.150	$s = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$	Beschleunigung a = ?	Weg bei gleichmäßig beschleunigter Bewegung	B
3.151	$h = v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$	Anfangsgeschwindigkeit v_0 = ?	Steighöhe bei senkrechtem Wurf	B
3.152	$\frac{4r^3\pi}{3} \cdot (\rho - \rho') \cdot g = 6\pi\eta r v$	Dichte ρ = ?	Bewegung einer Kugel in einer viskosen Flüssigkeit	B
3.153	$Q = m \cdot c \cdot (T_2 - T_1)$	Absolute Temperatur T_1 = ?	Wärmeenergie beim Erwärmen	B
3.154	$s = \frac{v_a + v_e}{2} \cdot t$	Endgeschwindigkeit v_e = ?	Beschleunigungsweg	B
3.155	$p = p_0 + \frac{p_0}{273{,}15\ K} \cdot \vartheta$	Druck p_0 = ?	Gay-Lussac-Gesetz	B
3.156	$c = p + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot h$	Dichte ρ = ?	Bernoulli'sche Strömungsgleichung	B
3.157	$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$	Gegenstandsweite g = ?	Abbildgleichung für Linsen	B
3.158	$f = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$	Masse m = ?	Eigenfrequenz des Federpendels	B
3.159	$E = \frac{m_1 \cdot m_2}{2 \cdot (m_1 + m_2)} \cdot (v_1 - v_2)^2$	Masse m_2 = ?	Energie bewegter Massen bezogen auf den Massenmittelpunkt	B

Formeln aus der Elektrotechnik

Nr.	Formel	Gesuchte Größe	Bezeichnung	
3.160	$C = \varepsilon \cdot \frac{A}{d}$	Inhalt der Plattenfläche A = ?	Kapazität eines Plattenkondensators	B
3.161	$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$	Länge des Leiters l = ?	Ohm'scher Widerstand eines Leiters	B
3.162	$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{U_0^2}{R}$	Ohm'scher Widerstand R = ?	Wechselstromleistung	B
3.163	$F = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$	Elektrische Ladung Q_2 = ?	Elektrostatische Kraft	B
3.164	$\frac{U_C}{U_R} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C_2 \cdot R_1}$	Frequenz f = ?	Spannungsverhältnis bei RC-Schaltung	B
3.165	$P = \frac{1}{2} \cdot I_0^2 \cdot R$	Amplitude der Stromstärke I_0 = ?	Wechselstromleistung	B
3.166	$\omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$	Induktivität L = ?	Resonanzfrequenz	B

Gleichungen und Ungleichungen

Aufgaben 3.167 – 3.172: Forme die Formeln nach der gesuchten Größe um.

B **3.167** $I_1 = \frac{U + I_0 \cdot R_2'}{R_1 + R_1' + R_2'}$ Ohm'scher Widerstand R_1 = ? Stromstärke in einer Schaltung

B **3.168** $R = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$ Ohm'scher Widerstand R_2 = ? Gesamtwiderstand einer Schaltung

Formeln aus der Bautechnik

B **3.169** $W_p = \frac{\pi}{16} \cdot h \cdot b^2$ Höhe h = ? Polares Widerstandsmoment

B **3.170** $l = l_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta)$ Temperaturunterschied $\Delta\vartheta$ = ? Temperaturausdehnung eines Stabs

B **3.171** $I = \frac{B \cdot H^3}{12} - \frac{b \cdot h^3}{12}$ Breite b = ? Trägheitsmoment

B **3.172** $I_y = \frac{m}{4} \cdot \left(h^2 + \frac{b^2}{3}\right)$ Breite b = ? Trägheitsmoment

ABC **3.173** Eine Regel beim Berechnen der Stufenhöhe und -breite einer Treppe lautet:
Die doppelte Stufenhöhe und die Stufenbreite sollen zusammen 63 cm ergeben.
1) Drücke diesen Zusammenhang als Formel aus.
2) Recherchiere die Bedeutung des Werts 63 cm.
3) In einem Haus mit 3,06 m Geschoßhöhe soll eine Treppe mit 17 Stufen errichtet werden. Welche Breite ergibt sich für die Stufen?

AB **3.174** Um die Zugspannung σ in einem runden Stab mit Radius r zu berechnen, wird die Zugkraft F durch den Flächeninhalt dividiert.
1) Gib die Formel für die Zugspannung an.
2) Forme auf den Radius um.

ABC **3.175** Zwei gleich große Mengen mit a % bzw. b % eines bestimmten Stoffs werden gemischt. Gib eine Formel an, mit deren Hilfe der Prozentgehalt der Mischung berechnet werden kann. Welcher Prozentgehalt ergibt sich für a = b?

ABCD **3.176** Wird ein Balken, der links und rechts aufliegt, durch eine Kraft F mittig belastet, so biegt er sich durch. Für die größte Durchbiegung f gilt dann: $f = \frac{F \cdot \ell^3}{48 \cdot E \cdot I}$
mit E ... Elastizitätsmodul, I ... Trägheitsmoment, ℓ ... Länge des Trägers
1) Wie ändert sich die Durchbiegung, wenn die Länge des Trägers verdoppelt wird?
2) Ergänze folgende Sätze:
Wenn die Kraft größer wird, so wird die Durchbiegung ....
Eine .... des Trägheitsmoments bewirkt eine Verkleinerung der Durchbiegung.
3) Ein 3 m langer Holzbalken biegt sich 3 mm durch. Wie groß ist die Kraft, wenn das Produkt aus Elastizitätsmodul und Trägheitsmoment $8 \cdot 10^6$ kNcm² beträgt?

BCD **3.177** Für die Spannung U eines Plattenkondensators gilt: $U = \frac{Q}{\varepsilon_0 \cdot A} \cdot d$
mit Q ... Ladung, ε_0 ... elektrische Feldkonstante, A ... Plattenfläche,
d ... Abstand der Platten
1) Die Spannung soll halbiert werden. Welche Werte können dazu wie verändert werden?
2) Ermittle die Plattenfläche zuerst allgemein und berechne dann für die Spannung 120 V, die Ladung 10^{-9} C und den Abstand 5 mm.
Hinweis: Recherchiere zuerst den Wert der elektrischen Feldkonstanten.

Weitere Formeln

Aufgaben 3.178 – 3.199: Forme jeweils auf die gesuchte Größe um.

3.178 **a)** $V = \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot h$ $h = ?$ **b)** $y_0 = \frac{b^2}{a + 2 \cdot b}$ $a = ?$ B

3.179 **a)** $y - y_1 = k \cdot (x - x_1)$ $x_1 = ?$ **b)** $V = \frac{\pi}{3} \cdot h^2 \cdot (3r - h)$ $r = ?$ B

3.180 **a)** $x = \frac{3 \cdot V}{r^2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{2 \cdot a}{r} - 1\right)$ $a = ?$ **b)** $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$ $y = ?$ B

3.181 **a)** $q = \frac{m - k}{m - 1} \cdot c_v \cdot (T_2 - T_1)$ $T_1 = ?$ **b)** $v = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$ $v_1 = ?$ B

3.182 **a)** $\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4 \cdot \pi \cdot N \cdot p^2}{9 \cdot K \cdot T}$ $N = ?$ **b)** $P = \frac{(\varepsilon - 1) \cdot \vartheta \cdot H}{4 \cdot \pi \cdot c}$ $H = ?$ B

3.183 **a)** $\eta = \frac{1}{9} \cdot \frac{\psi}{1 + \beta}$ $\psi = ?$ **b)** $B = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \mu_0} \cdot \frac{i \cdot R^2}{2 \cdot \sqrt{(r^2 + R^2)^3}}$ $i = ?$ B

3.184 **a)** $A \cdot l = \frac{A \cdot R}{K - 1} \cdot (T_1 - T_2)$ $T_1 = ?$ **b)** $P = Q \cdot \frac{r \cdot (1 + f_2) + f}{R - f_1 \cdot r}$ $R = ?$ B

3.185 **a)** $V = \frac{\pi \cdot r^4 \cdot (p - p_0) \cdot t_0}{8 \cdot \mu \cdot l}$ $p_0 = ?$ **b)** $r = \frac{x}{x_0} - 1$ $x_0 = ?$ B

3.186 **a)** $\alpha = \alpha_0 - \frac{h_1 \cdot \lambda}{b}$ $\lambda = ?$ **b)** $y = A \cdot f \cdot \left(t - \frac{r}{c}\right)$ $r = ?$ B

3.187 **a)** $c_1 = c + v \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ $v = ?$ **b)** $\Delta t = H \cdot R \cdot \frac{k}{k - 1}$ $k = ?$ B

3.188 **a)** $y_0 = (x_0 - x_2) \cdot \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ $x_0 = ?$ **b)** $R = R_{20} \cdot [1 + \alpha \cdot (\vartheta - 20\,°C)]$ $\alpha = ?$ B

3.189 **a)** $I = \frac{U}{R_a + \frac{R_i}{n}}$ $n = ?$ **b)** $\tau = \frac{L}{R_1 + \Delta R + k \cdot \Omega_0 \cdot \frac{w_e}{R_m}}$ $\Delta R = ?$ B

3.190 **a)** $i = \frac{D + d_1}{(d + d_1) \cdot (1 - \psi)}$ $d = ?$ **b)** $K = K_0 \cdot \left[1 + 1{,}4 \cdot \left(\frac{s}{D} - 0{,}01\right)\right]$ $s = ?$ B

3.191 **a)** $v_1 = -c + \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot c}{\lambda}$ $c = ?$ **b)** $x = a + \frac{a_1 - a}{h} \cdot z$ $a = ?$ B

3.192 **a)** $T = \left(\frac{h}{v_1} + \frac{h}{v_2}\right) \cdot \frac{b}{s}$ $h = ?$ **b)** $\left(1 + \frac{\lambda_1}{K_1}\right) \cdot B_1 = \left(1 + \frac{\lambda_2}{K_2}\right) \cdot B_2$ $K_1 = ?$ B

3.193 **a)** $E_n - E_1 = \frac{1}{8} \cdot \frac{e^4 \cdot m_e}{\varepsilon_0^2 \cdot h^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n_2}\right)$ $m_e = ?$ **b)** $I = \frac{4 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot H}{1 + \beta \cdot \kappa}$ $\kappa = ?$ B

3.194 **a)** $c = \frac{c_1 \cdot m_1 + c_2 \cdot m_2}{m} \cdot \frac{\vartheta - \vartheta_1}{\vartheta_2 - \vartheta}$ $\vartheta = ?$ **b)** $w = \frac{v}{a} \cdot \frac{6 \cdot M_1}{3 \cdot M_1 + M_2}$ $M_1 = ?$ B

3.195 **a)** $x = \frac{D_1 \cdot x_1 + D_2 \cdot x_2}{D_1 \cdot D_2}$ $D_2 = ?$ **b)** $f' = \frac{f}{1 - \frac{v}{c}}$ $v = ?$ B

3.196 **a)** $E = G \cdot h + \frac{m \cdot v^2}{2}$ $v = ?$ **b)** $t = \frac{s}{c - v} + \frac{s}{c + v}$ $s = ?$ B

3.197 **a)** $V_2 = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{R_3}{R_4}}$ $R_3 = ?$ **b)** $c = \frac{87}{b + \frac{a}{\sqrt{3}}}$ $b = ?$ B

3.198 **a)** $b = g \cdot \mu \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 + \frac{i_2}{r_2}}$ $r_1 = ?$ **b)** $\frac{u_2}{u_1} = -\frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{f}{\frac{z_1 + z_2}{v \cdot z_1} + f}$ $f = ?$ B

3.199 **a)** $P = Q \cdot \frac{\frac{b}{a} \cdot \left(\frac{d}{D}\right)^2}{1 + \frac{b}{a} + \left(\frac{d}{D}\right)^2}$ $a = ?$ **b)** $2 \cdot \pi \cdot \frac{m}{1 + \frac{m}{M}} \cdot r^2 \cdot u = n \cdot h$ $m = ?$ B

Weitere Aufgaben im Zusatzheft

3.3 Ungleichungen

3.3.1 Ungleichungen ohne Fallunterscheidung

In der Praxis gibt es häufig Aussagen wie: „Karin ist größer als Peter“, „Du darfst nicht mehr als 5 mℓ von dieser Substanz verwenden“, „Der Sendemast muss höher als 32 m sein“, „Der LKW darf höchstens 4,10 m hoch sein.“ Um diese Aussagen in der Sprache der Mathematik zu formulieren, werden die Symbole $>$ (größer), $<$ (kleiner), $\geqslant$ (größer oder gleich) und $\leqslant$ (kleiner oder gleich) verwendet, zum Beispiel Größe von Karin $>$ Größe von Peter.

A **3.200** Schreibe die folgenden Aussagen mit den Symbolen $>, <, \geqslant, \leqslant$ an.

1) Der Abstand der Erde zum Mond ist kleiner als der Abstand der Erde zur Sonne.
2) Die Höhe des Millenium Towers ist größer als die Höhe des Stephansdoms.
3) Der Reifendruck darf höchstens 3 bar betragen.
4) Die Wassertiefe beträgt maximal 1,45 m.
5) Die maximale Speicherkapazität eines Wechseldatenträgers beträgt 8 GB.

BCD **3.201** Auf die Ungleichung „$3 < 6$“ werden acht verschiedene Umformungen angewendet. Ordne den angegebenen Umformungen die entstehenden Ungleichungen zu. Welche Rechenregeln für das Dividieren und Multiplizieren kannst du erkennen?

1) $\cdot 2$ ***2)*** $\cdot (-1)$ ***3)*** -2 ***4)*** $:3$ ***5)*** $\cdot (-0{,}1)$ ***6)*** $+4$ ***7)*** -8 ***8)*** $:(-3)$

A) $-0{,}3 > -0{,}6$ ***C)*** $1 < 4$ ***E)*** $-5 < -2$ ***G)*** $6 < 12$
B) $-1 > -2$ ***D)*** $7 < 10$ ***F)*** $-3 > -6$ ***H)*** $1 < 2$

Anstelle der Zahlen könnten in den Aussagen von Aufgabe 3.200 auch Variablen verwendet werden. Zum Beispiel kann mit x für den Abstand der Erde zum Mond und y für den Abstand der Erde zur Sonne die Ungleichung $x < y$ gebildet werden. Wir werden uns im Folgenden auf Ungleichungen mit einer Variablen beschränken.

Die Symbole $>, <, \geqslant, \leqslant$ heißen **Ungleichheitszeichen**.
Eine Aussage heißt **Ungleichung**, wenn zwei Terme durch ein Ungleichheitszeichen miteinander verbunden sind.

Die Bedeutung der Begriffe Grundmenge, Definitionsmenge, Lösung und Lösungsmenge ist dieselbe wie bei Gleichungen. Ist die Grundmenge nicht anders angegeben, so gilt $G = \mathbb{R}$.

Für Ungleichungen gelten analoge Äquivalenzumformungen wie für Gleichungen. Wird eine Ungleichung mit einem negativen Term multipliziert oder durch diesen dividiert, muss aber das Ungleichheitszeichen umgekehrt werden. ZB: $3 < 5 \;|\cdot(-1)$ ergibt $-3 > -5$

Werden linke und rechte Seite einer Ungleichung vertauscht, muss auch das Ungleichheitszeichen umgekehrt werden. ZB: $8 > 5$ ist gleichbedeutend mit $5 < 8$

Für Ungleichungen sind folgende **Äquivalenzumformungen** zulässig:

1) **Addieren** oder **Subtrahieren** des gleichen Terms auf beiden Seiten der Ungleichung
2) **Multiplizieren** oder **Dividieren** beider Seiten der Ungleichung mit dem bzw. durch den gleichen **positiven** Term
3) **Multiplizieren** oder **Dividieren** beider Seiten der Ungleichung mit dem bzw. durch den gleichen **negativen** Term **und Umkehrung** des Ungleichheitszeichens

3.202 Löse die Ungleichung $3x - 18 \geqslant 7x + 6$ und stelle die Lösungsmenge auf der Zahlengeraden dar. Kontrolliere das Ergebnis stichprobenartig anhand von verschiedenen Zahlen. Zeige dabei auch, dass Werte außerhalb der Lösungsmenge die Ungleichung nicht erfüllen. **BCD**

Lösung:

$3x - 18 \geqslant 7x + 6 \quad | -7x + 18$

$-4x \geqslant 24 \quad | :(-4)$

$x \leqslant -6$

$L = \{x \mid x \leqslant -6\} =]-\infty; -6]$

Jede Zahl, die kleiner oder gleich −6 ist, ist Lösung der Ungleichung.

Stichproben:

$x \in L$, zB: $x = -7 \Rightarrow$ LS: −39 und RS: −43, $-39 \geqslant -43$ ist eine wahre Aussage.

$x \notin L$, zB: $x = -3 \Rightarrow$ LS: −27 und RS: −15, $-27 \geqslant -15$ ist eine falsche Aussage.

Aufgaben 3.203 – 3.204: Schreibe die durch die angegebenen Umformungen entstehenden Ungleichungen an.

3.203 Umformungen $+5$, -3, $\cdot 3$ bzw. $:2$. **B**

a) $4 > 1$ **b)** $5 < 9$ **c)** $-2 > -6$ **d)** $3 \geqslant 1$ **e)** $-5 \leqslant -2$ **f)** $-0{,}9 \geqslant -5{,}3$

3.204 Umformungen $\cdot(-1)$ bzw. $:(-3)$. **B**

a) $6 > 3$ **b)** $1 < 9$ **c)** $-3 < -1$ **d)** $8 > 5$ **e)** $-1{,}5 \leqslant -0{,}6$ **f)** $4{,}2 \geqslant 2{,}4$

3.205 Welche Ungleichungen sind äquivalent zur gegebenen? Begründe deine Antwort. **D**

a) $2 < 5$ **1)** $5 > 2$ **2)** $-5 > -2$ **3)** $-5 < -2$ **4)** $-2 > -5$

b) $-a \leqslant 7$ **1)** $a \leqslant -7$ **2)** $-7 \leqslant a$ **3)** $7 \geqslant -a$ **4)** $a \geqslant -7$

3.206 Ordne der angegebenen Ungleichung die passende Lösungsmenge zu. Begründe deine Wahl. Gib die Lösungsmenge auch in Intervallschreibweise an. **BD**

a) $x > -5$ **b)** $2x \leqslant 4$ **c)** $x - 2 < -7$

1) **2)** **3)**

3.207 Claudia benötigt für ein Werkstück vier Schrauben pro Holzplatte. Die Holzplatte kostet 3,00 € und eine Schraube ein Zehntel der Holzplatte. Claudia hat 11,00 € zur Verfügung und führt folgende Rechnung durch: $3x + 0{,}3 \cdot 4x \leqslant 11 \Rightarrow x \leqslant 2{,}619...$ **ABCD**

1) Welchen Wert hat sie berechnet?

2) Wie viele Holzplatten und Schrauben wird sie nun kaufen?

3) Sie führt zu Überprüfung die Rechnung mit der Anzahl s der Schrauben durch und erhält $s \leqslant 10{,}476$. Erkläre die unterschiedliche Anzahl der Schrauben im Vergleich zu **2)**.

3.208 Florian möchte ein Gehege für seinen Hasen bauen. Für die Umzäunung kann er maximal 5 m Maschendrahtzaun verwenden. Die Länge des rechteckigen Geheges soll 30 cm länger sein als die Breite. **ABC**

1) Berechne die maximal möglichen Abmessungen des Geheges.

2) Kann er damit einen Flächeninhalt von $1\ m^2$ erreichen?

Gleichungen und Ungleichungen

ABC **3.209** Die Hälfte einer Zahl ist kleiner als das Doppelte der Zahl vermindert um fünf. Für welche ***1)*** natürlichen, ***2)*** reellen Zahlen trifft obige Aussage zu?

Aufgaben 3.210 – 3.219: Berechne die Lösungsmengen der gegebenen Ungleichungen und stelle sie grafisch dar:

B **3.210** ***a)*** $x - 1 \leq 2$ ***b)*** $2a + 1 < 5$

B **3.211** ***a)*** $5 + x \geq 2x + 1$ ***b)*** $3x + 2 \leq 2 + 5x$

B **3.212** ***a)*** $2 \cdot (2x - 3) + 5 < 3 \cdot (2x - 3)$ ***b)*** $6 \cdot (x - 1) + 7 > 3 \cdot (5x + 3) - 8$

B **3.213** ***a)*** $7x + 1 - (6x - 2) + 2 \leq 5 - (2x - 3) - (8x - 4)$
b) $7 - (5z - 6) - (-4z + 3) > z - 7 - (2z - 3) - 4z$

B **3.214** ***a)*** $(x + 2) \cdot (x + 8) < (x - 1) \cdot (x + 16)$ ***b)*** $(x - 10) \cdot (x - 12) > (x - 8) \cdot (x - 6)$

B **3.215** ***a)*** $(-a + 4) \cdot (a + 3) + 3 \cdot (a + 10) < (a - 6) \cdot (-a + 5)$
b) $(c - 2) \cdot (-c + 3) \geq (c + 4) \cdot (-c + 5) + 6 \cdot (c - 5)$

B **3.216** ***a)*** $4 \cdot (x - 2)^2 + 4 \leq (2x - 3)^2$ ***b)*** $(3z + 3)^2 < 8 \cdot (z - 5)^2 + (z + 1)^2$

B **3.217** ***a)*** $\frac{2x + 1}{3} < \frac{x - 2}{2}$ ***b)*** $\frac{5y - 6}{3} \geq \frac{4y - 3}{4}$ ***c)*** $\frac{a + 1}{6} > \frac{a - 1}{5}$ ***d)*** $\frac{2x - 2}{4} \geq \frac{5x - 1}{7}$

B **3.218** ***a)*** $\frac{3b + 6}{4} + 2 < \frac{b + 1}{5}$ ***b)*** $4 > \frac{2x + 4}{3} - 5$ ***c)*** $\frac{8a - 1}{2} \leq \frac{2a - 2}{3} - 3$ ***d)*** $\frac{z + 2}{6} + \frac{z}{3} < \frac{z + 1}{3}$

B **3.219** ***a)*** $3 + \frac{x}{5} \geq \frac{x}{3} - \frac{2x}{15}$ ***b)*** $\frac{1 - 2x}{3} + \frac{6x}{7} > \frac{x}{3} - \frac{2x}{7} + \frac{1}{2}$ ***c)*** $\frac{2y + 1}{4} - \frac{y - 5}{8} \geq \frac{y + 3}{4} - 2$

3.3.2 Bruchungleichungen

BD **3.220** Ermittle die Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{6}{x} < 2$. Überlege, ob das Ungleichheitszeichen bei der Multiplikation mit der Variablen x gleich bleibt oder umgekehrt werden muss. Setze für x zuerst 12 und dann (–1) ein.

Ein Term, der Variablen enthält, kann je nach Belegung der Variablen einen positiven oder einen negativen Wert annehmen. Wird eine Ungleichung mit einem solchen Term multipliziert oder durch ihn dividiert, sind daher diese beiden Fälle zu unterscheiden. Sie führen zu Teillösungsmengen, deren Vereinigung die Lösungsmenge ergibt.

Eine Ungleichung, bei der die Variable mindestens einmal im Nenner vorkommt, heißt **Bruchungleichung**. Beim Lösen sind Fallunterscheidungen notwendig.

C **3.221** Mithilfe des Zahlenstrahls sind zwei Mengen dargestellt. Welche Menge gibt ***1)*** den Durchschnitt bzw. ***2)*** die Vereinigung der dargestellten Mengen an?

a) (Zahlenstrahl: –3, –2, –1, 0, 1)
$L_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 0\}$ $L_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \wedge x \geq 0\}$
$L_2 = \mathbb{R}$ $L_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2 \wedge x < 0\}$

b) (Zahlenstrahl: –2, –1, 0, 1, 2)
$L_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \vee x > 1\}$ $L_3 = \{\,\}$
$L_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1 \wedge x < 1\}$ $L_4 = \mathbb{R}$

BC **3.222** Stelle die gegebenen Mengen grafisch dar und gib sie in Intervallschreibweise an.
a) $x > 2 \wedge x < 4$ ***b)*** $x < 3 \wedge x \leq 1$ ***c)*** $x \leq 0 \wedge x > 2$

B **3.223** Gib ***1)*** die Durchschnittsmenge und ***2)*** die Vereinigungsmenge der gegebenen Mengen an.
a) $L_1 =]-3; 2]$, $L_2 =]2; 4[$ ***b)*** $L_1 =]-\infty; 1]$, $L_2 =]-2; 3[$ ***c)*** $L_1 = \left[-1; \frac{5}{2}\right[$, $L_2 = [-3; \infty[$

3.224 Löse die Bruchungleichung $\frac{2x}{2-x} > \frac{2}{3}$. Dokumentiere deinen Lösungsweg auch mit eigenen Worten und stelle die Lösungsmenge grafisch dar. **BC**

Lösung:

$2 - x = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Der Nenner darf nicht 0 sein.

Der Nenner (2 – x) kann positive und negative Werte annehmen.

Fallunterscheidung:

Fall 1: Nenner positiv

$2 - x > 0 \Rightarrow 2 > x$ bzw. $x < 2$ — Der Nenner ist genau dann **positiv**, wenn $x < 2$ ist.

$\frac{2x}{2-x} > \frac{2}{3} \quad | \cdot (2-x) \cdot 3$ — Beim Multiplizieren mit einem positiven Term wird das Ungleichheitszeichen nicht umgekehrt.

$2x \cdot 3 > 2 \cdot (2 - x)$

$6x > 4 - 2x \quad | + 2x$ — Wenn $x < 2$ ist, führt das Lösen der Gleichung auf die weitere Bedingung $x > \frac{1}{2}$. Die erste Teillösung enthält alle Werte, die beide Bedingungen erfüllen.

$8x > 4$

$x > \frac{4}{8}$

$x > \frac{1}{2}$

$L_1 = \{x \mid \frac{1}{2} < x < 2\}$

Fall 2: Nenner negativ

$2 - x < 0 \Rightarrow 2 < x$ bzw. $x > 2$ — Der Nenner ist genau dann **negativ**, wenn $x > 2$ ist.

$\frac{2x}{2-x} > \frac{2}{3} \quad | \cdot (2-x) \cdot 3$ — Beim Multiplizieren mit einem negativen Term muss das Ungleichheitszeichen umgekehrt werden.

$2x \cdot 3 < 2 \cdot (2 - x)$

$6x < 4 - 2x \quad | + 2x$ — Wenn $x > 2$ ist, ergibt sich zusätzlich $x < \frac{1}{2}$.

$8x < 4$

$x < \frac{4}{8}$

$x < \frac{1}{2}$

$L_2 = \{\}$

Es gibt keine Zahl, die beide Bedingungen erfüllt.

$L = L_1 \cup L_2 = \{x \mid \frac{1}{2} < x < 2\} \cup \{\} = \{x \mid \frac{1}{2} < x < 2\}$

Die Lösungsmenge ist die Vereinigung der Lösungsmengen für den Fall 1 und den Fall 2.

3.225 Begründe, bei welchen der Ungleichungen beim Lösen eine Fallunterscheidung notwendig ist. **D**

1) $2x - 2 > 3$ **2)** $\frac{2}{x} - 2 > 3$ **3)** $\frac{x}{2} - 2 > 3$ **4)** $\frac{x}{-3} < 1$ **5)** $\frac{3}{x} < 1$

Aufgaben 3.226 – 3.230: Berechne die Lösungsmengen der gegebenen Bruchungleichungen und stelle sie grafisch dar.

3.226 **a)** $\frac{2}{x+1} < 3$ **b)** $\frac{1}{2a-6} \geq 4$ **c)** $\frac{2}{3z-1} > \frac{5}{2}$ **d)** $\frac{7}{3x} \geq \frac{4}{5}$ **B**

3.227 **a)** $\frac{a}{a-5} \geq 2$ **b)** $\frac{2x}{6x-3} > 5$ **c)** $\frac{7x}{2x+1} \leq \frac{3}{4}$ **d)** $\frac{4z}{5z+3} \geq \frac{1}{7}$ **B**

3.228 **a)** $\frac{4x+1}{3x} > 2$ **b)** $\frac{a-2}{2a-3} \geq 6$ **c)** $\frac{3a+3}{a-5} \leq -\frac{4}{3}$ **d)** $\frac{x-1}{x+1} < \frac{1}{3}$ **B**

3.229 **a)** $\frac{x^2}{x-1} > x$ **b)** $\frac{6b^2}{2b-4} < 3b$ **c)** $\frac{10x^2+3}{5x-6} < 2x + 1$ **d)** $\frac{z \cdot (3z+1)}{3z} \leq z - 4$ **B**

3.230 **a)** $\frac{2}{2a+1} < \frac{3}{a-2}$ **b)** $\frac{4}{5a-6} \geq \frac{3}{4a-3}$ **c)** $\frac{6}{x+1} > \frac{5}{2x}$ **d)** $\frac{3}{3x-2} \geq \frac{4}{5x}$ **B**

3.4 Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen

3.4.1 Betragsgleichungen

B **3.231** Überprüfe durch Einsetzen, für welche Werte der Grundmenge $G = \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$ die Gleichung $|3x| = 9$ richtig ist. Gib die Lösungsmenge an.

Der Betrag eines Terms wird, abhängig von seinem Wert, auf unterschiedliche Weise gebildet. ZB gilt für $|x - 2|$:
Ist $x - 2 \geqslant 0$ (also $x \geqslant 2$), dann wird der Betrag eines positiven Werts gebildet: $|x - 2| = x - 2$
Ist $x - 2 < 0$ (also $x < 2$), dann wird der Betrag eines negativen Werts gebildet: $|x - 2| = -(x - 2)$

Wir müssen daher bei Betragsgleichungen die beiden möglichen Fälle getrennt lösen. Die Lösungsmenge ist die Vereinigungsmenge der beiden Teillösungsmengen.

Eine Gleichung heißt **Betragsgleichung**, wenn die Gleichungsvariable mindestens einmal innerhalb von Betragsstrichen vorkommt. Beim Lösen ist eine Fallentscheidung notwendig

B **3.232** Ermittle die Lösungsmenge der Gleichung $|2x - 1| = 3$ für $G = \mathbb{R}$.

Lösung:
$D = \mathbb{R}$ ● Der Betrag kann von jeder reellen Zahl gebildet werden.
Um $|2x - 1|$ zu bilden, müssen die Fälle $2x - 1 \geqslant 0$ und $2x - 1 < 0$ unterschieden werden.

Fall 1:
$2x - 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant \frac{1}{2}$
daher: $|2x - 1| = 2x - 1$
$2x - 1 = 3 \quad | + 1$
$2x = 4 \quad | : 2$
$x = 2$, da $2 \geqslant \frac{1}{2} \Rightarrow L_1 = \{2\}$

Fall 2:
$2x - 1 < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$
daher: $|2x - 1| = -(2x - 1)$
$-(2x - 1) = 3$
$-2x + 1 = 3 \quad | - 1$
$-2x = 2 \quad | : (-2)$
$x = -1$, da $-1 < \frac{1}{2} \Rightarrow L_2 = \{-1\}$

Probe:
Fall 1: $x = 2$
LS: $|4 - 1| = 3$
RS: 3
Fall 2: $x = -1$
LS: $|-2 - 1| = 3$
RS: 3
$L = L_1 \cup L_2 = \{2\} \cup \{-1\} = \{-1, 2\}$

D **3.233** Welche Lösungsmenge ist richtig? Begründe deine Entscheidung.

a) $|x - 1| = 3$ **1)** $L = \{2, 4\}$ **2)** $L = \{-2, -4\}$ **3)** $L = \{-2, 4\}$ **4)** $L = \{2, -4\}$
b) $|2x + 3| = 5$ **1)** $L = \{1, 4\}$ **2)** $L = \{-1, -4\}$ **3)** $L = \{-1, 4\}$ **4)** $L = \{1, -4\}$

D **3.234** Begründe, warum folgende Betragsgleichung keine Lösung haben kann: $|3x + 4| = -6$

Aufgaben 3.235 – 3.237: Löse die Betragsgleichungen für $G = \mathbb{R}$:

B **3.235** **a)** $\left|\frac{x}{2} + 1\right| = \frac{3}{2}$ **b)** $\left|\frac{3x}{5} + 3\right| = \frac{5}{4}$ **c)** $\left|\frac{x+1}{2}\right| = 4$ **d)** $\left|\frac{2x-3}{5}\right| = \frac{4}{3}$

B **3.236** **a)** $|x + 2| = 3 - x$ **b)** $|x - 4| = 3x + 1$ **c)** $|3x - 1| = 2x - 3$ **d)** $|2x + 1| = 3 - 4x$

B **3.237** **a)** $2 \cdot |x - 1| = 6$ **b)** $3 \cdot |x + 3| = 6x$ **c)** $4 \cdot |2x + 2| = 2x$ **d)** $2 \cdot |3x - 1| = 4x - 1$

3.4.2 Betragsungleichungen

Eine Ungleichung heißt **Betragsungleichung**, wenn die Variable mindestens einmal innerhalb von Betragsstrichen vorkommt. Beim Lösen ist eine Fallunterscheidung notwendig.

3.238 Löse die Betragsungleichung $|3x-4| < 8$. Beschreibe deine Rechenschritte. BC

Lösung:

Um $|3x-4|$ zu bilden, müssen die Fälle $3x-4 \geqslant 0$ und $3x-4 < 0$ unterschieden werden.

Fall 1: $3x-4 \geqslant 0 \Rightarrow 3x \geqslant 4$ bzw. $x \geqslant \frac{4}{3}$ — $3x-4$ ist genau dann $\geqslant 0$, wenn $x \geqslant \frac{4}{3}$ ist.

$|3x-4| < 8 \Rightarrow 3x-4 < 8 \quad |+4$

$3x < 12 \quad |:3$

Ist $3x-4 \geqslant 0$, können die Betragsstriche weggelassen werden: $|3x-4| = 3x-4$

$x < 4$ — x muss kleiner als 4 sein.

$L_1 = \left\{x \mid \frac{4}{3} \leqslant x < 4\right\} = \left[\frac{4}{3}; 4\right[$ — Es sind also alle Zahlen, die größer oder gleich $\frac{4}{3}$ und kleiner als 4 sind, Lösungen.

Fall 2: $3x-4 < 0 \Rightarrow 3x < 4$ bzw. $x < \frac{4}{3}$ — $3x-4$ ist genau dann < 0, wenn $x < \frac{4}{3}$ ist.

$|3x-4| < 8 \Rightarrow -(3x-4) < 8$

$-3x+4 < 8 \quad |-4$

$-3x < 4 \quad |:(-3)$

Ist $3x-4 < 0$, muss beim Weglassen der Betragsstriche ein Minus vor den Term gesetzt werden: $|3x-4| = -(3x-4)$

$x > -\frac{4}{3}$ — x muss größer als $\left(-\frac{4}{3}\right)$ sein.

$L_2 = \left\{x \mid -\frac{4}{3} < x < \frac{4}{3}\right\} = \left]-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right[$ — Es sind also alle Zahlen, die größer als $\left(-\frac{4}{3}\right)$ und kleiner als $\frac{4}{3}$ sind, Lösungen.

$L = L_1 \cup L_2 = \left[\frac{4}{3}; 4\right[\cup \left]-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right[= \left]-\frac{4}{3}; 4\right[$ — Die Lösungsmenge der Ungleichung ist die Vereinigung der Teillösungsmengen für den Fall 1 und den Fall 2.

3.239 Welche Lösungsmenge ist richtig? Begründe deine Entscheidung. D

$|x-1| < 4$ **1)** $L = [-3; 5]$ **2)** $L =]-3; 5]$ **3)** $L = [-3; 5[$ **4)** $L =]-3; 5[$

3.240 Stelle die Menge $]-\infty; -3] \cup [3; \infty[$ als Ungleichung dar. A

Aufgaben 3.241 – 3.244: Berechne die Lösungsmengen der gegebenen Betragsungleichungen.

3.241 **a)** $|x+1| < 4$ **b)** $|z-3| \leqslant 6$ **c)** $|3x+1| > 5$ **d)** $|2a-2| < 7$ B

3.242 **a)** $|a-1| \geqslant \frac{1}{3}$ **b)** $\left|x-\frac{3}{4}\right| \leqslant 2$ **c)** $\left|4b+\frac{4}{3}\right| < 9$ **d)** $\left|2z+\frac{2}{3}\right| > \frac{5}{6}$ B

3.243 **a)** $|x| \geqslant 2$ **b)** $|a| < \frac{5}{3}$ **c)** $|4x| > 3$ **d)** $|3a| \leqslant \frac{8}{5}$ B

3.244 **a)** $\left|\frac{x-1}{2}+\frac{3}{2}\right| < 3$ **b)** $\left|\frac{3}{7}-\frac{4x-3}{2}\right| \leqslant 2$ **c)** $\left|\frac{a+2}{3}+\frac{5}{6}\right| > \frac{7}{3}$ **d)** $\left|\frac{7}{2}+\frac{x-1}{3}\right| \geqslant \frac{10}{3}$ B

Zusammenfassung

Eine **Gleichung** entsteht, wenn zwei Terme durch ein Gleichheitszeichen verbunden werden.

Zum Lösen einer Gleichung können folgende **Äquivalenzumformungen** verwendet werden:
1) Auf beiden Seiten der Gleichung den gleichen Term addieren bzw. subtrahieren
2) Beide Seiten der Gleichung mit dem gleichen von null verschiedenen Term multiplizieren bzw. durch diesen dividieren

Eine Gleichung der Form $a \cdot x + b = 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$) heißt **lineare Gleichung**, a und b sind Konstanten. Ist $a \neq 0$, so hat die lineare Gleichung eine eindeutige Lösung.

Kommt die Gleichungsvariable mindestens einmal im Nenner vor, so heißt die Gleichung **Bruchgleichung**. Es muss die Definitionsmenge bestimmt werden. Zur Berechnung der Lösungsmenge wird die Gleichung mit dem Hauptnenner multipliziert.

Eine **Gleichung mit Formvariablen** enthält mehrere Variablen. Beim Lösen kann eine Fallunterscheidung notwendig sein.

Formeln sind Gleichungen mit Formvariablen.

Eine Aussage heißt **Ungleichung**, wenn zwei Terme durch ein Ungleichheitszeichen miteinander verbunden sind.

Steht die Gleichungsvariable mindestens einmal innerhalb von Betragsstrichen, so heißt die Gleichung bzw. Ungleichung **Betragsgleichung** bzw. **Betragsungleichung**. Eine Fallunterscheidung ist notwendig. Die Lösungsmenge ist die Vereinigung der Teillösungsmengen.

Weitere Aufgaben

A **3.245** Für den Bau eines Regals können die Seitenteile und die Regalböden einzeln gekauft werden. Schreibe zu folgenden Gleichungen einen Text, wenn s die Anzahl der Seitenteile und b die Anzahl der Regalböden ist.
1) $b = 2s$ **2)** $b + s = 10$ **3)** $8b + 10s = 52$

AC **3.246** In einem Restaurant stehen Tische und Stühle. Die Anzahl der Stühle ist viermal so groß wie jene der Tische und es gibt um 30 Stühle mehr als Tische.
1) Für welche Größe steht x in der Gleichung $x - \frac{x}{4} = 30$?
2) Gib eine sinnvolle Grundmenge für die Gleichung an.

BD **3.247** Wende auf die Gleichung $2x - 5 = 7$ die gegebenen Umformungen an. Welche sind Äquivalenzumformungen? Begründe deine Antwort.
1) $:2$ **2)** $\cdot 3$ **3)** $\cdot 0$ **4)** $:x$ **5)** $(\ )^2$

Aufgaben 3.248 – 3.251: Löse die Gleichungen für $G = \mathbb{R}$. Gib jeweils die Definitionsmenge an.

B **3.248** **a)** $3f - [(5f + 2) - 5] = 4$ **b)** $2y - 3 - [3y - (4 - 5y)] = 7$ **c)** $7r - [-3r - (7r - 4)] + 3 = -r$

B **3.249** **a)** $\frac{x}{5} = 7$ **b)** $\frac{5m}{6} = 3$ **c)** $\frac{5a}{3} = -\frac{1}{8}$

B **3.250** **a)** $\frac{2}{a} = 16$ **b)** $\frac{5}{2x} = 6$ **c)** $\frac{8}{7b} = \frac{4}{3}$

B **3.251** **a)** $2 \cdot (3c + 4) - 2 \cdot (5c + 2) = 3 \cdot (2c + 2) + 4 \cdot (4c - 1)$
b) $4 \cdot (2y - 6) - 9 \cdot (y + 3) = 7 \cdot (3y - 2) - 9 \cdot (y + 3)$

Aufgaben 3.252 – 3.255: Löse die Gleichungen für G = ℝ. Gib jeweils die Definitionsmenge an.

3.252 **a)** $(2b-1)^2 + (3b-2)^2 = (4b+1)^2 - (b+2)\cdot(3b-7)$ B
b) $(4x+3)^2 - (x-3)\cdot(5x+2) = (6x-4)^2 - (5x+1)^2$

3.253 **a)** $\frac{a-1}{4} + \frac{a+1}{1} - \frac{a-5}{3} = 1$ **b)** $\frac{3b-1}{3} + \frac{4b-1}{5} - \frac{2b+3}{6} = 1$ **c)** $\frac{x-2}{5} - \frac{2x+1}{15} - \frac{x-4}{10} = \frac{3}{20}$ B

3.254 **a)** $\frac{4x+1}{2x-3} = \frac{8x-1}{4x-5}$ **b)** $\frac{6r+3}{3r-2} = \frac{10r-1}{5r-3}$ **c)** $\frac{5a-3}{2a-4} = \frac{10a+2}{4a-5}$ B

3.255 **a)** $\frac{3x}{x^3-x} = \frac{1+x}{x^3+x^2} + \frac{2}{x^2-x}$ **b)** $\frac{3}{g-2} = \frac{5}{g+2} - \frac{2g}{g^2-4}$ **c)** $-\frac{2x+7}{x+1} = \frac{4x}{3x+3} - \frac{3}{4x+4}$ B

Aufgaben 3.256 – 3.257: Löse die Gleichungen für G = ℝ nach x. Falls erforderlich, führe eine Fallunterscheidung durch.

3.256 **a)** $x + b = a$ **b)** $x + 3b = 7a - b$ **c)** $5a - x = 3x + 5b$ **d)** $6a - 3x = 7b + 5x$ B

3.257 **a)** $(3a-x)\cdot(5b+2x) = 2\cdot(ab-x^2)$ **b)** $(2b-4x)^2 = 8\cdot(a+2x^2) + 4ax$ B

Textgleichungen

3.258 Ein 2 m langes Rohr soll in drei Stücke zersägt werden. Das erste Stück soll um 30 cm kürzer sein als die Hälfte des zweiten, das dritte Stück soll $\frac{1}{5}$ der Länge des zweiten haben. Wie lang sind die drei Stücke? AB

3.259 Wie viel Kilogramm Messing mit 30 % Zinkanteil müssen mit 120 kg Messing mit 70 % Zinkanteil verschmolzen werden, um Messing mit 60 % Zinkanteil zu erhalten? AB

3.260 Welchen Zinngehalt hat Bronze, die durch Mischen von 60 kg Zinnbronze CuSn8 mit 8 % Zinnanteil und 90 kg Zinnbronze CuSn2 mit 2 % Zinnanteil hergestellt wird? ABC
Erhält man denselben Zinngehalt, wenn man 90 kg CuSn8 und 135 kg CuSn2 mischt? Halte deine Überlegungen schriftlich fest.

3.261 Die Renovierung eines Bürogebäudes kostet 220 000,00 €. Die Kosten werden auf die drei teilhabenden Firmen wie folgt aufgeteilt: Die zweite Firma bezahlt $\frac{1}{3}$ des Betrags der ersten. Die dritte Firma bezahlt um 40 000,00 € weniger als die zweite und die erste zusammen. ABD
1) Wie viel bezahlt jede einzelne Firma?
2) Ein Geschoß des Bürogebäudes wird um 2 200,00 € pro Monat vermietet. Davon erhält die zweite Firma $\frac{1}{3}$ des Betrags der ersten und die dritte Firma erhält um 400,00 € weniger als die zweite und die erste zusammen. Begründe, ob diese Aufteilung gerecht ist.

3.262 Ein LKW liefert Holzpellets an drei Kunden und hat 9 000 kg geladen. Wie viel Kilogramm bekommt jeder der drei Kunden, wenn der zweite doppelt so viel erhält wie der erste, der dritte $\frac{2}{5}$ weniger als der zweite und wenn am Ende noch 600 kg im LKW sind? AB

3.263 Für Zweitaktmotoren wird ein Benzin-Öl-Gemisch verwendet. Berechne, wie viel Liter Benzin und wie viel Liter Öl in einem Liter Gemisch enthalten sind, wenn der Preis für Benzin 1,45 € je Liter, für Öl 12,00 € je Liter und für das Gemisch 1,85 € je Liter beträgt. Runde das Ergebnis auf zwei Dezimalstellen. AB

3.264 Eine Arbeiterin kann den Sanitärbereich eines Neubaus in 8 Tagen verfliesen. Nach zwei Tagen wird ein weiterer Arbeiter eingesetzt und die Arbeit ist in insgesamt 5 Tagen abgeschlossen. Wie lang hätte der zweite Arbeiter gebraucht, wenn er die Arbeit allein ausgeführt hätte? AB

ABC **3.265** Eine Firma produziert in 10 Tagen eine bestimmte Menge eines Produkts. Eine zweite Firma benötigt für die gleiche Menge 15 Tage.

a) Beschreibe, welchen Sachverhalt die Gleichung $\frac{M}{10\,d} \cdot t + \frac{M}{15\,d} \cdot t = M$ angibt.

b) Wie lang dauert die Produktion dieser Menge, wenn die zweite Firma erst mit der Produktion beginnt, nachdem die erste Firma bereits drei Tage produziert hat?

c) Die produzierte Menge kann innerhalb von 8 Tagen verkauft werden. Nach wie vielen Tagen ist wieder die gesamte Menge auf Vorrat vorhanden, wenn beide Firmen gleichzeitig produzieren und weiterhin konstant die gleiche Menge verkauft wird, wie in diesen 8 Tagen?

AB **3.266** In einen Trinkwassertank fließen durch einen Zufluss pro Minute 12 Liter Wasser, durch einen weiteren Zufluss pro Stunde 540 Liter. Ist der Tank zu einem Viertel gefüllt, so kann er, wenn beide Zuflüsse gleichzeitig geöffnet sind, in 40 Minuten ganz gefüllt werden. Wie lang dauert das Befüllen des leeren Tanks, wenn der zweite Zufluss erst 20 Minuten nach dem ersten geöffnet wird?

AB **3.267** Es werden 120 ℓ Kalkfarbe benötigt, denen 0,3 % Abtönfarbe beigemengt sind. Von einem Anstrich, bei dem die gleiche Abtönfarbe verwendet wurde, sind noch 45 ℓ Kalkfarbe, allerdings mit 0,5 % Abtönfarbgehalt, übrig. Berechne, wie viel Liter reine Kalkfarbe und wie viel Liter Abtönfarbe zugemischt werden müssen.

Formelumformungen

Aufgaben 3.268 – 3.269: Forme die Formeln so um, dass die gesuchte Variable ausgedrückt wird.

B **3.268** **a)** $C_t^2 = \frac{E}{2\rho_0 \cdot (1 + \mu)}$ $\rho_0 = ?$ **b)** $\tau = \frac{3}{2} \cdot \frac{h^2 - 4z^2}{bh^3} \cdot Q$ $Q = ?$

B **3.269** **a)** $\tau_{max} = \frac{4}{3A} \cdot \left(Q + \frac{3M_t}{d}\right)$ $M_t = ?$ **b)** $R = R_0 \cdot [1 + \alpha \cdot (\vartheta - \vartheta_0)]$ $\alpha = ?$

BC **3.270** Für den Flächeninhalt eines Kreissektors gilt: $A = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360°}$
Dabei ist r der Radius des Kreises und α der Mittelpunktswinkel.

1) Welchen Flächeninhalt erhält man, wenn α 180° bzw. 360° beträgt?

2) Berechne α, wenn $A = \frac{\pi}{4}\,cm^2$ und r = 1 cm ist. Forme zuerst allgemein um.

Ungleichungen sowie Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen

B **3.271** Führe die angegebene Äquivalenzumformung durch.

a) $1 < 5 \;|\cdot 2$ **b)** $2{,}2 > 1{,}1 \;|\cdot(-2)$ **c)** $2 < 4 \;|:(-2)$ **d)** $-4 > -4{,}5 \;|\cdot 2$

B **3.272** Löse die Betragsgleichung für G = ℝ.

a) $\left|\frac{x}{3} + 2\right| = \frac{5}{6}$ **b)** $\left|\frac{4x}{7} + 2\right| = \frac{4}{3}$ **c)** $3 \cdot |x - 1| = 2x + 1$ **d)** $5 \cdot |3x - 1| = 4x$

A **3.273** Welche der angegebenen Ungleichungen hat die Lösungsmenge L =]–∞; –1[∪]1; ∞[?

1) $|x| < 1$ **2)** $|x| > 1$ **3)** $|x| \leq 1$ **4)** $|x| \geq 1$

Aufgaben 3.274 – 3.277: Berechne die Lösungsmenge der gegebenen Ungleichungen und stelle sie grafisch dar. Dokumentiere deine Vorgehensweise.

BC **3.274** **a)** $(a + 4) \cdot (a + 5) < (a - 3) \cdot (a + 12)$ **b)** $(t - 8) \cdot (t + 10) > (t - 4) \cdot (t - 2)$

BC **3.275** **a)** $\frac{4s + 1}{2} + 3 < \frac{s - 1}{3}$ **b)** $6 > \frac{3r - 1}{5} - 2$ **c)** $\frac{6a - 3}{3} \leq \frac{a + 5}{4} - 1$ **d)** $\frac{z + 1}{5} + \frac{z}{2} < \frac{z - 1}{4}$

BC **3.276** **a)** $\frac{1}{y + 3} < 4$ **b)** $\frac{10}{3b - 4} \geq 5$ **c)** $\frac{5s}{3s - 2} \leq \frac{3}{5}$ **d)** $\frac{2c}{c + 4} \geq \frac{2}{5}$

BC **3.277** **a)** $|u - 1| < 5$ **b)** $|r + 3| \geq \frac{2}{5}$ **c)** $|s + 2| \leq 5$ **d)** $|5x - 3| > 2$

Wissens-Check

		gelöst
1	Ich kenne verschiedene Äquivalenzumformungen für Gleichungen. Ich kann Beispiele zu Äquivalenzumformungen angeben und solche, die keine sind.	
2	Führt eine Gleichung für jedes beliebige x auf eine wahre Aussage, so ist die Lösungsmenge … . ZB: $2x + 3 = 2x + \dots$	
3	Beschreibe mit eigenen Worten: Grundmenge, Definitionsmenge, Lösungsmenge	
4	Wird eine Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert, so … ZB: $-3x < 9 \Rightarrow x \dots 3$	
5	Bei welchen der folgenden Ungleichungen muss eine Fallunterscheidung getroffen werden? Begründe warum. A) $3x - 2 < 4 - x$ B) $\frac{4}{x-3} > 7$ C) $\frac{3x}{5} - 1 \leq \frac{x}{4}$ D) $\lvert 2x + 5 \rvert > 1$	
6	Welche der folgenden Aussagen sind richtig? A) Eine lineare Gleichung kann keine, eine oder zwei Lösungen haben. B) Bei der Bestimmung der Definitionsmenge werden jene Zahlen ermittelt, für die die Nenner der Bruchterme null werden würden. C) Beim Multiplizieren einer Ungleichung mit einer negativen Zahl kehrt sich das Ungleichheitszeichen um. D) Führt eine Gleichung auf eine falsche Aussage, so gilt: L = D	
7	Welche Äquivalenzumformungen wurden beim Lösen nebenstehender Gleichung durchgeführt? $\frac{x}{3} + 1 = \frac{3x}{4} - 4 \quad \vert$ $4x + 12 = 9x - 48 \quad \vert$ $60 = 5x \quad \vert$ $x = 12$	
8	Gegeben ist die Formel $s = v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$. Gib an, welcher Zusammenhang durch die Formel beschrieben wird. Beschreibe die vorkommenden Größen und forme nach v_0 um.	
9	Gib an, welche Schritte für das Lösen der gegebenen Bruchgleichung notwendig sind: $\frac{7}{2x-4} = \frac{5}{x} - \frac{3}{4}$	

Lösung:
1) siehe Seite 100 2) die Definitionsmenge, L = D, $2x + 3 = 2x + 3$ 3) siehe Seite 98 und 99
4) … muss das Ungleichheitszeichen umgekehrt werden. $x > -3$ 5) B) da mit dem Nenner multipliziert wird und dieser positive und negative Werte annehmen kann; D) aufgrund der Definition des Betrags
6) B), C) 7) $\cdot 12$, $-4x + 48$, $: 5$
8) Weg bei gleichmäßig beschleunigter Bewegung, s … Weg, v_0 … Anfangsgeschwindigkeit, a … Beschleunigung, t … Zeit, $v_0 = \frac{2s - a \cdot t^2}{2 \cdot t}$
9) siehe Seite 112

4 Geometrie der Ebene

Geometrie (altgriechisch: „geo“ = Erde, „metron“ = Maß) begegnet uns in vielen Bereichen des täglichen Lebens. Schon vor Jahrtausenden wurde Geometrie dazu verwendet, Landvermessungen und astronomische Berechnungen durchzuführen. Viele geometrische Zusammenhänge waren bereits vor 4 000 Jahren bekannt. Doch erst Euklid erfasste systematisch die geometrischen Begriffe und Formeln in seinem 13 Bände umfassenden Werk „Die Elemente“.

Heute sind die Erkenntnisse der Geometrie unter anderem eine wichtige Grundlage für die Darstellung dreidimensionaler Objekte bei Computersimulationen.

Tempera von Sigrun Egger

4.1 Einführung

Optische Täuschungen entstehen zum Beispiel durch das geschickte Anordnen verschiedener geometrischer Elemente. Betrachtet man die nebenstehenden Figuren, so erscheinen die Strecken in Figur A und in Figur B jeweils ungleich lang. Die Geraden in Figur C und in Figur D wirken so, als wären sie nicht parallel. Diese Zeichnungen sind typische Beispiele für optische Täuschungen. Dabei wird die Wahrnehmung der Länge einer Strecke durch deren Abschluss oder Lage verändert (A und B). Die Wahrnehmung der Parallelität wird durch andere Geraden gestört (C und D).

Figur A

Figur B

Figur C

Figur D

CD **4.1** ***1)*** Nenne einige geometrische Grundelemente, die du aus der Unterstufe kennst.
2) Wie wird das dargestellte Gebilde bezeichnet? Beschreibe es mit eigenen Worten.

a) ***b)*** ***c)*** ***d)*** ***e)*** ***f)*** ***g)***

Die drei **Grundelemente der Geometrie** sind **Punkt**, **Gerade** und **Ebene**. Sie können nur über die Anschauung „definiert“ werden.

Die nebenstehenden Sätze sind die Übersetzung der Beschreibung, die Euklid im ersten Buch der „Elemente“ anführte.

I. Ein **Punkt** ist, was keine Teile hat,
II. Eine **Linie** breitenlose Länge.
III. Die Enden einer Linie sind Punkte.
IV. Eine **gerade Linie (Strecke)** ist eine solche, die zu den Punkten auf ihr gleichmäßig liegt.
V. Eine **Fläche** ist, was nur Länge und Breite hat.

Auszug aus den Elementen von Euklid

Wir betrachten nun die Beziehungen der Grundelemente in der Ebene zueinander.

Ein **Strahl** (Halbgerade) ist ein Teil einer Geraden, der auf einer Seite begrenzt ist. Dieser Begrenzungspunkt wird als Anfangspunkt (oder Endpunkt) bezeichnet.

Eine **Strecke** ist ein durch zwei Punkte begrenzter Teil einer Geraden, der so genannten **Trägergeraden**. Sie hat zwei Endpunkte. Die Strecke zwischen den Punkten A und B wird mit AB bezeichnet, für deren Länge schreibt man $\overline{AB}$.

Ein Punkt kann zu einer Geraden g zwei Lagen haben:

Der Punkt P liegt auf g, Schreibweise: $P \in g$
Der Punkt Q liegt nicht auf g, Schreibweise: $P \notin g$

Zwei Geraden g und h heißen zueinander **parallel**, wenn sie entweder **keinen Punkt gemeinsam** haben – Schreibweise: $g \parallel h$ – oder **ident** sind, also alle Punkte gemeinsam haben.

Sind sie **nicht parallel**, so haben sie einen **Schnittpunkt** S, Schreibweise: $S = g \cap h$

Fläche und Flächeninhalt

Als Fläche wird eine begrenzte ebene Figur oder die Begrenzung eines Körpers (Oberfläche) bezeichnet. Der Flächeninhalt gibt die Größe einer Fläche an. Korrekterweise müsste zwischen diesen beiden Begriffen immer unterschieden werden. In der Praxis wird oft darauf verzichtet, zum Beispiel verwendet man Oberfläche statt Oberflächeninhalt.

Winkel

Zwei Strahlen a und b, die von einem gemeinsamen Punkt S ausgehen, bilden einen **Winkel**. Der Punkt S heißt **Scheitel**, die beiden Strahlen heißen **Schenkel**.

Bezeichnungen für Winkel:

- α, β, γ ... griechische Kleinbuchstaben
- $\sphericalangle ab$ (a, b ... Schenkel des Winkels)
- $\sphericalangle ASB$ oder $\sphericalangle BSA$ (der mittlere Buchstabe ist der Scheitel des Winkels)

Ein Winkel kann auch als Drehung einer Halbgeraden um den Punkt S gesehen werden. Erfolgt diese Drehung gegen den Uhrzeigersinn, also mathematisch positiv, so ist der Winkel positiv, sonst negativ. Der Winkel erhält dadurch eine Orientierung.

Durch eine Vierteldrehung entsteht ein **rechter Winkel**, eine ganze Drehung erzeugt einen **vollen Winkel**.

Geometrie der Ebene

Winkelmessung

Für die Angabe der Größe eines Winkels wird oft das **Gradmaß** verwendet. Dabei geht man von einem rechten Winkel aus und teilt diesen in 90 gleiche Teile, ein voller Winkel wird also in 360 gleiche Teile geteilt. Diese Einteilung geht auf das Sexagesimalsystem der Babylonier zurück, dessen Basis die Zahl 60 ist. Die Unterteilung eines Grads erfolgt in Minuten und Sekunden, wobei 1° in 60 Minuten (′) und 1 Minute in 60 Sekunden (″) geteilt wird, oder dezimal.

Eine Einheit der Winkelmessung heißt Grad (°), $1° = \frac{1}{90}$ des rechten Winkels. $1° = 60'$, $1' = 60''$

Im Vermessungswesen wird als Winkelmaß vorwiegend das **Gon** (früher Neugrad) verwendet. Dabei wird der rechte Winkel in 100 gleiche Teile geteilt. Die Einheit ist 1 Gon (1^g).

Die abgeleitete SI-Einheit für die Winkelmessung ist das **Bogenmaß**, das im Abschnitt 4.5.3 näher behandelt wird.

B 4.2 Wandle um. **1)** 56° 23′ 42″ in Grad **2)** 35,521° in Grad, Minuten und Sekunden

Lösung:

1) $56° 23' 42'' = \left(56 + \frac{23}{60} + \frac{42}{3\,600}\right)^{\circ} \approx 56{,}395°$

2) $35{,}521° = 35° + (0{,}521 \cdot 60)' = 35° 31{,}26' = 35° 31' + (0{,}26 \cdot 60)'' \approx 35° 31' 16''$

B 4.3 Wandle um. **1)** 36° in Gon **2)** 30^g in Grad

Lösung:

1) $90° \;\ldots\ldots\; 100^g$

$1° \;\ldots\ldots\; \frac{100^g}{90}$

$36° \;\ldots\ldots\; \frac{100^g}{90} \cdot 36° = 40^g$

2) $100^g \;\ldots\ldots\; 90°$

$1^g \;\ldots\ldots\; \frac{90°}{100}$

$30^g \;\ldots\ldots\; \frac{90°}{100} \cdot 30 = 27°$

Winkelpaare

Zwei Winkel heißen **komplementär**, wenn sie einander auf **90°** ergänzen. Sie heißen **supplementär**, wenn sie sich auf **180°** ergänzen.

α und β heißen **Nebenwinkel**, sie sind supplementär.

α und α′ heißen **Scheitelwinkel**, sie sind gleich groß.

α_1, α_2, β_1 und β_2 heißen **Parallelwinkel** von α, sie sind gleich groß oder supplementär.

Merke: „Z-Regel" – Die Winkel im Z sind gleich groß.

α und α′ heißen **Normalwinkel**, sie sind gleich groß oder supplementär.

Winkelarten

Spitzer Winkel $0° < \alpha < 90°$	Rechter Winkel $\alpha = 90°$ a und b stehen normal aufeinander, $a \perp b$	Stumpfer Winkel $90° < \alpha < 180°$
Gestreckter Winkel $\alpha = 180°$	Erhabener Winkel $180° < \alpha < 360°$	Voller Winkel $\alpha = 360°$

4.4 ε und φ sind Scheitelwinkel. Welcher Zusammenhang besteht zwischen ihnen? Gib eine Formel zur Berechnung von φ mithilfe von ε an. A

4.5 Wandle in Grad um. B

a) 25° 50′ **b)** 67° 45′ 24″ **c)** 123° 34′ **d)** 136° 06′ 23″ **e)** 220° 30′ 22″

4.6 Wandle in Grad, Minuten und Sekunden um. B

a) 43,65° **b)** 20,2° **c)** 78,364° **d)** 124,5° **e)** 245,562°

4.7 Wandle in Grad bzw. Gon um. B

a) 1^g **c)** 100° **e)** 102^g **g)** 400^g **i)** 134,41°
b) 20° **d)** 90^g **f)** 275° **h)** 360^g **j)** $311{,}067^g$

4.8 Gib die Art und die Größe des Winkels an, den die gegebene Himmelsrichtung mit der Nord-Richtung einschließt. AC

a) NO **b)** SSO **c)** NW **d)** WSW **e)** S

4.9 Bestimme jeweils den komplementären und den supplementären Winkel. B

1) 12° **2)** 24,5° **3)** 52,1° **4)** 38° **5)** 77°

4.10 Bestimme die Größe der nicht gegebenen Winkel. Welche Zusammenhänge hast du benutzt? BCD

a) **b)** **c)** **d)** **e)** **f)**

Aufgaben 4.11 – 4.13: Begründe jeweils deine Antwort.

4.11 Zeichne einen beliebigen Winkel und den zugehörigen Supplementärwinkel. Gibt es noch weitere Supplementärwinkel? BD

4.12 Wie viele Nebenwinkel existieren zu einem beliebigen Winkel? D

4.13 Was ist der Scheitelwinkel eines Scheitelwinkels? D

4.1.2 Kongruenz und Ähnlichkeit

CD **4.14** Vergleiche jeweils die beiden Figuren.

A) ***B)*** ***C)*** ***D)*** ***E)***

1) Welche der Figuren haben die gleiche Form und Größe, welche nur die gleiche Form?
2) Beschreibe, durch welchen Vorgang die rechte Figur aus der linken entstanden ist.

Zwei Figuren sind **kongruent** (deckungsgleich), wenn sie in Größe und Gestalt übereinstimmen, entsprechende Längen und Winkel sind dann gleich groß.

Kongruente Figuren entstehen durch **Drehung**, durch **Schiebung** oder durch **Spiegelung** an einem Punkt oder einer Geraden. Eine Drehung ist durch den Drehpunkt und den orientierten Drehwinkel festgelegt. Bei einer Schiebung (vergleiche Figur ***E)***) sind die Länge und die Richtung (Schiebvektor) vorgegeben. Für die Spiegelung an einem Punkt genügt die Angabe des Spiegelzentrums Z.

Bei Spiegelung an einer Geraden (Spiegelachse) entsteht eine symmetrische Figur, die Spiegelachse a heißt dann auch **Symmetrieachse**.

Drehung um einen Punkt

Punktspiegelung

Spiegelung an einer Geraden

Zwei Figuren heißen **ähnlich**, wenn entsprechende Winkel gleich groß sind und einander entsprechende Strecken im gleichen Verhältnis zueinander stehen.

Wichtige Konstruktionen

Die **Streckensymmetrale** der Strecke AB ist jene Gerade, die durch den Mittelpunkt der Strecke AB geht und auf diese normal steht. Jeder Punkt der Streckensymmetrale ist von A und B gleich weit entfernt.

Die **Winkelsymmetrale** des Winkels ∢ab ist jene Gerade, die durch den Scheitel des Winkels geht und diesen halbiert. Jeder Punkt der Winkelsymmetrale hat von beiden Schenkeln denselben Normalabstand.

Streckensymmetrale

Winkelsymmetrale mit Zirkel konstruiert

Winkelsymmetrale ohne Zirkel konstruiert

Der Maßstab

4.15 Wie weit sind Bregenz und Steyr voneinander entfernt? Miss die Entfernung zwischen den beiden Städten in der Karte. Welche Information verwendest du beim Umrechnen auf die tatsächliche Distanz? **BD**

Maßstab 1 : 8 000 000

Der **Maßstab** einer Landkarte ermöglicht das Umrechnen auf die tatsächliche Entfernung. Aber nicht nur Landkarten, sondern auch Stadtpläne, Baupläne oder Konstruktionszeichnungen basieren meist auf verkleinernden Maßstäben. Umgekehrt werden kleine Gegenstände, wie zum Beispiel Leiterplatten, in einem vergrößernden Maßstab dargestellt. Man spricht dabei von verkleinerten oder vergrößerten **Modellen**. Verkleinernde Maßstäbe werden meist in der Form 1 : a, vergrößernde Maßstäbe in der Form a : 1 angegeben.

Der **Maßstab** gibt an, wie sich eine Länge in einem Modell (Plan) zur zugehörigen Länge in der Wirklichkeit verhält.

4.16 In einer Landkarte misst man die Entfernung zwischen München und Innsbruck mit 13 cm. Die Länge der Luftlinie zwischen den beiden Städten beträgt 97,5 km. Welchen Maßstab hat die Karte? **B**

Lösung:

13 cm : 97,5 km = 13 cm : 9 750 000 cm =   • Umrechnen auf gleiche Einheiten
= 1 cm : 750 000 cm = 1 : 750 000   • Umformen auf die Form 1 : a

4.17 Der Maßstab eines Bauplans ist 1 : 50, die Länge des Wohnzimmers beträgt im Plan 9,3 cm. Wie lang muss eine Vorhangleiste sein, wenn sie über die ganze Länge verlaufen soll? **B**

Lösung:
1 : 50 = (9,3 cm · 1) : (9,3 cm · 50) = 9,3 cm : 465 cm
Die Vorhangleiste muss 465 cm = 4,65 m lang sein.

4.18 Zeichne alle Symmetrieachsen der dargestellten Figur ein. **AB**

a) ***b)*** ***c)*** ***d)***

4.19 Zwischen Passau und Schlögen liegen 36 km Luftlinie. Die im Schulatlas gemessene Distanz beträgt 6 cm. Welchen Maßstab hat die Karte? **B**

4.20 Modelleisenbahnen werden nur in bestimmten Maßstäben erzeugt. Die Diesellokomotive Reihe 2016 ist 19,20 m lang. Wie lang ist ein Modell im gegebenen Maßstab? Recherchiere die spezielle Bezeichnung für diesen Maßstab. **BC**

a) 1 : 22,5 ***b)*** 1 : 43,5 ***c)*** 1 : 87 ***d)*** 1 : 160

AB **4.21** Ein Atom hat einen Radius von $2 \cdot 10^{-10}$ m, der Atomkern einen Radius von $1{,}3 \cdot 10^{-15}$ m.
a) Welchen Radius hat das Atom in einem Modell, in dem der Kern die Größe eines Tennisballs (Ballradius = 3,25 cm) hat?
b) Welchen Radius hat der Kern in einem Modell, in dem das Atom die Größe der Erdkugel (mittlerer Erddurchmesser = 12 740 km) hat?

BC **4.22** Ordne nach dem Vergrößerungsfaktor. Welche Maßstäbe vergrößern, welche verkleinern?
A) 5 : 100 ***B)*** 2 : 1 ***C)*** 1 : 28 ***D)*** 1 : 100 ***E)*** 3 : 1 ***F)*** 1 : 50

BC **4.23** Verkleinert man unser Sonnensystem maßstabsgetreu und platziert ein Modell der Sonne in Wien, so wäre die Erde in Graz und der Saturn in Helsinki. Recherchiere die Entfernungen der Planeten zur Sonne und gib mithilfe eines Atlanten Orte an, in denen Merkur, Jupiter und Neptun platziert werden könnten. Erkläre deine Vorgehensweise.

BD **4.24** Zeichne drei Geraden a, b und c, die ein Dreieck bilden. Konstruiere die Winkelsymmetrale von ∢ab und ∢bc. Welche Eigenschaft hat deren Schnittpunkt? Konstruiere auch die Winkelsymmetrale von ∢ac. Was fällt dir auf?

4.1.3 Koordinatensystem

Viele Stadtpläne sind mit einem Raster unterlegt, damit es leichter ist, einen gesuchten Ort zu finden. Um die Lage von Punkten und Figuren in der Zeichenebene festzulegen, wird so ein „Raster" in Form eines **rechtwinkligen Koordinatensystems** verwendet. Es entsteht durch zwei aufeinander normal stehende Zahlengeraden mit einem gemeinsamen Nullpunkt. Diese Zahlengeraden heißen Koordinatenachsen, deren Schnittpunkt heißt **Koordinatenursprung**. Die üblicherweise waagrechte Achse wird als **x-Achse** oder **Abszissenachse**, die senkrechte Achse als **y-Achse** oder **Ordinatenachse** bezeichnet. Die positiven Zahlen werden vom Ursprung ausgehend üblicherweise nach rechts bzw. oben aufgetragen. Ein Punkt ist dann durch das Zahlenpaar (x|y), die Koordinaten des Punkts, festgelegt. Der Wert x gibt die **x-Koordinate (Abszisse)** und y die **y-Koordinate (Ordinate)** des Punkts an.

x_p ... Abstand des Punkts P von der y-Achse
y_p ... Abstand des Punkts P von der x-Achse

O(0|0) ... Ursprung (latein: „originalis" = ursprünglich)

Die Achsen teilen die Ebene in vier Teilflächen, die Quadranten heißen und gegen den Uhrzeigersinn nummeriert werden.

Sind die Einheitsstrecken auf den Achsen gleich groß, so spricht man von einem **kartesischen Koordinatensystem**. Es wurde von René Descartes (lat. Cartesius, 1596 – 1659) eingeführt.

BC **4.25** In welchem Quadranten liegen die gegebenen Punkte? Überprüfe durch eine Zeichnung.
A(0|−3), B(−2|1), C(2,5|1,5), D(1,5|−2,5), E(0,5|3)

BC **4.26** ***a)*** Welche Orte liegen nahe bei folgenden Koordinaten?
A(−1|1), B(3|−2), C(0|−3), D(3|0,5)
b) Gib die Koordinaten von Lienz und von Matrei, vom Großglockner und vom Großvenediger an.

4.2 Dreiecke

4.2.1 Allgemeines Dreieck

Die Zerlegung der Erdoberfläche in Dreiecke (Triangulation) wird im Vermessungswesen zur Erstellung von Karten verwendet. Bei der Darstellung krummer Flächen in 3D-Grafiken werden diese ebenfalls in Dreiecke zerlegt.

Für ein Dreieck verwendet man üblicherweise folgende Bezeichnungen:

A, B, C ... Eckpunkte; die Bezeichnung erfolgt gegen den Uhrzeigersinn (mathematisch positiv orientiert)

a, b, c ... Seitenlängen (Seiten), wobei die Seite a dem Eckpunkt A gegenüberliegt usw.

α, β, γ ... Innenwinkel (zB $\alpha = \sphericalangle bc$ beim Eckpunkt A)

4.27 Zeichne ein beliebiges Dreieck und zeichne eine Parallele zu c durch den Eckpunkt C. BCD

1) Welcher Winkel des Dreiecks hat die gleiche Größe wie α_1 bzw. β_1? Begründe deine Antwort.

2) Wie groß ist die Summe der Winkel α_1, β_1 und γ?

3) Was kannst du nun über die Summe $\alpha + \beta + \gamma$ sagen?

Werden die Innenwinkel eines Dreiecks addiert, so erhält man als Summe 180°. Dies kann mithilfe von Parallelwinkeln gezeigt werden (siehe Aufgabe 4.27). Daher ist durch die Angabe der Größe zweier Winkel eines Dreiecks der dritte Winkel festgelegt. Für die Seiten eines Dreiecks muss gelten, dass die Summe zweier beliebiger Seitenlängen größer als die dritte Seitenlänge ist, da sich sonst kein Dreieck ergibt.

Die **Winkelsumme** (Summe der Innenwinkel) in jedem Dreieck ist 180°.
Es gilt: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$
Für die Seiten eines Dreiecks gilt die **Dreiecksungleichung**:
$a + b > c$, $b + c > a$, $a + c > b$

Einteilung von Dreiecken

Die Einteilung der Dreiecke erfolgt nach den Eigenschaften der Seiten oder der Innenwinkel.

ungleichseitiges Dreieck	gleichschenkliges Dreieck	gleichseitiges Dreieck
	$a = b$ $\alpha = \beta$	$a = b = c$ $\alpha = \beta = \gamma = 60°$
$\alpha < 90°$ $\beta < 90°$ $\gamma < 90°$	$\gamma = 90°$	$90° < \alpha < 180°$
spitzwinkliges Dreieck	rechtwinkliges Dreieck	stumpfwinkliges Dreieck

Geometrie der Ebene

Kongruenzsätze – Konstruktion von Dreiecken

Sind drei Seitenlängen eines Dreiecks gegeben und gilt die Dreiecksungleichung, so kann das Dreieck konstruiert werden. Ein Konstruktionsweg ist in Abb. 4.1 dargestellt. Wählt man andere Konstruktionswege, so entstehen kongruente Dreiecke. Sind dagegen nur die Winkel bekannt, so können die Seitenlängen beliebig gewählt werden, es entstehen ähnliche Dreiecke (Abb. 4.2).

Abb. 4.1

Abb. 4.2

Die Kongruenzsätze geben an, welche Bestimmungsstücke eines Dreiecks gegeben sein müssen, um es eindeutig festzulegen.

Zwei Dreiecke sind **kongruent** (≅), wenn sie in

(SSS)	drei Seiten oder
(SWS)	zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel oder
(SSW)	zwei Seiten und dem der längeren Seite gegenüberliegenden Winkel oder
(WSW oder SWW)	einer Seite und zwei Winkeln übereinstimmen.

Diese Sätze könnten zum Beispiel auch so formuliert sein, (SSS): Ein Dreieck ist eindeutig konstruierbar, wenn drei Seiten gegeben sind. „Übersetze" die anderen Sätze selbst.

Beachte:

- Konstruiert man ein Dreieck wie in Abb. 4.1 angegeben, so können zwei kongruente Dreiecke konstruiert werden, von denen jedoch eines im und eines gegen den Uhrzeigersinn beschriftet ist.
- Sind zwei Seitenlängen und der der **kürzeren** Seite gegenüberliegende Winkel gegeben, ist die Konstruktion nicht eindeutig möglich. ZB: Dreieck $a = 65$ mm, $b = 35$ mm, $\beta = 30°$. Wir beginnen mit einer Skizze und kennzeichnen die gegebenen Bestimmungsstücke.

  Konstruktion:
  Zeichne die Trägergerade der Seite c und markiere den Eckpunkt B. Zeichne dort den Winkel β und trage die Länge a auf. Du erhältst den Punkt C. Stich nun mit dem Zirkel in C ein und zeichne einen Kreisbogen mit Radius b. Der Kreisbogen schneidet c in zwei Punkten, A_1 und A_2. Es entstehen zwei Dreiecke, A_1BC und A_2BC, die weder kongruent noch ähnlich sind. Berührt der Kreisbogen beim Abschlagen die Seite c, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck (Abb. 4.3). Ist b zu kurz, so gibt es keine Lösung (Abb. 4.4).

Abb. 4.3

Abb. 4.4

Sind zwei Seiten und der der kürzeren Seite gegenüberliegende Winkel gegeben, so kann es beim Konstruieren des Dreiecks zwei Lösungen, eine Lösung oder keine Lösung geben.

Besondere Linien und merkwürdige Punkte

Höhen: h_a, h_b, h_c
Normalabstand eines Eckpunkts zur gegenüberliegenden Seite
Höhenlinie:
Trägergerade der Höhe

Seitensymmetralen:
m_a, m_b, m_c

Umkreisradius r:
$r = \overline{UA} = \overline{UB} = \overline{UC}$

In jedem Dreieck schneiden einander die drei Höhenlinien in einem Punkt, dem **Höhenschnittpunkt H**.

In jedem Dreieck schneiden einander die drei Seitensymmetralen in einem Punkt, dem **Umkreismittelpunkt U**.

Winkelsymmetralen:
$w_\alpha, w_\beta, w_\gamma$
Inkreisradius ρ:
Normalabstand des Inkreismittelpunkts von den Seiten des Dreiecks

Schwerlinien:
s_a, s_b, s_c
Strecke, die durch den Mittelpunkt einer Seite und den gegenüberliegenden Eckpunkt geht

In jedem Dreieck schneiden einander die drei Winkelsymmetralen in einem Punkt, dem **Inkreismittelpunkt I**.

In jedem Dreieck schneiden einander die drei Schwerlinien in einem Punkt, dem **Schwerpunkt S**. Der Schwerpunkt teilt die Schwerlinien im Verhältnis 2 : 1.

Euler'sche Gerade

Ein weiterer interessanter Zusammenhang wurde von Leonhard Euler (schweizer Mathematiker, 1707 – 1783) beschrieben. In jedem Dreieck liegen Höhenschnittpunkt H, Schwerpunkt S und Umkreismittelpunkt U auf einer Geraden, der so genannten **Euler'schen Geraden**, wobei S immer zwischen den beiden anderen Punkten liegt. Zusätzlich gilt: $\overline{HS} : \overline{SU} = 2 : 1$

Berechnungen im Dreieck

Um den Flächeninhalt eines Dreiecks zu berechnen, ergänzen wir es zu einem Rechteck. Der Flächeninhalt dieses Rechtecks ist $c \cdot h_c$. Die beiden ergänzten Dreiecke ACE bzw. BDC sind kongruent zu den Dreiecken, die durch Teilung des Dreiecks durch die Höhe entstehen. Somit ist die Fläche des Dreiecks halb so groß wie die des Rechtecks.

Sind von einem Dreieck die drei Seitenlängen bekannt, so kann man den Flächeninhalt mit der **Heron'schen Flächenformel** berechnen, benannt nach Heron von Alexandria.

Umfang: $u = a + b + c$

Flächeninhalt: $A = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$ allgemein: $A = \frac{\text{Seite} \cdot \text{zugehörige Höhe}}{2}$

Heron'sche Flächenformel: $A = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$ mit $s = \frac{u}{2}$

B **4.28** Ein Dreieck ist durch die Seitenlängen $a = 41$ mm, $b = 36$ mm und $c = 55$ mm gegeben. Berechne den Flächeninhalt A.

Lösung:

$u = a + b + c = 132\text{ mm} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{u}{2} = \frac{132\text{ mm}}{2} = 66\text{ mm}$

$A = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)} = \sqrt{66 \cdot 25 \cdot 30 \cdot 11}\ \text{mm}^2 = 737{,}902\ldots\ \text{mm}^2 \approx 738\ \text{mm}^2$

Hinweis zu den Aufgaben: Beginne mit einer Skizze, in der du die gegebenen Größen markierst. Kontrolliere deine Rechnung – wenn möglich – durch eine maßstäbliche Zeichnung.

BD **4.29** Können diese drei Winkel die Innenwinkel eines Dreiecks sein? Begründe deine Antwort.
a) $\alpha = 53°, \beta = 47°, \gamma = 110°$ **b)** $\alpha = 100°, \beta = 25°, \gamma = 55°$ **c)** $\alpha = 46°, \beta = 53°, \gamma = 71°$

B **4.30** Von einem Dreieck sind zwei Winkel gegeben. Wie groß ist der dritte Winkel?
a) $\beta = 79°, \gamma = 45°$ **b)** $\alpha = 27°, \beta = 2\alpha$ **c)** $\alpha = 63°, \gamma = \alpha - 20°$

BCD **4.31** Konstruiere folgendes Dreieck oder begründe gegebenenfalls, warum dies nicht möglich ist. Ändere in diesem Fall einen Wert so ab, dass die Konstruktion möglich wird.
a) $a = 72$ mm, $b = 65$ mm, $c = 80$ mm
b) $a = 40$ mm, $b = 50$ mm, $\gamma = 60°$
c) $a = 5{,}6$ cm, $b = 3{,}2$ cm, $c = 2{,}1$ cm
d) $b = 2$ cm, $\gamma = 30°$, $\alpha = 130°$

D **4.32** Gilt der SSW-Satz auch, wenn beide Seiten gleich lang sind? Begründe deine Antwort.

BC **4.33** Gib die Abmessungen von zwei Dreiecken an, auf die die Beschreibung passt.
a) $u = 25$ cm
b) $A = 100\text{ dm}^2$
c) gleichschenklig und rechtwinklig
d) stumpfwinklig mit $u = 100$ mm

D **4.34** Warum kann es folgende Dreiecke nicht geben? Begründe deine Antwort.
1) stumpfwinklig und rechtwinklig **2)** gleichseitig mit $\beta = 45°$

B **4.35** Konstruiere das Dreieck und den angegebenen besonderen Punkt.
a) $a = 95$ mm, $b = 62$ mm, $c = 100$ mm, S
b) $b = 4{,}2$ cm, $c = 5{,}5$ cm, $\alpha = 130°$, H
c) $a = b = 60$ mm, $c = 50$ mm, I
d) $a = 45$ mm, $b = 80$ mm, $\gamma = 110°$, U

B **4.36** Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks.
a) $a = 3$ cm, $b = 2{,}5$ cm, $c = 47$ mm **b)** $a = 35$ dm, $b = 56$ dm, $c = 28$ dm

B **4.37** Der Flächeninhalt eines Dreiecks beträgt 33 cm^2, die Seite c ist 11 cm lang. Wie groß ist die zugehörige Höhe?

B **4.38** Berechne den Flächeninhalt und die gesuchte Höhe des Dreiecks.
a) $a = 70$ mm, $b = 26$ mm, $c = 5{,}8$ cm; $h_a = ?$ **b)** $a = 10{,}4$ cm, $b = 5{,}2$ cm, $c = 6{,}8$ cm; $h_b = ?$

ABD **4.39** Wohnungswände (Raumhöhe 2,50 m; Fenster und Türen werden vernachlässigt, Abb. 4.5) sollen mit zwei Farben gestrichen werden.
Für wie viel m^2 Fläche müssen die Farben jeweils gekauft werden?
Wie kann man die Berechnungen möglichst rasch durchführen?

Abb. 4.5

BC **4.40** Zeichne ein beliebiges Dreieck auf einen Karton und konstruiere den Schwerpunkt. Schneide das Dreieck anschließend aus und versuche, es auf einem Finger zu balancieren.

A **4.41** Zähle drei Gegenstände in einer Wohnung auf, die eine dreieckige Form haben.

Technologieeinsatz: Dreieck

Excel

ZB: Ein Arbeitsblatt, in dem nach Eingabe der Seitenlänge a die Höhe h, der Flächeninhalt A und der Umfang u eines gleichseitigen Dreiecks berechnet werden, soll erstellt werden.

Ein neues Arbeitsblatt wird – wie rechts dargestellt – vorbereitet. Damit das Eingeben der Formeln einfacher wird, erhält die Zelle B3 einen Namen. Dazu wird die Zelle aktiviert und im **Namenfeld** die Zelladresse durch **a** ersetzt.

	A	B	C
1	**Gleichseitiges Dreieck**		
2			
3	Seitenlänge a =	4,00	cm
4			
5	Höhe h =	3,46 cm	
6	Fläche A =	6,93 cm²	
7	Umfang u =	12,00 cm	

Um die Höhe $h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$ zu berechnen (siehe Seite 147), wird in Zelle B5 die Formel **=a/2*WURZEL(3)** eingegeben.

Analog wird der Flächeninhalt $A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$ und der Umfang u = 3a berechnet.

Mit den Symbolen werden zwei Nachkommastellen eingestellt. Die Einheiten können rechts in eigene Zellen geschrieben werden.

GeoGebra

TI-Nspire: www.verlaghpt.at

Mithilfe des Werkzeugs **Vieleck** kann ein Dreieck gezeichnet werden. Die Eckpunkte können durch Anklicken direkt angewählt werden, wobei der so genanne Fang beim „Treffen" ganzzahliger Koordinaten hilft, oder in der Eingabezeile eingegeben werden. Mithilfe der **Werkzeuge für spezielle Geraden** können anschließend weitere Konstruktionen durchgeführt werden.

ZB: Höhenschnittpunkt

Durch die drei Eckpunkte werden mit dem Werkzeug **Senkrechte Gerade** die Höhenlinien eingezeichnet. Der Höhenschnittpunkt wird mit dem Werkzeug **Schneide zwei Objekte** (**Werkzeuge für Punkte**) konstruiert. Anschließend kann mit dem Werkzeug **Bewege** die Lage der Eckpunkte verändert werden. Die Konstruktionen werden dabei dynamisch nachgeführt.

4.42 Zeichne ein beliebiges Dreieck und konstruiere den Höhenschnittpunkt, den Schwerpunkt und den Umkreismittelpunkt. Zeichne die Euler'sche Gerade ein und kontrolliere so die Behauptung, dass diese drei Punkte immer auf dieser Geraden liegen. B

4.43 Zeichne ein beliebiges Dreieck und konstruiere ***a)*** den Schwerpunkt, ***b)*** den Umkreismittelpunkt. Verändere das Dreieck und beschreibe, welche unterschiedlichen Lagen der spezielle Punkt in Abhängigkeit von der Art des Dreiecks einnimmt. BC

4.2.2 Rechtwinklige Dreiecke

Das Arbeiten mit rechtwinkligen Dreiecken ist einer der ältesten und bis heute wichtigsten Aspekte der Geometrie. Bevor verschiedene Berechnungen durchgeführt werden, wollen wir uns mit den Eigenschaften des rechtwinkligen Dreiecks und den wichtigsten Sätzen befassen.

Es gelten folgende Bezeichnungen und Zusammenhänge:

c ... Hypotenuse (liegt dem rechten Winkel gegenüber)
a, b ... Katheten, $a \perp b$
p, q ... Hypotenusenabschnitte (p unter a, q unter b)
h ... Höhe auf c
$h_a = b$ bzw. $h_b = a$
$\alpha + \beta = 90°$
Es ist durch zwei Angabeelemente festgelegt.

Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks: $A = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot h}{2}$

Besondere Zusammenhänge im rechtwinkligen Dreieck

BC **4.44** Zeichne einen Halbkreis (r = 5 cm), wähle Punkte C_1, C_2, C_3 auf der Kreislinie und verbinde diese jeweils mit den Endpunkten A und B des Durchmessers zu einem Dreieck.
1) Miss in jedem Dreieck den Winkel γ.
2) Wähle das erste Dreieck aus und verbinde den Mittelpunkt M des Halbkreises mit C_1. Welche Dreiecke entstehen dadurch?

Liegt ein Eckpunkt eines Dreiecks auf einem Halbkreis und sind die beiden anderen Eckpunkte die Endpunkte des Durchmessers des Halbkreises, so ist das Dreieck ein rechtwinkliges. Dieser Satz wurde erstmals von Thales von Milet (griechischer Mathematiker, um 624 – 546 v. Chr.) bewiesen und lautet in einer Kurzform:

Satz von Thales: Jeder Winkel im Halbkreis ist ein rechter Winkel.

Beweis:

Die Dreiecke AMC und CMB sind gleichschenklig. Daher sind folgende Winkel gleich groß: $\alpha = \gamma_1$, $\beta = \gamma_2$
Mit dem Winkelsummensatz folgt im Dreieck ABC:
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$
$\gamma_1 + \gamma_2 + (\gamma_1 + \gamma_2) = 180°$
$2\gamma_1 + 2\gamma_2 = 180° \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 + \gamma_2 = 90°$

Der Kreis über dem Durchmesser AB wird als **Thaleskreis** bezeichnet. Dieser ist ein wichtiges Hilfsmittel bei der Konstruktion von rechtwinkligen Dreiecken.

Für den Zusammenhang zwischen den Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks gilt:

Satz von Pythagoras: Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Quadrate der Katheten gleich dem Quadrat der Hypotenuse: $a^2 + b^2 = c^2$

Beweise siehe Aufgaben 4.55 und 4.56.

4.45 Berechne Höhe und Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge $a = 4{,}0$ cm.

B

Lösung:

- Wir teilen das Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke und wenden den Satz des Pythagoras an:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3} \qquad h = \frac{4\text{ cm}}{2} \cdot \sqrt{3} = 3{,}464\ldots\text{ cm} \approx 3{,}5\text{ cm}$$

$$A = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \qquad A = \frac{(4\text{ cm})^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 6{,}928\ldots\text{ cm}^2 \approx 6{,}93\text{ cm}^2$$

Natürliche Zahlen x, y, z, die die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ erfüllen, heißen **pythagoräische Tripel**. Die kleinsten natürlichen Zahlen, für die das zutrifft, sind 3, 4 und 5. Sie waren wahrscheinlich auch schon den Ägyptern bekannt, die sie zur Vermessung von Feldern nach Überschwemmungen oder bei der Errichtung von rechtwinkligen Mauern verwendeten. Dazu teilten sie eine Knotenschnur in zwölf gleich lange Abschnitte und legten sie so auf, dass ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seitenlängen 3 Einheiten, 4 Einheiten und 5 Einheiten entstand.

Mithilfe des Satzes von Pythagoras kann man zwei weitere Sätze zeigen.

Höhensatz: Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Höhe gleich dem Produkt der Hypotenusenabschnitte.

$$h^2 = p \cdot q$$

Kathetensatz: Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Kathete gleich dem Produkt aus der Hypotenuse und dem Hypotenusenabschnitt, der der Kathete anliegt.

$$a^2 = c \cdot p \qquad b^2 = c \cdot q$$

4.46 Von einem rechtwinkligen Dreieck sind die Kathete $a = 50$ mm und der Hypotenusenabschnitt $p = 40$ mm gegeben. Berechne die übrigen Seitenlängen, die Höhe und den Flächeninhalt. Dokumentiere deinen Rechenvorgang.

BC

Lösung:

$$a^2 = c \cdot p \Rightarrow c = \frac{a^2}{p} = \frac{(50\text{ mm})^2}{40\text{ mm}} = 62{,}5\text{ mm}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} = 37{,}5\text{ mm}$$

$$c = p + q \Rightarrow q = c - p = 22{,}5\text{ mm}$$

$$h^2 = p \cdot q \Rightarrow h = \sqrt{p \cdot q} = 30\text{ mm}$$

$$A = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{50\text{ mm} \cdot 37{,}5\text{ mm}}{2} = 937{,}5\text{ mm}^2$$

Da a und p gegeben sind, wird mit dem Kathetensatz die Seite c berechnet. Durch Umformen des Satzes des Pythagoras ergibt sich die Seitenlänge b. Die Seite c ist die Summe von p und q. Die Höhe wird mit dem Höhensatz berechnet.

4.47 Welche der folgenden Angaben können kein rechtwinkliges Dreieck festlegen? Begründe deine Antwort.

D

1) Kathete 4 cm, Hypotenuse 3 cm
2) $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$
3) $c = 60$ mm, $\alpha = 95°$
4) $a = 3{,}5$ cm, $\beta = 40°$

B **4.48** Berechne die fehlenden Größen des rechtwinkligen Dreiecks (Einheiten: mm, mm^2).

	a	b	c	p	q	h	A
a)		32			24		
b)			74	37			
c)		12					84
d)		10			5		
e)	56					38	
f)	20						112

B **4.49** Zwei Kräfte F_1 und F_2, die normal aufeinander wirken, greifen in einem Punkt an. Wie groß ist die resultierende Kraft F_R?
a) $F_1 = 60$ N, $F_2 = 45$ N **b)** $F_1 = 800$ N, $F_2 = 2{,}3$ kN

ABD **4.50** Herr Meier möchte ein Regal kaufen und hat zwei Größen zur Auswahl: b/t/h = 60/30/200 cm oder 80/30/200 cm. Um in seine Wohnung zu gelangen, muss er es durch eine 50 cm schmale und 180 cm hohe Öffnung transportieren. Er kann das Regal zuvor nur in einem niedrigen Gang kippen (Abb. 4.6). Begründe durch eine Rechnung, welches der beiden Regale er nehmen sollte.

Abb. 4.6

B **4.51** Berechne die Längen der gekennzeichneten Stäbe des abgebildeten Fachwerks (Angaben in Meter).
a) **b)**

B **4.52** Berechne die Höhe H des Kugelaquariums mit $d = 40$ cm, $d_u = 14$ cm und $d_o = 24$ cm (Abb. 4.7).

BC **4.53** Aus einem Baumstamm mit dem Durchmesser $d = 35$ cm sollen möglichst viele Pfosten mit $b = 25$ cm Breite und 4 cm Höhe geschnitten werden (Abb. 4.8). Wie viele Pfosten sind möglich? In welchem Abstand s von oben kann zu schneiden begonnen werden?

Abb. 4.7 Abb. 4.8

BD **4.54** ***1)*** Zeige, dass die Zahlen $x = 2uv$, $y = u^2 - v^2$ und $z = u^2 + v^2$ ein pythagoräisches Zahlentripel bilden. ***2)*** Wähle u und v so, dass ein teilerfremdes Tripel entsteht.

D **4.55** Arbeitet in Vierergruppen: Die Abbildung zeigt die Beweisidee für den Satz von Pythagoras. Führt den Beweis aus und gestaltet ein Plakat mit euren Ausarbeitungen.
a) **b)** **c)**

CD **4.56** James A. Garfield (20. Präsident der USA, 1831 – 1881) entwickelte 1876 einen neuen Beweis für den Satz von Pythagoras, den er mithilfe zweier kongruenter Dreiecke und der Fläche eines Trapezes führte. Gestalte eine Power-Point-Präsentation über diesen Beweis.

4.2.3 Gleichschenkliges und gleichseitiges Dreieck

Gleichschenkliges Dreieck:

a, b ... Schenkel
c ... Basis
α, β ... Basiswinkel

$a = b,\ \alpha = \beta$

$\gamma = 180° - 2\alpha$

$u = 2a + c$

Die Basis c wird durch die Höhe halbiert.

Gleichseitiges Dreieck:

$a = b = c$

$\alpha = \beta = \gamma = 60°$

$h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$

$A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$

$u = 3a$

Im gleichseitigen Dreieck fallen Höhenschnittpunkt, Schwerpunkt, Umkreis- und Inkreismittelpunkt im so genannten Mittelpunkt zusammen.

4.57 BD
1) Welche verschiedenen Dreiecke siehst du auf diesem Foto? Beschreibe die Unterschiede.
2) Schätze die Abmessungen der annähernd gleichseitigen Dreiecke am oberen Ende der Tür. Erkläre deine Vorgehensweise.

4.58 D
Welche Verkehrszeichen haben die Form von gleichseitigen Dreiecken? Nenne drei Beispiele.

4.59 B
Berechne die gesuchten Größen des gleichschenkligen Dreiecks.
a) $a = 4$ cm, $c = 3$ cm; ges.: h_c, A
b) $a = 54$ mm, $h_c = 32$ mm; ges.: c, A
c) $A = 356\ cm^2$, $c = 34$ cm; ges.: h_c, a
d) $c = 60$ mm, $h_c = 45$ mm; ges.: a, A

4.60 B
Berechne die fehlenden Größen des gleichseitigen Dreiecks.
a) $a = 6$ cm **b)** $h = 50$ mm **c)** $A = 32\ m^2$

4.61 ABC
Aus einer 4,50 m breiten Plane wird ein gleichschenkliges Zelt gebildet, dessen Grundfläche 2 m breit ist. Kann ein 1,80 m großer Mensch darin aufrecht stehen?

4.62 AB
Rohre werden gestapelt, indem sie „auf Lücke" gelegt werden.
1) In der untersten Reihe befinden sich sechs Rohre mit einem Radius von 10 cm. Wie hoch wird der Stapel?
2) Gib eine Formel für die Höhe H des Stapels an, wenn in der untersten Reihe n Rohre vom Radius r liegen.

4.63 BD TE
Wie verläuft im gleichschenkligen Dreieck die Euler'sche Gerade? Veranschauliche mithilfe von Technologieeinsatz.

4.64 D
Gibt es in einem gleichseitigen Dreieck eine Euler'sche Gerade? Begründe die Antwort.

Geometrie der Ebene

4.3 Ähnlichkeit

4.3.1 Ähnliche Dreiecke

Bei einem Unfall muss laut Straßenverkehrsordnung (StVO) ein Pannendreieck (Warndreieck) aufgestellt werden. Dieses besteht häufig aus zwei Dreiecken, einem großen aus Kunststoff und einem kleineren aus Textilfaser. Beide Dreiecke haben die gleichen Winkel, sind aber verschieden groß, sie sind also ähnlich.

BC **4.65** Zeichne zwei beliebig große Dreiecke ΔABC und $\Delta A_1B_1C_1$ mit den Winkeln $\alpha = 50°$ und $\beta = 35°$. Miss die Seitenlängen ab und berechne folgende Verhältnisse. **1)** $\frac{a}{a_1}$ **2)** $\frac{b}{b_1}$ **3)** $\frac{c}{c_1}$
Was fällt dir dabei auf?

Aus den Kongruenzsätzen für Dreiecke wissen wir, dass ein Dreieck durch die Angabe der Winkel nicht eindeutig festgelegt ist. Man erhält ähnliche Dreiecke. Vergleicht man die Seitenlängen der Dreiecke, so entsprechen einander jene Seiten, die gleichen Winkeln gegenüberliegen.

Die Verhältnisse dieser Seitenlängen sind gleich: $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k$

Zwei Dreiecke heißen **ähnlich**, wenn einander entsprechende Winkel gleich groß sind.
$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$
Die entsprechenden Seitenlängen stehen im selben Verhältnis zueinander.

Für ähnliche Dreiecke gelten **Ähnlichkeitssätze**. Sie entsprechen sinngemäß den Kongruenzsätzen, wobei „Seiten“ durch „Verhältnis der Seiten“ ersetzt wird.

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie
- im Verhältnis der Seiten oder
- im Verhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel oder
- im Verhältnis zweier Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel oder
- in zwei Winkeln übereinstimmen.

Zwei rechtwinklige Dreiecke sind ähnlich, wenn ein spitzer Winkel oder das Verhältnis von zwei entsprechenden Seiten gleich ist. Gleichseitige Dreiecke sind immer ähnlich.

AB **4.66** Das skizzierte Dachflächenfenster wird gekippt. Wie groß ist der vertikale Abstand x der Fensterkante vom Dach?

Lösung:
Die Dreiecke ΔABC und ΔCDE sind ähnlich, somit gilt:
$\overline{DE} : \overline{AB} = \overline{CE} : \overline{BC}$

$\frac{x}{60\text{ cm}} = \frac{70\text{ cm}}{50\text{ cm}} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{7}{5} \cdot 60\text{ cm} = 84\text{ cm}$

Der vertikale Abstand beträgt 84 cm.

4.67 Vergleiche die Bedeutung der Wörter „Ähnlichkeit“ bzw. „ähnlich“ in der Mathematik und im Alltag. Welche Gemeinsamkeiten, welche Unterschiede gibt es dabei? Erkläre diese an einem selbst gewählten Beispiel aus dem Alltag. D

4.68 Überprüfe mit Technologieeinsatz, ob ein beliebiges Dreieck ähnlich zu dem Dreieck ist, dessen Eckpunkte die Mittelpunkte der Seiten des ursprünglichen Dreiecks sind. BC TE

4.69 Die dargestellten Dreiecke sind ähnlich. Bestimme die Längen der gekennzeichneten Seiten. Die Maße sind in Zentimeter gegeben. B

a) 4; 5; 2 — x; y; 1

b) y; 50; 45 — x; 20; 30

c) 1,2; x; y — 2,5; 2; 1,5

4.70 Es sind die Seitenlängen zweier ähnlicher Dreiecke gegeben. Berechne das Verhältnis der entsprechenden Seiten und ergänze die fehlenden Längen. B

a) a = 72 mm, b = 53 mm, c = 25 mm; a_1 = 54 mm

b) a = 1,8 cm, c = 2,4 cm; b_1 = 4,0 cm, c_1 = 3,2 cm

4.71 Berechne die gesuchten Längen der Beine des Klappstuhls aus Abb. 4.9. Die Gesamtlänge s beträgt 51 cm. AB

4.72 Eine Lampe ist mit zwei Streben an einer Wand befestigt (Abb. 4.10). Wie groß sind die Kräfte, die in den Streben wirken? AB

Abb. 4.9

Abb. 4.10

4.73 Welche der folgenden Figuren sind immer ähnlich zueinander? Begründe deine Antwort. D

1) Kreise **2)** Quadrate **3)** Trapeze **4)** Rechtecke

4.74 Ein 1 m langer Stab wirft einen Schatten, der s Meter lang ist. ABCD

1) Erkläre, wie damit aus der Länge des Schattens des Turms die Höhe des Turms ermittelt werden kann.

2) Wie hoch ist der Turm, wenn sein Schatten ℓ = 100 m und der des Stabs s = 1,2 m lang ist.

3) Unter welchem Winkel müssen die Sonnenstrahlen auftreffen, damit der Schatten des Turms genau so lang ist, wie der Turm hoch ist?

4.75 Begründe, warum D

a) zwei beliebige gleichseitige Dreiecke immer ähnlich zueinander sind.

b) zwei beliebige gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke immer ähnlich zueinander sind.

4.3.2 Strahlensätze

Oft werden von einem Punkt ausgehende Strahlen von parallelen Geraden geschnitten. Die Längen der dadurch entstehenden Abschnitte können mithilfe der Strahlensätze berechnet werden.

Werden die Strahlen a und b von zwei parallelen Geraden geschnitten, so entstehen die ähnlichen Dreiecke ΔSB_1A_1 und ΔSB_2A_2.

Das Verhältnis entsprechender Seiten ist somit gleich, zB: $\overline{SA_1} : \overline{SA_2} = \overline{SB_1} : \overline{SB_2}$

AB **4.76** ***a)*** Welche Verhältnisse lassen sich noch angeben? Verwende obige Abbildung.

b) Ein weiteres ähnliches Dreieck entsteht, wenn man eine Parallele zu a durch den Punkt B_1 zeichnet. Welche Verhältnisse ergeben sich daraus?

Werden zwei von einem Punkt S ausgehende Strahlen a und b von zwei parallelen Geraden geschnitten, so gilt:

1. Strahlensatz: Die Längen zweier Abschnitte auf dem einen Strahl verhalten sich wie die Längen der entsprechenden Abschnitte auf dem zweiten Strahl.

$\overline{SA_1} : \overline{SA_2} = \overline{SB_1} : \overline{SB_2}$
$\overline{SA_1} : \overline{A_1A_2} = \overline{SB_1} : \overline{B_1B_2}$

2. Strahlensatz: Die Abschnitte auf den parallelen Geraden verhalten sich wie die entsprechenden von S ausgehenden Strecken auf den Strahlen.

$\overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2} = \overline{SA_1} : \overline{SA_2}$
$\overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2} = \overline{SB_1} : \overline{SB_2}$

Die Strahlensätze können auch zur Teilung von Strecken verwendet werden.

BD **4.77** Zeichne eine Strecke AB mit einer Länge von 12 cm.

1) Teile die Strecke im Verhältnis 2 : 7. Beschreibe deine Vorgehensweise.

2) Beschreibe, wie die Strecke AB in neun gleiche Teile geteilt werden kann.

Lösung:

1) Ich zeichne vom Punkt A aus einen beliebigen Strahl. Auf diesem Hilfsstrahl werden 2 Einheiten (zB 2 cm) und anschließend 7 Einheiten aufgetragen. Der Endpunkt D wird mit B verbunden. Ich zeichne eine Parallele zu BD durch den Punkt C. Der Schnitt mit AB ist der gesuchte Teilungspunkt T.

2) Der Hilfsstrahl ist in 9 gleiche Strecken geteilt. Durch Zeichnen von Parallelen zu BD durch jeden Markierungspunkt kann diese Teilung auf AB übertragen werden.

4.78 Berechne die Längen der gekennzeichneten Strecken (Maße in Meter). B

a)

b)

4.79 **a)** Teile die Strecke AB ($\overline{AB}$ = 6 cm) im Verhältnis **1)** 3 : 5, **2)** 8 : 1, **3)** 2 : 3. B

b) Teile die Strecke AB ($\overline{AB}$ = 12 cm) in **1)** 5, **2)** 7, **3)** 13 gleich große Teile.

4.80 Zur Bestimmung der Höhe eines Baums wird ein so genanntes Försterdreieck verwendet. Das ist ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck, an dem ein Griff und eine Libelle (kleine Wasserwaage) zur waagrechten Ausrichtung befestigt sind. Die Funktionsweise kannst du aus Abb. 4.11 entnehmen. AB

1) Wie hoch ist ein Baum bei einer Aughöhe von a = 1,60 m und bei einer Entfernung von d = 10 m?

2) Stelle eine allgemeine Formel für die Höhe H eines Baums auf bei Aughöhe a und Entfernung d.

Abb. 4.11

4.81 Zum Messen der lichten Breite von Schlitzen und Fugen wird ein Messkeil verwendet. ABC

1) Beschreibe die Funktionsweise mithilfe der Zeichnung.

2) Wie breit ist die in Abb. 4.12 dargestellte Fuge?

Abb. 4.12

4.82 Damit eine Stehleiter nicht auseinander klappen kann, ist eine Sicherheitsschnur mit der Länge x befestigt. Wie lang muss diese für die Stehleiter aus Abb. 4.13 sein? AB

Abb. 4.13

4.83 Die Steigung einer Straße beträgt 5 %. Das bedeutet, dass auf 100 m horizontaler Entfernung eine Höhe von 5 m überwunden wird. AB

1) Welche Höhe wird auf einer horizontalen Länge von 650 m überwunden?

2) Wie lang ist die zurückgelegte schräge Strecke?

4.84 Eine Dachgaube wird seitlich von Glasscheiben begrenzt (Abb. 4.14). Wie lang sind die vertikalen Streben? AB

Abb. 4.14
Alle Angaben in Meter

4.85 Verrückte Dreiecke: Die obere Figur besteht aus vier einzelnen Teilen. Werden diese Teile verschoben, entsteht die untere, gleich große Figur, bei der nun ein Kästchen fehlt. Wie entsteht diese Lücke? Begründe mithilfe der Strahlensätze, worin die Täuschung besteht. D

4.4 Vierecke und Vielecke

4.4.1 Vierecke

Viele Großstädte sind in viereckige Raster unterteilt, Häuserfassaden oder Dächer setzen sich aus den verschiedensten Arten von Vierecken zusammen.

C **4.86** Beschreibe die dargestellten Vierecke.

1) Wie heißen sie?
2) Wie liegen die Seiten zueinander?
3) Welche Innenwinkel haben sie?
4) Versuche, sie nach ihren Eigenschaften einzuteilen.

Allgemeines Viereck

A, B, C, D ... Eckpunkte (Beschriftung gegen den Uhrzeigersinn)
a, b, c, d ... Seitenlängen (auch Seiten)
$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ... Innenwinkel
$e = AC$, $f = BD$ ... Diagonalen

Abb. 4.15

Die Diagonalen teilen ein Viereck jeweils in zwei Dreiecke. Die Summen der Innenwinkel der beiden Dreiecke ergeben daher die Summe der Innenwinkel des Vierecks. Weiters kann man überlegen, dass für die Konstruktion eines Vierecks fünf geeignete Bestimmungsstücke gegeben sein müssen (drei für das erste Dreieck, zwei weitere für das zweite).

Für die **Konstruktion eines allgemeinen Vierecks** benötigt man fünf (voneinander unabhängige) Bestimmungsstücke.
Die Innenwinkelsumme im Viereck beträgt 360°.

Das in Abb. 4.15 dargestellte Viereck ist ein konvexes Viereck, das heißt, jeder Innenwinkel ist kleiner als 180°. Es gibt auch konkave und überschlagende Vierecke (Abb. 4.16), die wir aber nicht behandeln werden.

Abb. 4.16

Vierecke mit besonderen Eigenschaften

In Aufgabe 4.86 sind Vierecke mit besonderen Kennzeichen, wie parallele Seiten oder rechte Winkel dargestellt. Anhand dieser Kennzeichen können Vierecke geordnet werden.

Dabei werden die Eigenschaften eines Vierecks an das nachfolgende „vererbt" und die – in den Klammern angegebene – Anzahl der notwendigen Bestimmungsstücke nimmt ab.

Viereck (5) → Trapez (4) → Parallelogramm (3) → Rechteck (2) → Quadrat (1)

Viereck (5) → Deltoid (3) → Raute (2) → Quadrat (1)

Parallelogramm (3) → Raute (2)

In der folgenden Übersicht der besonderen Vierecke sind die definierenden und einige daraus folgende Eigenschaften angeführt und Formeln für Berechnungen angegeben.

Trapez: Ein Paar paralleler Seiten

$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$

$u = a + b + c + d$

Gleichschenkliges Trapez: $d = b$

Parallelogramm: Zwei Paare paralleler Seiten

$A = a \cdot h_a = b \cdot h_b$

$u = 2 \cdot (a + b)$

Die Diagonalen e und f halbieren einander.

Rechteck: Vier gleich große (rechte) Winkel

$A = a \cdot b$

$u = 2 \cdot (a + b)$

$d = \sqrt{a^2 + b^2}$

Quadrat: Vier gleich lange Seiten und vier gleich große Winkel

$A = a^2$

$u = 4 \cdot a$

$d = a \cdot \sqrt{2}$

Deltoid: Zwei Paare gleich langer benachbarter Seiten

$A = \frac{e \cdot f}{2}$

$u = 2 \cdot (a + b)$

Die beiden Diagonalen stehen normal aufeinander ($e \perp f$). Die Winkel β und δ sind gleich groß.

Raute (Rhombus): Vier gleich lange Seiten

$A = a \cdot h_a = \frac{e \cdot f}{2}$

$u = 4 \cdot a$

Die Diagonalen e und f stehen aufeinander normal und halbieren einander. Sie sind Winkelsymmetralen.

4.87 Welche Eigenschaften muss ein Parallelogramm haben, damit es ein Rechteck ist? Beantworte diese Frage ebenso für ein Viereck und ein Deltoid, ein Trapez und eine Raute sowie ein Deltoid und ein Quadrat. **D**

Geometrie der Ebene

Allgemeines Viereck

D **4.88** Ist das Viereck durch die gegebenen Bestimmungsstücke eindeutig konstruierbar? Die Bezeichnungen sind Abb. 4.15 (Seite 152) zu entnehmen. Begründe deine Antwort.
a) $a, b, \beta, \gamma, \delta$ **b)** a, b, c, d, f **c)** $a, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ **d)** d, e, f, α, β

D **4.89** Stimmen folgende Aussagen? Begründe deine Antwort.
1) Jedes Rechteck ist ein Parallelogramm.
2) Jedes Quadrat ist ein Trapez.
3) Jedes Deltoid ist eine Raute.
4) Ein Deltoid hat eine Symmetrieachse.

B **4.90** Berechne die Größen der fehlenden Winkel.
a) (70°, 25°, α, γ) **b)** (15°, 45°, 80°, α, β, δ)

D **4.91** Beantworte die Frage und begründe deine Antwort.
a) Unter welcher Bedingung bestimmen vier Punkte ein Viereck?
b) Können die Diagonalen eines Vierecks parallel sein?

Rechteck und Quadrat

B **4.92** Berechne die fehlende Seitenlänge, die Länge der Diagonalen bzw. den Flächeninhalt des Rechtecks.
a) $A = 4{,}0\ dm^2$, $a = 25\ cm$ **b)** $a = 35\ cm$, $d = 50\ cm$ **c)** $b = 16\ mm$, $u = 80\ mm$

B **4.93** Berechne die Seitenlänge, die Länge der Diagonalen bzw. den Flächeninhalt des Quadrats.
a) $A = 0{,}25\ m^2$ **b)** $d = 24\ cm$ **c)** $u = 48\ mm$

Trapez

B **4.94** Bestimme die Größen der fehlenden Winkel des Trapezes.
a) (65°, 40°, δ, γ) **b)** (45°, 60°, α, β, γ, δ) **c)** (25°, 95°, ε) **d)** (35°, γ)

AB **4.95** Zeichne jeweils ein Trapez, das die folgenden Bedingungen erfüllt.
1) zwei rechte Winkel **2)** die stumpfen Winkel liegen einander gegenüber

AB **4.96** Ein Trapez ist durch die Seiten $a = 55\ mm$, $b = 27\ mm$, $c = 30\ mm$ und $d = 32\ mm$ festgelegt. Berechne die Höhe h und den Flächeninhalt A des Trapezes.

Lösung:
Zur Konstruktion und Berechnung wird das Dreieck AED benötigt.

(Skizze: A, B, C, D, E; d, h, b, c, x = a−c, a)

$x = a - c = 25\ mm$ $s = \frac{x + b + d}{2} = 42\ mm$

$A_1 = \sqrt{s \cdot (s - x) \cdot (s - b) \cdot (s - d)}$

$A_1 = \sqrt{42 \cdot 17 \cdot 15 \cdot 10}\ mm^2 = 327{,}261...\ mm^2$

$A_1 = \frac{x \cdot h}{2} \Rightarrow h = \frac{2 \cdot A_1}{x} = 26{,}180...\ mm \approx 26\ mm$

$A = \frac{a + c}{2} \cdot h = \frac{55\ mm + 30\ mm}{2} \cdot 26{,}180...\ mm = 1\,112{,}688...\ mm^2$

$A \approx 1\,113\ mm^2$

- Der Flächeninhalt A_1 von ΔAED wird mit der Heron'schen Flächenformel berechnet und daraus die Höhe h ermittelt.

4.97 Berechne die fehlende Seitenlänge, die Längen der Diagonalen, die Höhe und den Flächeninhalt des Trapezes. B

a) $a = 60$ cm, $c = 42$ cm, $d = 38$ cm, $\alpha = 60°$
b) $a = 4{,}5$ dm, $b = 6{,}0$ dm, $c = 7{,}2$ dm, $d = 6{,}5$ dm
c) $a = 4{,}8$ dm, $c = 2{,}5$ dm, $d = 3{,}7$ dm, $e = 5{,}0$ dm
d) $a = 50$ mm, $b = 35$ mm, $c = 30$ mm, $\delta = 90°$

4.98 Von einem Trapez sind der Flächeninhalt und zwei weitere Bestimmungsstücke gegeben. Berechne die Höhe h bzw. die Länge der Seite a bzw. c. B

a) $A = 100\ \text{cm}^2$, $a = 35$ cm, $c = 15$ cm
b) $A = 6{,}25\ \text{m}^2$, $c = 3$ m, $h = 2{,}5$ m
c) $A = 1\,250\ \text{mm}^2$, $a = 20$ mm, $h = 40$ mm

4.99 Berechne die Querschnittsfläche des Damms. AB
Hinweis: 4 : 3 gibt die Neigung der Dammfläche an.
Höhendifferenz : horizontaler Längendifferenz = 4 : 3
a) $b = 4{,}00$ m, $h = 1{,}50$ m ***b)*** $b = 2{,}50$ m, $h = 1{,}25$ m

Parallelogramm

4.100 Bestimme die Größen der fehlenden Winkel des Parallelogramms. B

4.101 Berechne die fehlende Seitenlänge, die Längen der Diagonalen, die Höhen und den Flächeninhalt des Parallelogramms. B

a) $a = 4$ dm, $b = 3$ dm, $h_a = 2{,}5$ dm
b) $a = 36$ cm, $b = 48$ cm, $\alpha = 30°$
c) $a = 20$ mm, $b = 60$ mm, $e = 70$ mm
d) $a = 6$ cm, $f = 5$ cm, $h_a = 3$ cm

Deltoid und Raute

4.102 Berechne die fehlende Seitenlänge, die Längen der Diagonalen und den Flächeninhalt des Deltoids. B

a) $a = 3{,}0$ cm, $b = 5{,}0$ cm, $f = 4{,}0$ cm
b) $a = 40$ mm, $e = 100$ mm, $f = 60$ mm
c) $a = 2{,}5$ dm, $b = 2{,}0$ dm, $\alpha = 90°$
d) $b = 6$ cm, $e = 9$ cm, $\gamma = 60°$

4.103 Eine Raute ist durch die Seite $a = 35$ mm und die Höhe $h = 20$ mm gegeben. Berechne den Flächeninhalt und die Längen der Diagonalen. B

Lösung:

$A = a \cdot h = 700\ \text{mm}^2$
$x^2 = a^2 - h^2 \Rightarrow x = 28{,}722...\ \text{mm}$
$e^2 = (a + x)^2 + h^2 \Rightarrow e = 66{,}787...\ \text{mm} \approx 67\ \text{mm}$
$f^2 = (a - x)^2 + h^2 \Rightarrow f = 20{,}961...\ \text{mm} \approx 21\ \text{mm}$

4.104 Berechne die fehlende Seitenlänge bzw. die Längen der Diagonalen und den Flächeninhalt der Raute. B

a) $e = 6{,}0$ dm, $f = 4{,}0$ dm
b) $a = 5{,}5$ cm, $h = 3{,}0$ cm
c) $a = 40$ cm, $e = 75$ cm
d) $a = 24$ mm, $\alpha = 45°$

4.105 Gib zwei Gemeinsamkeiten und zwei Unterschiede zwischen einer Raute und einem Deltoid an. CD

ABC **4.106** Ein Fliesenleger verlegt auf einem 5,20 m langen Streifen eine Reihe quadratischer Fliesen (s = 25 cm) diagonal. Die Fugen bleiben unberücksichtigt.
1) Wie breit wird der Streifen?
2) Wie viele Fliesen werden benötigt? Muss die letzte Fliese geschnitten werden? Wenn ja, wie viel Verschnitt fällt an?

AB **4.107** Beim Verlegen von rautenförmigen Dachplatten mit a = 44 cm und h = 40 cm erfolgt eine Überdeckung von 10 cm. Wie viele Platten werden für 1 m^2 Dachfläche benötigt?

AB **4.108** Der Flächeninhalt einer Raute beträgt 24 cm^2. Die Summe der Längen der Diagonalen ist 14 cm, eine Diagonale ist sechsmal länger als die andere. Wie groß ist der Umfang?

ABD **4.109** Die Längen der Diagonalen einer Raute verhalten sich wie 3 : 4. Verkürzt man die kleinere Diagonale um 4 cm und verlängert gleichzeitig die größere Diagonale um 8 cm, so erhält man eine neue Raute mit gleichem Flächeninhalt.
1) Berechne jeweils die Längen der Diagonalen der ursprünglichen Raute.
2) Haben die beiden Vierecke auch den gleichen Umfang? Begründe deine Antwort.

AB **4.110** Ein Innenwinkel einer Raute beträgt 60°. Gib jeweils eine Formel für die Längen der Diagonalen und den Flächeninhalt an.

Vermischte Aufgaben

D **4.111** Stimmen die folgenden Aussagen? Begründe deine Entscheidungen.
a) 1) Jedes Deltoid ist eine Raute. ***2)*** Jede Raute ist ein Deltoid.
b) 1) Jedes Rechteck ist ein Trapez. ***2)*** Jedes Trapez ist ein Rechteck.

AD **4.112** Welche der Aussagen ist falsch? Formuliere sie so um, dass sie richtig wird.
1) In einem Viereck kann eine Diagonale eine Symmetrieachse sein.
2) Ein Viereck hat immer vier Innenwinkel. ***3)*** Es gibt Vierecke mit drei Diagonalen.

BCD **4.113** Teile die Seiten eines Quadrats in drei gleiche Teile und verbinde die jeweils ersten Teilungspunkte miteinander.
1) Welches Viereck entsteht? Begründe deine Antwort.
2) Berechne den Flächeninhalt des neu entstandenen Vierecks allgemein.

BCD **4.114** Verbinde die Seitenmitten eines gleichschenkligen Trapezes miteinander, sodass ein Viereck entsteht.
1) Um welches Viereck handelt es sich? Begründe deine Antwort.
2) Berechne die Seitenlängen und den Flächeninhalt des entstandenen Vierecks, wenn das Trapez die Abmessungen a = 8 cm, c = 4 cm und h = 6 cm hat.

BCD **4.115** Die Seiten einer Raute werden halbiert und die Halbierungspunkte zu einem Viereck verbunden.
1) Welche Figur entsteht? Begründe deine Antwort.
2) In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte zueinander?

A **4.116** Leite die Flächenformel durch Ergänzen auf ein Rechteck her.
a) Parallelogramm ***b)*** Trapez ***c)*** Raute ***d)*** Deltoid

BD **4.117** Ist es möglich, ein Viereck mit „einem geraden Schnitt" in drei Teile zu teilen? Fertige eine Skizze an.

4.4.2 Vielecke

Um auch die Ecken eines Raums als Stauraum nutzen zu können, gibt es bei Regalen spezielle Eckteile. Die oberste Platte des abgebildeten Regals hat sechs Ecken, die Seiten sind nicht gleich lang.

Eine ebene Figur aus drei oder mehr Punkten, die durch Strecken miteinander verbunden sind, wird als **Vieleck** oder **Polygon** (altgriechisch: „poly" = viel, „gonos" = Winkel, Ecke) bezeichnet. Sie wird auch n-Eck genannt, wobei n die Anzahl der Ecken angibt. Die Unterscheidung zwischen konvexen und nicht konvexen Vielecken erfolgt wie bei Vierecken.

4.118 Zeichne in den skizzierten Vielecken von einem Eckpunkt aus alle Diagonalen ein. BC

1) Wie viele Dreiecke entstehen?
2) Wie groß ist die Summe der Innenwinkel des Vielecks?
3) Gib die Summe der Innenwinkel für ein 60-Eck an.

Bei der Teilung eines Vielecks mit n Ecken in Dreiecke mit einem gemeinsamen Eckpunkt entstehen (n – 2) Dreiecke. Daher gilt:

Die Summe der Innenwinkel eines Vielecks mit n Ecken ist $(n - 2) \cdot 180°$.

Für die Flächenberechnung werden Polygone in Figuren mit bekannten Flächenformeln unterteilt.

4.119 Berechne den Flächeninhalt der skizzierten Abdeckplatte (Maße in Zentimeter). AB

Lösung:

$A = A_1 + A_2 + A_3$

$A_1 = 120\text{ cm} \cdot 30\text{ cm} = 3\,600\text{ cm}^2$

$h_1 = 105\text{ cm} - 30\text{ cm} = 75\text{ cm}$

$h_2 = 150\text{ cm} - 105\text{ cm} = 45\text{ cm}$

$x = \sqrt{(90\text{ cm})^2 - (75\text{ cm})^2} = 49{,}749...\text{ cm}$

$y = 120\text{ cm} - x = 70{,}250...\text{ cm}$

$A_2 = \frac{120\text{ cm} + y}{2} \cdot h_1 = 7\,134{,}398...\text{ cm}^2$

$A_3 = \frac{y + 30\text{ cm}}{2} \cdot h_2 = 2\,255{,}639...\text{ cm}^2$

$A = 12\,990{,}037...\text{ cm}^2 \approx 12\,990\text{ cm}^2 \qquad A = 129{,}9\text{ dm}^2$

Wie auch bei Vierecken gibt es bei Vielecken konvexe (alle Innenwinkel $< 180°$), nichtkonvexe (mindestens ein Innenwinkel $> 180°$, linke Abbildung) und überschlagende Vielecke (rechte Abbildung); auf diese wird aber nicht näher eingegangen.

Regelmäßige Vielecke

ρ ... Inkreisradius
r ... Umkreisradius

Sind alle Seitenlängen und alle Innenwinkel eines Vielecks gleich groß, so spricht man von einem regelmäßigen Vieleck. Es hat einen In- und einen Umkreis. Im Alltag kommen häufig Fünf-, Sechs- oder Achtecke vor.

Durch Verbinden des Mittelpunkts mit den Ecken eines regelmäßigen n-Ecks entstehen n kongruente gleichschenklige Dreiecke. Ein solches Dreieck wird als **Bestimmungsdreieck** bezeichnet.

Der Zentriwinkel (Mittelpunktswinkel) α beträgt $\frac{360°}{n}$.

Das Bestimmungsdreieck eines regelmäßigen Sechsecks ist ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seitenlänge gleich dem Radius des Umkreises ist. Der Zentriwinkel beträgt 60°.

B **4.120** Berechne die Seitenlänge a und den Flächeninhalt eines Achtecks mit dem Umkreisradius r = 4 cm.

Lösung:

- Der Zentriwinkel beträgt $\alpha = \frac{360°}{8} = 45°$.
- Wir ergänzen das Achteck zu einem Quadrat. Dadurch entstehen außerhalb des Achtecks gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke. Das Bestimmungsdreieck teilen wir durch die Höhe h in zwei rechtwinklige Dreiecke.

$a^2 = 2x^2 \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}}$
- x ... Seitenlänge des ergänzten Dreiecks

$h = \frac{a}{2} + x$
- Höhe des Bestimmungsdreiecks

$r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{\sqrt{2}} + \frac{a^2}{2} \Rightarrow r^2 = a^2 + \frac{a^2}{\sqrt{2}} = a^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
- Mithilfe des Satzes von Pythagoras berechnen wir die Seite a.

$a = \frac{r}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}} = 3{,}061\ldots\ \text{cm} \approx 3{,}1\ \text{cm}$

$h = 3{,}695\ldots\ \text{cm}$

$A = 8 \cdot \frac{a \cdot h}{2} = 45{,}254\ldots\ \text{cm}^2 \approx 45{,}25\ \text{cm}^2$
- Die Fläche setzt sich aus acht gleichschenkligen Dreiecken zusammen.

Für die Berechnung der Seitenlänge anderer regelmäßiger Vielecke benötigen wir weitere mathematische Kenntnisse, die im Abschnitt 7, Trigonometrie, folgen.

B **4.121** Gib die Summe der Innenwinkel an.

a) Fünfeck ***b)*** Siebeneck ***c)*** Zehneck

4.122 Hat Familie Kohout genügend Kapital K zum Kauf des Grundstücks angespart? Begründe deine Antwort.
a) K = 35 000,00 € für 25,00 $\frac{€}{m^2}$
b) K = 525 000,00 € für 280,00 $\frac{€}{m^2}$
Alle Längenangaben in Meter.

BD

4.123 Berechne den Flächeninhalt.

AB

a) Maße in Millimeter

c) Maße in Millimeter

e) Maße in Millimeter

b) Maße in Zentimeter

d) Maße in Millimeter

f) Maße in Zentimeter

4.124 Der Kopf einer Sechskantschraube ist ein regelmäßiges sechseckiges Prisma. Der Durchmesser des Inkreises der Grundfläche wird als Schlüsselweite s bezeichnet, der Durchmesser des Umkreises als Eckenmaß e (Abb. 4.17). Berechne e für eine Schraube mit s = 24 mm.

AB

Abb. 4.17

4.125 Die Zahl auf dem Schraubenschlüssel aus Abb. 4.18 gibt die Schlüsselweite s, das ist der Abstand der parallelen Flächen, in Millimeter an. Welcher Schraubenschlüssel wird benötigt, wenn das Eckenmaß e einer Sechskantmutter 20,8 mm beträgt?

AB

Abb. 4.18

4.126 Berechne die Seitenlänge eines regelmäßigen Zwölfecks mit dem Umkreisradius r = 8 cm. Gehe dabei von einem Sechseck aus. Schneide die Seitensymmetralen mit dem Umkreis.

AB

4.127 Aus einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge a soll durch Abschneiden der Ecken ein regelmäßiges Sechseck entstehen.
1) In welchem Abstand von den Ecken – gemessen auf der Höhe – erfolgt jeweils der Schnitt?
2) Wie lang sind die Seiten des Sechsecks?
3) Wie verhält sich der Flächeninhalt des Sechsecks zu dem des ursprünglichen Dreiecks?

ABC

4.5 Kreis und Kreisteile

4.5.1 Grundbegriffe

Vielleicht hast du schon einmal eine Fadengrafik gestaltet. Dazu werden Nägel zum Beispiel kreisförmig angeordnet mit gleichen Abständen in eine Holzplatte geschlagen. Anschließend werden Fäden von Nagel zu Nagel gespannt, sodass sich eine Figur ergibt, wie du sie auf der nebenstehenden Abbildung sehen kannst. Die Grundform dabei ist ein Kreis und die Fäden sind Tangenten des sichtbaren Kreises.

Ein **Kreis** k ist die Menge aller Punkte der Ebene, die von einem festen Punkt M den gleichen Abstand r haben.
M ... Mittelpunkt, r ... Radius

Die Definition des Kreises beschreibt eigentlich die Kreislinie, sehr oft wird unter dem Begriff Kreis aber auch die Kreisfläche verstanden.

BCD **4.128** Skizziere einen Kreis und zeichne verschiedene Geraden ein.
1) Wie können die Geraden zum Kreis liegen?
2) Welche Teile entstehen, wenn die Gerade den Kreis schneidet?

Eine Gerade kann einen Kreis in zwei Punkten schneiden (**Sekante**, latein: „secare“ = schneiden), in einem Punkt berühren (**Tangente**, latein: „tangere“ = berühren) oder keinen Punkt mit ihm gemeinsam haben (**Passante**, französisch: „passer“ = vorbeigehen). Eine Tangente steht normal auf den Radius im Berührpunkt.

Die Verbindungsstrecke zweier Punkte A, B der Kreislinie heißt **Sehne**. Eine Sehne, die durch den Mittelpunkt des Kreises geht, heißt **Durchmesser**. Der Durchmesser d ist die längste Sehne, mit d = 2r.

Eine Sehne s teilt den Kreis in zwei **Kreisbögen**. Die Fläche zwischen Sehne und Kreisbogen heißt **Kreissegment** (Kreisabschnitt).

Eine Fläche, die durch zwei Radien und einen Kreisbogen begrenzt wird, nennt man **Kreissektor** (Kreisausschnitt). Der Winkel α zwischen den Radien heißt **Zentriwinkel** oder **Mittelpunktswinkel**.

Das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser $\frac{u}{d}$ ist für alle Kreise konstant und wird Kreiszahl π genannt. Schon vor Jahrtausenden versuchte man, diese Zahl näherungsweise zu berechnen. Dazu wurde ein Kreis durch ein regelmäßiges Vieleck angenähert und durch Erhöhung der Anzahl der Ecken konnte π immer genauer bestimmt werden. Heute wird π durch verschiedene Algorithmen mit Computern berechnet (zB im Jahr 2010 auf ca. 5 Billionen Dezimalstellen).

Da π eine irrationale Zahl ist, hat sie unendlich viele nicht periodische Dezimalstellen. Meist wird mit den Näherungen $\pi \approx 3{,}14$ oder $\pi \approx \frac{22}{7}$ gerechnet, falls kein Taschenrechner zur Verfügung steht.

Der Umfang eines Kreises kann somit aus $\frac{u}{d} = \pi$ berechnet werden: $u = d \cdot \pi$

Zur Berechnung des Flächeninhalts teilt man den Kreis in Sektoren und legt diese nebeneinander auf. Denkt man sich diese Unterteilung unendlich fein, so ergibt sich ein Rechteck mit dem Flächeninhalt $A = \frac{u}{2} \cdot r$ und wegen $u = 2 \cdot r \cdot \pi$ erhält man $A = r^2 \cdot \pi$.

Das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser ist π (Kreiszahl, Ludolph'sche Zahl).

Umfang eines Kreises: $u = d \cdot \pi = 2 \cdot r \cdot \pi$

Flächeninhalt eines Kreises: $A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$

4.129 Stimmen folgende Aussagen? Stelle sie gegebenenfalls richtig. D

1) Eine Tangente schneidet einen Kreis in keinem Punkt.
2) Eine Sekante verbindet zwei Kreispunkte.
3) Der Durchmesser eines Kreises ist eine Sehne.
4) Ein Kreissektor wird durch eine Sehne und einen Kreisbogen begrenzt.

4.130 Wie groß ist der Winkel α? B

a) 30° **b)** 70° **c)** 50°, 20°

4.131 Welche Näherung ist die beste? BC

1) $\pi \approx \frac{22}{7}$, **2)** $\pi \approx \frac{25}{8}$, **3)** $\pi \approx \frac{355}{113}$, **4)** $\pi \approx 3{,}14$

4.132 Miss jeweils den Umfang und den Durchmesser von runden Gegenständen und berechne das Verhältnis Umfang : Durchmesser. Wie genau kannst du π bestimmen? BC

4.133 **1)** Gib an, unter welchen Bedingungen zwei Kreise kongruent sind. ABC
2) „Man kann den Punkt als Grenzfall eines Kreises interpretieren." Interpretiere diese Aussage.

4.134 Berechne die fehlenden Größen des Kreises r, d, A bzw. u. B

a) d = 328 mm **c)** r = 14 cm **e)** $A = 265\ mm^2$ **g)** u = 328 cm
b) d = 9 dm **d)** r = 20 mm **f)** $A = 5{,}64\ m^2$ **h)** u = 4,2 dm

4.135 Wie oft dreht sich das Rad eines Fahrrads auf einer Strecke mit 5 km? Lies den Durchmesser des Rads an einem Fahrrad ab und rechne damit. ABC

4.136 Ein Kreis und ein Quadrat haben denselben Flächeninhalt. Wie verhält sich der Radius des Kreises zur Seitenlänge des Quadrats? BC

4.137 Gib für Umkreis und Inkreis eines gleichseitigen Dreiecks B
a) das Verhältnis der Flächeninhalte an. **b)** das Verhältnis der Umfänge an.

4.138 Zwei 8 cm hohe Torten mit 20 cm bzw. 30 cm Durchmesser sollen vollständig glasiert werden. Wie viel Prozent mehr Glasur wird für die größere Torte benötigt? AB

AB **4.139** Ein Rundstab aus Stahl wird durch eine Zugkraft F belastet. Dabei entsteht eine Spannung σ, die mithilfe der Formel $\sigma = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$ berechnet wird. Wie groß muss der Durchmesser des Stabs (mindestens) sein, wenn die zulässige Spannung σ beträgt?

a) $F = 800\,\text{N}$, $\sigma = 145\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ **b)** $F = 5{,}4\,\text{kN}$, $\sigma = 175\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

AB **4.140** Eine runde Holzsäule wird mit einer Druckkraft F belastet. Wie groß muss der Radius der Säule bei einer zulässigen Spannung σ (mindestens) sein? Hinweis: $\sigma = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$

a) $F = 12\,000\,\text{N}$, $\sigma = 10\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ **b)** $F = 24\,\text{kN}$, $\sigma = 12\,\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

ABD **4.141** Stell dir vor, du legst ein Band um einen Fußball (∅ 22 cm), verlängerst es danach um einen Meter und legst es in einem gleich bleibenden Abstand wieder um den Fußball. Wie groß ist dieser Abstand? Nun wird ein Band um den Äquator der Erde gelegt (Radius 6 370 km) und dann um 1 m verlängert. Welchen Abstand hat das Band von der Erde? Schätze zuerst und berechne anschließend. Begründe das überraschende Ergebnis mithilfe einer Rechnung für einen beliebigen Radius r.

D **4.142** Können zwei Kreise einander so schneiden, dass der Umfang jeweils halbiert wird? Begründe deine Antwort.

AD **4.143** In der Sonntagsbeilage einer österreichischen Tageszeitung erschien am 2. Februar 2003 ein Artikel über die Zahl π. Darin wurde folgender Satz veröffentlicht:
„π ist das Verhältnis des Kreisradius zum Umfang."
Verfasse einen Leserbrief, in dem du den Satz richtig stellst. Argumentiere so, dass auch jemand, der über wenige mathematische Grundkenntnisse verfügt, deinen Argumenten folgen kann.

ABC **4.144** Berechne die Fläche (in km^2) der annähernd kreisförmigen Insel Kauai (Hawaii). Welchen Durchmesser verwendest du dabei? Recherchiere die tatsächliche Größe. Um wie viel Prozent weicht deine Berechnung ab?

Lihu'e
0 10 miles

4.5.2 Kreisteile

Die beschriebene Fläche einer CD hat die geometrische Form eines Kreisrings. Die CD hat einen Durchmesser von 12 cm. Auf einer Seite der CD befinden sich spiralförmig eingeprägte Vertiefungen und Erhöhungen (pits, lands, ca. 0,5 µm breit), mit deren Hilfe die Informationen gespeichert werden. Die Gesamtlänge der Spirale beträgt ca. 6 km. Der Bereich, auf dem Daten (ca. 700 MB) gespeichert werden können, beginnt 24 mm von der Mitte der CD aus gemessen und ist 33 mm breit, der Rest wird für andere Informationen verwendet.

AB **4.145** In folgender Abbildung sind spezielle Kreissektoren dargestellt.

120°

Gib folgende Verhältnisse an:

1) Die Länge des Bogens als Teil des Umfangs des vollen Kreises
2) Den Flächeninhalt als Teil der vollen Kreisfläche

Eine Kreisfläche kann in verschiedene Teilflächen, wie zum Beispiel Kreissektor, Kreissegment oder Kreisring, zerlegt werden.

In einem **Kreissektor** verhalten sich Bogenlänge zu Kreisumfang bzw. Sektorfläche zu Kreisfläche wie der Mittelpunktswinkel α zu 360°.

Kreisbogenlänge b:

$$b : (2r\pi) = \alpha : 360° \Rightarrow b = 2r\pi \cdot \frac{\alpha}{360°} = r\pi \cdot \frac{\alpha}{180°}$$

Kreissektorfläche A:

$$A : (r^2\pi) = \alpha : 360° \Rightarrow A = r^2\pi \cdot \frac{\alpha}{360°} \quad \text{oder} \quad A = \frac{b \cdot r}{2}$$

Die Fläche eines **Kreissegments** ergibt sich als Differenz der Kreissektorfläche und der Fläche des gleichschenkligen Dreiecks MAB.

$$A = \frac{b \cdot r}{2} - \frac{s \cdot (r - h)}{2}$$ h ... Pfeil- oder Bogenhöhe, s ... Sehnenlänge

Kreise, die denselben Mittelpunkt haben, nennt man konzentrische Kreise. Die Fläche zwischen zwei konzentrischen Kreisen wird als **Kreisring** bezeichnet. Der Flächeninhalt ist die Differenz der beiden Kreisflächen. Der Umfang des Kreisrings ist die Summe der Umfänge des äußeren und des inneren Kreises.

$$A = A_a - A_i = r_a^2\pi - r_i^2\pi = (r_a^2 - r_i^2) \cdot \pi = (r_a + r_i)(r_a - r_i) \cdot \pi$$

w ... Breite des Rings mit $w = r_a - r_i$

r_m ... mittlerer Radius mit $r_m = \frac{r_a + r_i}{2}$

u_m ... Umfang des Mittenkreises m

Damit erhalten wir weitere Formeln für den Flächeninhalt des Kreisrings:

$$A = 2 \cdot \frac{r_a + r_i}{2} \cdot w \cdot \pi = 2 \cdot r_m \cdot \pi \cdot w = u_m \cdot w$$

Kreisbogenlänge: $b = r \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{180°}$

Kreissektorfläche: $A = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360°} = \frac{b \cdot r}{2}$

Kreissegmentfläche: $A = \frac{b \cdot r}{2} - \frac{s \cdot (r - h)}{2}$

Kreisringfläche: $A = (r_a^2 - r_i^2) \cdot \pi = 2 \cdot r_m \cdot \pi \cdot w$

Umfang eines Kreisrings: $u = 2 \cdot \pi \cdot (r_a + r_i)$

Kreissektor

4.146 Berechne die fehlenden Größen A, α, b bzw. r des Kreissektors. B

a) $\alpha = 50°$, r = 4 cm
b) A = 15 cm^2, r = 3 cm
c) b = 60 mm, r = 20 mm
d) d = 24 cm, $\alpha = 210°$
e) b = 9,0 dm, $\alpha = 100°$
f) A = 640 mm^2, b = 80 mm

AB **4.147** Die äußere Leitschiene in einer Kurve soll erneuert werden. Wie lang ist sie?

a) $r = 200$ m, $\alpha = 60°$

b) $r = 450$ m, $\alpha = 35°$

AB **4.148** Berechne den Flächeninhalt der Trittstufe einer Wendeltreppe.

AB **4.149** Berechne die Länge des Seils (Maße in Zentimeter).

a) ***b)***

Kreissegment

A **4.150** Gib eine Formel für den Flächeninhalt des dargestellten Kreissegments an.

a) ***b)*** ***c)***

AB **4.151** Von einer Kreisscheibe wurde ein Segment mit der Sehnenlänge s = 100 mm und der Bogenhöhe h = 40 mm abgeschnitten. Berechne den Radius der Kreisscheibe.

Lösung:

- Aus dem rechtwinkligen Dreieck ergibt sich:

$r^2 = (r - h)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = r^2 - 2rh + h^2 + \frac{s^2}{4}$

$2rh = h^2 + \frac{s^2}{4}$

$8rh = 4h^2 + s^2$

$r = \frac{4h^2 + s^2}{8h} \qquad r = 51{,}25 \text{ mm}$

AB **4.152** Ein Fenster soll einen Stichbogen erhalten, das heißt, der obere Abschluss ist ein Kreisbogen mit der Stichhöhe (Bogenhöhe) h und der Spannweite s (Fensterbreite). Berechne den Radius des Bogens.

a) h = 20 cm, s = 100 cm ***b)*** h = 15 cm, s = 120 cm

AB **4.153** In Abb. 4.19 ist ein Fenster mit gotischem Bogen dargestellt. Berechne den Flächeninhalt des gesamten Fensters.

AB **4.154** Ein Sägeblatt mit 210 mm Durchmesser hat eine Sehnenlänge s von 97 mm (Abb. 4.20). Wie hoch ist die Schnitthöhe h?

Abb. 4.19

Abb. 4.20 Maße in Millimeter

Kreisring

4.155 Berechne den Flächeninhalt und den Umfang des Kreisrings. B

a) $r_a = 25$ cm, $r_i = 20$ cm ***c)*** $r_i = 120$ mm, $w = 30$ mm ***e)*** $r_a = 4{,}5$ dm, $w = 15$ cm
b) $d_a = 1{,}25$ m, $w = 30$ cm ***d)*** $d_i = 52$ cm, $w = 8$ cm ***f)*** $d_a = 250$ mm, $d_i = 200$ mm

4.156 Der Flächeninhalt eines 5 cm breiten Kreisrings beträgt 550 cm². Wie groß sind der innere und der äußere Radius? B

4.157 Die Querschnittsfläche eines Rohrs ist gleich groß wie der Flächeninhalt des inneren Kreises. Gib eine Formel für die Wandstärke an. AB

4.158 Ein rundes Fenster hat einen äußeren Durchmesser von 60 cm, die Rahmendicke beträgt 85 mm. Durch den Rahmen geht Lichteinstrahlung verloren. Gib den Anteil dieses Lichtverlusts in Prozent an. AB

4.159 Wie viel MB Daten können auf 1 mm² einer CD gespeichert werden? Verwende zur Beantwortung der Frage die Angaben von Seite 162. AB

4.5.3 Bogenmaß

Auf Seite 134 haben wir drei Möglichkeiten zur Winkelmessung kennengelernt. In den Naturwissenschaften und in der Technik wird der (Dreh-)winkel meist im Bogenmaß angegeben.

4.160 ***a)*** Berechne die Länge des Bogens zum Zentriwinkel $\alpha = 60°$ für r = 1 cm und r = 2 cm. Vergleiche die Bogenlängen. Was fällt dir auf? BC
b) Wie groß ist in einem Kreis mit Radius 1 cm der Zentriwinkel, wenn die Bogenlänge ebenfalls 1 cm beträgt?

Bei Kreisbögen mit verschiedenen Radien aber gleichem Zentriwinkel bleibt das Verhältnis

Bogenlänge zu Radius immer gleich: $\frac{b}{r} = \frac{\pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{180°}}{r} = \frac{\pi \cdot \alpha}{180°}$.

Dieses Verhältnis ist also nur vom Winkel α abhängig und heißt **Bogenmaß**. Um das Bogenmaß eines Winkels (α in °) anzugeben, schreibt man auch arc(α) (latein: „arcus“ = Bogen).

Das Verhältnis zweier Längen ist dimensionslos, zur Verdeutlichung wird die abgeleitete SI-Einheit Radiant (rad) verwendet. Häufig (vor allem bei Bruchteilen von π) wird beim Bogenmaß die Einheit rad weggelassen. Das Anschreiben von rad vermeidet aber Fehler.

Bogenmaß eines Winkels: $\text{arc}(\alpha) = \frac{b}{r} = \frac{\pi \cdot \alpha}{180°}$ Einheit: Radiant (rad)

1 rad entspricht jenem Winkel, bei dem die Bogenlänge b gleich lang wie der Radius r ist.

$b = r \Rightarrow 1 = \frac{\pi \cdot \alpha}{180°} \Rightarrow \alpha = \frac{180°}{\pi} \approx 57{,}3°$ also: $1 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi} \approx 57{,}3°$

Das Bogenmaß für den vollen Winkel von 360° ist 2π rad, π rad entspricht daher 180°.

Das Bogenmaß kann mithilfe eines **Einheitskreises** (Kreis mit Radius r = 1 Einheit) veranschaulicht werden. Die Maßzahl der Bogenlänge x eines Winkels entspricht in diesem Fall genau dem Bogenmaß dieses Winkels. Man könnte also das Bogenmaß am Kreisbogen „abmessen“.

Geometrie der Ebene

Umrechnungen

Zur besseren Unterscheidung bezeichnen wir das Gradmaß eines Winkels mit α und das Bogenmaß mit x.

Gradmaß in Bogenmaß

$1° = \frac{\pi}{180}$ rad $\qquad x = \alpha \cdot \frac{\pi}{180°}$ rad

Bogenmaß in Gradmaß

$1 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi} \qquad \alpha = x \cdot \frac{180°}{\pi}$

Die Zusammenhänge zwischen den Winkelmaßen können am Einheitskreis veranschaulicht werden.

$90° = \frac{\pi}{2}$ rad

$180° = \pi$

$0° = 0$ rad

$360° = 2\pi$

$270° = \frac{3\pi}{2}$

Umrechnung häufig gebrauchter Winkel:

Gradmaß	0°	30°	45°	60°	90°
Bogenmaß in rad	0	$\frac{\pi}{6}$ ≈ 0,5	$\frac{\pi}{4}$ ≈ 0,8	$\frac{\pi}{3}$ ≈ 1	$\frac{\pi}{2}$ ≈ 1,57

TE Auf dem Taschenrechner müssen die unterschiedlichen Winkelmaße eingestellt werden. Meist wird das Gradmaß mit DEG (degree), das Bogenmaß mit RAD (radian) und die Angabe in Gon (Neugrad) mit GRAD gekennzeichnet.

B **4.161** Berechne das Bogenmaß bei einer Bogenlänge b und einem Radius r. Welchem Winkel im Gradmaß entspricht das Bogenmaß?

a) b = 20 cm, r = 10 cm **b)** b = 10 m, r = 50 cm **c)** b = 300 m, r = 20 cm

BC **4.162** Wie vielen Umdrehungen entspricht das gegebene Bogenmaß in etwa?

a) 4π **b)** 12π **c)** 7π **d)** 6 rad **e)** 628 rad **f)** 1 580 rad

B **4.163** Gib das Bogenmaß des Winkels an.

a) 15° **b)** 55° **c)** 78° **d)** 167,5° **e)** 295° **f)** 400°

BC **4.164** **1)** Markiere im Einheitskreis ungefähr den im Bogenmaß gegebenen Winkel.
2) Rechne den Winkel ins Gradmaß um und vergleiche mit deinem Ergebnis aus **1)**.

a) 2 rad **b)** –1 rad **c)** 5 rad **d)** $\frac{\pi}{5}$ **e)** $\frac{2\pi}{7}$ **f)** 3π

BD **4.165** **a)** Zeige, dass die vorgegebenen Umrechnungen der Tabelle richtig sind.
b) Ergänze die fehlenden Werte.

Gradmaß	0°	30°	45°	60°	90°	120°		180°	225°	270°		360°
Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$				$\frac{11\pi}{6}$	

AB **4.166** Der Quotient $\omega = \frac{\text{Änderung des Drehwinkels (in rad)}}{\text{dafür benötigte Zeit}}$ wird als Winkelgeschwindigkeit bezeichnet.
Wie groß ist ω, wenn ein Rad mit 40 cm Durchmesser in 10 Sekunden eine Strecke von 200 m zurücklegt?

AB **4.167** Welchen Drehwinkel im Bogenmaß legt ein Rad mit der Drehzahl n = 400 Umdrehungen pro Minute in 3 Sekunden zurück?

Zusammenfassung

Ein einseitig begrenztes Geradenstück heißt **Strahl** (Halbgerade), ein zweiseitig begrenztes Geradenstück heißt **Strecke**.

Ein **Winkel** wird von zwei Schenkeln, die von einem Punkt (Scheitel) ausgehen, gebildet.

Einheiten der Winkelmessung: $1° = \frac{1}{90}$ eines rechten Winkels

Die Unterteilung von 1° erfolgt in Minuten und Sekunden oder dezimal.
Weiteres Winkelmaß: Gon, rechter Winkel = 100^g

α, β heißen supplementär, wenn $\alpha + \beta = 180°$; α, β heißen komplementär, wenn $\alpha + \beta = 90°$.

Winkelpaare: Neben-, Scheitel-, Parallel-, Normalwinkel

Zwei Figuren heißen **kongruent**, wenn entsprechende Seiten und Winkel gleich groß sind. Sie heißen **ähnlich**, wenn entsprechende Winkel gleich groß sind und entsprechende Seiten im selben Verhältnis stehen.

Der **Maßstab** gibt an, wie sich eine Länge in einem Modell (Plan) zur zugehörigen Länge in der Wirklichkeit verhält.

Dreieck

Die Winkelsumme im Dreieck ist 180°, die Dreiecksungleichung muss erfüllt sein.
Kongruenzsätze: SSS-, SWS-, SSW- und WSW-Satz
Merkwürdige Punkte: Höhenschnittpunkt, Schwerpunkt, Umkreismittelpunkt (Schnittpunkt der Seitensymmetralen), Inkreismittelpunkt (Schnittpunkt der Winkelsymmetralen)

Flächeninhalt: $A = \frac{\text{Seite} \cdot \text{zugehörige Höhe}}{2}$

Heron'sche Flächenformel: $A = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$ mit $s = \frac{u}{2} = \frac{a + b + c}{2}$

Rechtwinkliges Dreieck: Ein Winkel hat 90°, die Hypotenuse liegt diesem gegenüber.
Satz von Thales: Jeder Winkel im Halbkreis ist ein rechter Winkel.
Satz von Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$
Kathetensatz: $a^2 = c \cdot p$, $b^2 = c \cdot q$ Höhensatz: $h^2 = p \cdot q$

Gleichschenkliges Dreieck: Zwei Seiten (Schenkel) sind gleich lang.

Gleichseitiges Dreieck: Alle Seiten sind gleich lang, die Innenwinkel betragen jeweils 60°.
$h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$ $A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$

Strahlensätze

1. Strahlensatz:
$\overline{SA_1} : \overline{SA_2} = \overline{SB_1} : \overline{SB_2}$
$\overline{SA_1} : \overline{A_1A_2} = \overline{SB_1} : \overline{B_1B_2}$

2. Strahlensatz:
$\overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2} = \overline{SA_1} : \overline{SA_2}$
$\overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2} = \overline{SB_1} : \overline{SB_2}$

Viereck und Vieleck

Die Winkelsumme im Viereck ist 360°.
Besondere Vierecke: Trapez, Parallelogramm, Rechteck, Deltoid, Raute, Quadrat
Winkelsumme im n-Eck: $(n - 2) \cdot 180°$
Bei regelmäßigen Vielecken sind die Seitenlängen und Innenwinkel jeweils gleich groß.

Geometrie der Ebene

Kreis und Kreisteile

Ein Kreis ist die Menge aller Punkte, die von einem Punkt (Mittelpunkt) den gleichen Abstand (Radius) haben.

Umfang: $u = d \cdot \pi = 2 \cdot r \cdot \pi$ Flächeninhalt: $A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$

Sehne: Verbindungsstrecke zweier Kreispunkte

Kreissektor: durch zwei Radien und einen Kreisbogen begrenzter Kreisteil

Bogenlänge: $b = r \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{180°}$ Flächeninhalt: $A = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360°} = \frac{b \cdot r}{2}$

Kreissegment: Fläche zwischen Sehne und Kreisbogen $A = \frac{b \cdot r}{2} - \frac{s \cdot (r - h)}{2}$

Kreisring: Fläche zwischen zwei konzentrischen Kreisen $A = (r_a{}^2 - r_i{}^2) \cdot \pi = 2 \cdot r_m \cdot \pi \cdot w$

Bogenmaß: $\mathrm{arc}(\alpha) = \frac{b}{r} = \frac{\pi \cdot \alpha}{180°}$, Einheit: rad $180° = \pi$ rad

Umrechnungen: $x = \alpha \cdot \frac{\pi}{180°}$ rad $\alpha = x \cdot \frac{180°}{\pi}$

Weitere Aufgaben

BD **4.168** Beantworte für die skizzierte Figur und begründe deine Antwort.

1) Ist der gegebene Winkel spitz, stumpf oder erhaben?

2) Welche Art von Winkelpaar bildet der gegebene Winkel mit α bzw. β?

3) Gib die Größe der Winkel α und β an.

a) ***b)*** ***c)***

C **4.169** Palindrome (altgriechisch: „rückwärts laufend“) sind Wörter oder Sätze, die auch von rechts nach links gelesen einen Sinn ergeben wie zum Beispiel „Regal“ und „Lager“. Gib drei Palindrome an, die über eine „Symmetrieachse“ verfügen, und zeichne diese ein.

B **4.170** Rechne in die fehlenden Winkelmaße um.

Gradmaß	45°				80°		200°
Gon		150^g		70^g			
Bogenmaß			$\frac{5\pi}{4}$ rad			1,5 rad	

AB **4.171** Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks (Maße in Meter) möglichst geschickt.

a) ***b)*** ***c)***

4.172 Eine Seite eines Parallelogramms ist 320 mm lang, der Flächeninhalt beträgt 448 cm^2. Berechne die zugehörige Höhe des Parallelogramms. **B**

4.173 Die Seite a eines gleichschenkligen Trapezes ist 78 mm lang, die Seite c ist 50 mm lang und die Höhe h beträgt 36 mm. **B**
a) Berechne den Flächeninhalt des Trapezes.
b) Wie lang sind die Seiten b und d?

4.174 Eine Diagonale einer Raute ist 26 dm lang und die Seitenlänge beträgt 40 dm. Berechne den Flächeninhalt. **B**

4.175 Wie lang ist die Seite eines Quadrats, das flächeninhaltsgleich zu einem Rechteck mit a = 9 m und b = 25 m ist? **AB**

4.176 Gib die Längen der gekennzeichneten Strecken an (Maße in Meter). **AB**
a) ***b)*** ***c)***

4.177 Berechne den Flächeninhalt eines Kreises mit dem Umfang u = 30 cm. **B**

4.178 Berechne die Bogenlänge und den Flächeninhalt eines Kreissektors mit dem Radius r = 35 cm und dem Zentriwinkel α = 130°. **B**

4.179 Ein Kreis mit dem Radius r = 12 cm wird durch eine Sehne mit der Länge s = 9 cm in zwei Teile geteilt. **BCD**
1) Wie heißen diese Teile?
2) Berechne die Bogenhöhe. Begründe, warum es zwei Lösungen gibt.

4.180 Ein Rohr mit einem Innendurchmesser von 100 mm hat eine Wandstärke von 20 mm. Welchen Inhalt hat die Querschnittsfläche des Rohrs? **AB**

4.181 Marianne möchte ein Bild an eine Wand malen. Dazu zeichnet sie eine Vorlage auf eine Folie und projiziert das Bild auf die Wand. Die Vorlage ist 16 cm hoch und das Wandbild soll 1 m groß werden. Wie weit von der Wand entfernt muss die Vorlage platziert werden, wenn sich die Lichtquelle 40 cm hinter der Vorlage befindet? Beschreibe den Rechenweg. **ABC**

4.182 Der Lichtkegel einer Lampe hat einen Öffnungswinkel von 60°. Die Lampe strahlt auf eine Wand mit der Entfernung d von der Lichtquelle. **AB**
1) Wie groß ist der Inhalt der beleuchteten Fläche für d = 2,0 m?
2) Gib eine Formel für den Flächeninhalt der beleuchteten Fläche, ausgedrückt durch die Entfernung d, an.

AB **4.183** Berechne den Flächeninhalt des in Abb. 4.21 dargestellten Pultdachs, wenn die Länge des Hauses 12 m beträgt.

AB **4.184** Drei Kabel mit einem Radius von r = 2 mm sollen von einem Kunststoffrohr eingeschlossen werden (Abb. 4.22).
1) Wie groß ist dessen Radius R?
2) Berechne den prozentuellen Anteil der dadurch entstehenden Hohlräume am Gesamtvolumen.

B **4.185** Die Ecken eines Verkehrsschilds sind abgerundet (Abb. 4.23). Welchen Flächeninhalt hat das Schild, wenn die Seitenlänge a = 900 mm und der Radius r = 20 mm betragen?

Maße in Meter
Abb. 4.21

Abb. 4.22

Abb. 4.23

ABC **4.186** Lukas bastelt einen Drachen. Die Streben haben eine Länge von 60 cm bzw. 80 cm und werden 20 cm vom oberen Ende verknotet. Danach wird von Eckpunkt zu Eckpunkt eine Schnur gespannt. Zur Befestigung wird das Papier an dieser Schnur umgeschlagen, daher muss mit einer Zugabe von 3 cm gerechnet werden (Abb. 4.24).
a) Wie lang muss die Schnur mindestens sein?
b) Wie hoch und breit muss der Papierbogen, aus dem der Drachen geschnitten wird, mindestens sein? Wie viel Papier wird dann tatsächlich benötigt?

Maße in Zentimeter
Abb. 4.24

AB **4.187** Berechne die Querschnittsfläche des in Abb. 4.25 dargestellten Tunnels mit a = 6,0 m und h = 1,5 m.

ABC **4.188** In Abb. 4.26 ist der Deckel einer Kaffeekanne dargestellt. Wie groß ist der Flächeninhalt des Deckels (Maße in Millimeter)? Beschreibe deinen Rechenweg.

AB **4.189** Bestimme die Längen der Scheren des in Abb. 4.27 dargestellten Hubtisches (Maße in Meter).

Abb. 4.25

Abb. 4.26

Abb. 4.27

D **4.190** Zeige, dass ein Blatt Papier im Format A3 (29,7 cm x 42 cm) ähnlich zu einem A4-Blatt (21 cm x 29,7 cm) ist. Wie verhalten sich die Flächeninhalte der Blätter zueinander?

4.191 Berechne den Flächeninhalt der Figur (Maße in Millimeter).

a) ***b)*** ***c)*** ***d)***

4.192 Berechne die Längen der gekennzeichneten Stäbe des Strommasts aus Abb. 4.28. Die Knoten befinden sich jeweils in den Seitenmitten.

4.193 In Abb. 4.29 ist ein Teil eines Walmdachs dargestellt (Maße in Meter).

a) Berechne den Flächeninhalt des Walms.

b) Wie lang ist der Gratsparren?

Abb. 4.28

Abb. 4.29

4.194 Eine Dartscheibe (Abb. 4.30) ist in 20 gleich große Sektoren geteilt, die wiederum durch Kreisringe unterteilt sind. In der Mitte befinden sich das BullsEye (50 Punkte) und als Ring das SingleBull (25 Punkte). Trifft ein Dart in den inneren schmalen Ring (Triple), so wird die außen angeschriebene Punktezahl verdreifacht, bei einem Treffer im äußeren Ring (Double) wird sie verdoppelt.

1) Berechne den Flächeninhalt der einzelnen Felder, entnimm die Abmessungen der Abb. 4.31.

2) Berechne das Verhältnis des Flächeninhalts der Tripel 20 zum Flächeninhalt der gesamten Dartscheibe.

Abb. 4.30

Abb. 4.31 Maße in Millimeter

AB **4.195** Bestimme die Größe der Wandfläche.

a) **b)**

Abb. 4.32 Maße in Meter

AB **4.196** Berechne den Gesamtflächeninhalt des Dachs aus Abb. 4.32. Alle Dachflächen haben die gleiche Neigung.
Hinweis: Die Grundrisse der Schnittgeraden sind Winkelsymmetralen der Traufengrundrisse. Die Höhe des Nebendachs kann mithilfe des Strahlensatzes ermittelt werden.

ABC **4.197** Bei einer Bauaufnahme wurde die Skizze eines Zimmers (Abb. 4.33) gezeichnet.
a) Hat das Zimmer einen rechteckigen Grundriss?
b) Berechne den Flächeninhalt des Zimmers.

Abb. 4.33 Maße in Zentimeter

ABCD **4.198** Teile die Seiten eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a in drei gleiche Teile und verbinde die Teilungspunkte mit dem Mittelpunkt des Dreiecks.
1) Welche verschiedenen Figuren entstehen, wie viele davon sind jeweils kongruent?
2) Wie lang sind die Seiten der verschiedenen Figuren?
3) Berechne den Flächeninhalt der Figuren allgemein.

ABCD **4.199** Zeichne in einem Kreis mit $r = 2{,}5$ cm einen Radius ein und verlängere diesen um 4 cm. Zeichne von dem erhaltenen Punkt aus die Tangenten an den Kreis und verbinde die Berührungspunkte mit dem Mittelpunkt des Kreises.
1) Welches Viereck entsteht? Begründe deine Antwort.
2) Berechne die Seitenlängen und den Flächeninhalt des Vierecks.
3) Wie lang ist die Sehne, die die beiden Berührungspunkte verbindet?
Hinweis: Verwende den Flächeninhalt des Vierecks.

D **4.200** Beweise **a)** die Kathetensätze **b)** den Höhensatz mithilfe ähnlicher Dreiecke.
Hinweis: Teile das rechtwinklige Dreieck durch die Höhe in zwei Teildreiecke. Bilde dann die entsprechenden Seitenverhältnisse.

ABCD **4.201** Ursprünglich wurde ein Meter als 10 000 000ster Teil der Länge des halben Erdmeridians (Strecke vom Pol zum Äquator) durch Paris festgelegt.
1) Welcher Erdumfang und Erdradius ergeben sich aus dieser Festlegung? Vergleiche das Ergebnis mit den heute gültigen Daten.
2) Wie viel Kilometer ist der auf diesem Meridian gemessene Kreisbogen bei einem Winkel von 1^g bzw. 1° lang?
3) Zeige, dass eine Seemeile (1 sm ≈ 1 852 m) der Länge einer Bogenminute auf diesem Meridian entspricht. Wie viele Seemeilen ist dann der Kreisbogen zum Winkel 1° lang?
4) Bestimme die Entfernung zwischen Bregenz (47° 30′ N, 9° 44′ O) und Hannover (52° 22′ N, 9° 44′ O) zuerst in Seemeilen und dann in Kilometer.

Wissens-Check

		gelöst
1	Ich weiß, wieso es kein rechtwinkliges gleichseitiges Dreieck geben kann.	
2	Bei den folgenden Zahlen handelt es sich um ein pythagoräisches Tripel: A) 9, 40, 41 ◯ wahr ◯ falsch B) 20, 21, 29 ◯ wahr ◯ falsch	
3	Ein Winkel α und sein Scheitelwinkel β werden halbiert. Welchen Winkel schließen die Winkelhalbierenden ein? ◯ α ◯ β ◯ 90° ◯ 180° ◯ $(\alpha + \beta)$	
4	Beschreibe mit eigenen Worten die Gemeinsamkeiten und die Unterschiede. A) Rechteck und Quadrat C) Trapez und Raute B) Quadrat und Trapez D) Raute und Deltoid	
5	Eine Strecke von 2 cm im Maßstab 1 : 75 000 ist in Wirklichkeit ... km lang.	
6	Welche der folgenden Aussagen sind falsch? Begründe deine Antwort. A) Ein Trapez kann einen, zwei, drei oder vier rechte Winkel haben. B) Zur Konstruktion eines Parallelogramms genügen immer drei Angaben. C) Eine Raute ist immer auch ein Parallelogramm. D) Das Quadrat ist ein Spezialfall eines Trapezes. E) Ein Deltoid kann einen rechten Winkel haben. F) Die Summe der Innenwinkel eines Vierecks mit einspringenden Ecken ist größer als 360°, abhängig von der Größe des Innenwinkels der einspringenden Ecke.	
7	Welche der folgenden Gleichungen lassen sich zu im Abschnitt 4 gezeigten Formeln umformen? A) $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$ B) $r = \frac{2\pi}{u}$ C) $r = \frac{2A}{b}$ D) $r = \frac{180° \cdot b}{\alpha \cdot \pi}$	
8	Eine gute Näherung für π ist . , . . . bzw. $\frac{.}{.}$.	
9	Ich kann die Formeln für Flächeninhalt und Umfang der Figur angeben. A) Dreieck B) Deltoid C) Trapez D) Raute E) Kreis	

Lösung:
1) siehe Seite 147   2) A) wahr; B) wahr   3) 90°   4) siehe Seite 153   5) 1,5
6) A) Falsch; ein Trapez kann nicht drei rechte Winkel haben. B) Falsch, drei Winkel genügen zum Beispiel nicht.
C) richtig; D) richtig; E) richtig; F) Falsch, siehe Seite 152   7) siehe Seite 168   8) 3,14 bzw. $\frac{22}{7}$
9) siehe Seite 141, Seite 153, Seite 161.

5 Funktionen

Das Erfassen von Zusammenhängen zwischen mehreren Größen ist eine wichtige Aufgabe der Mathematik. Das älteste dazu verwendete Darstellungsmittel sind Tabellen. Sie wurden schon 2000 v. Chr. von den Babyloniern verwendet. Für Zusammenhänge, die empirisch, das heißt durch Beobachtung, zustande kommen, ist die grafische Darstellung ein wertvolles Hilfsmittel zur Veranschaulichung und Interpretation. Physikalische und technische Zusammenhänge werden meist als Formel angegeben und sind dadurch für Berechnungen und Auswertungen nützbar.

USD
1,500
1,375
1,250
1,125
1,000
0,875
2002 2003 2004 2005 2006 2007 2008 2009 2010 2011

Euro/US Dollar-Kurs

Im 17. Jh. tauchte erstmals das Wort **Funktion** für die Beschreibung des Zusammenhangs zwischen veränderlichen Größen auf. Die heute verwendete Definition entstand aus dem Bestreben der modernen Mathematik, den Begriff Funktion möglichst allgemein, aber trotzdem präzise zu erfassen.

5.1 Grundbegriffe

Unter einer Funktion versteht man eine eindeutige Zuordnung zwischen Elementen zweier Mengen. Zum Beispiel hängt der Treibstoffverbrauch eines Schiffs von vielen Einflussgrößen wie der Geschwindigkeit, der Ladung des Schiffs, dem Wellengang, dem Salzgehalt des Wassers usw. ab. Möchte man nur den Einfluss des Salzgehalts genauer untersuchen, hält man alle anderen Einflussgrößen konstant. Der Treibstoffverbrauch hängt somit nur mehr vom Salzgehalt ab. Man kann dann jedem Wert für den Salzgehalt genau einen Wert für den Treibstoffverbrauch zuordnen und erhält Wertepaare (Salzgehalt|Treibstoffverbrauch).

ACD **5.1** Um Handy-Kosten besser kontrollieren zu können, wurden die Kosten im Lauf eines Tags aufgezeichnet.

1) Welche Höhe erreichten die Kosten um 11:00 Uhr?
2) Um wie viel Uhr erreichten die Kosten 3,00 €?
3) Was bedeuten die waagrechten Strecken?
4) Warum sind die Steigungen nicht immer gleich?
5) Wann wurde am längsten telefoniert?
6) Wann endete das teuerste Gespräch?
7) Warum gibt es keine senkrechten Strecken? Was würden sie bedeuten?
8) Welche Werte sind für die Uhrzeiten bzw. die Kosten sinnvoll?

Telefongespräche eines Tags
€ Kosten
6,00
5,00
4,00
3,00
2,00
1,00
00:00 02:00 04:00 06:00 08:00 10:00 12:00 14:00 16:00 18:00 20:00 22:00 00:00 Uhrzeit

Bezeichnungen und Darstellungsformen

ZB: Bei der Verbrennung von einem Kilogramm Kerosin entstehen unter anderem 3,15 kg Kohlendioxid. Wir stellen die Abhängigkeit der entstandenen Kohlendioxidmenge M von der verbrauchten Kerosinmenge K dar.

Eine Boeing 747-400 erzeugt am Flug von Frankfurt am Main nach New York rund 252 t Kohlendioxid.

- Darstellung als **Wertetabelle**

Kerosinverbrauch K in kg	Kohlendioxid-ausstoß M in kg
100	315
200	630
500	1 575
800	2 520
1 000	3 150

Zu jedem in der linken Spalte angegebenen Kerosinverbrauch lässt sich der in der rechten Spalte angegebene Kohlendioxidausstoß eindeutig berechnen. Die entstehenden Wertepaare erfüllen den gegebenen Zusammenhang. Eine solche **eindeutige Zuordnung** nennt man **Funktion**. Die Werte, die dabei für den Kerosinverbrauch sinnvollerweise in Frage kommen, nennt man **Definitionsmenge D_f**, die daraus errechneten Kohlendioxidmengen bilden die **Wertemenge W_f**.

Oft wird auch eine Menge, die die tatsächliche Wertemenge als Teilmenge enthält, als Wertemenge oder Wertebereich bezeichnet.

- Angabe mit einer **Formel** (**Funktionsgleichung**)

Um anzugeben, dass der Kohlendioxidausstoß M vom Kerosinverbrauch K abhängt, schreibt man auch M(K) [sprich: „M von K“].

$M(K) = 3{,}15 \cdot K$ Durch Einsetzen in diese Formel können **Wertepaare** ermittelt werden,
zB: $K = 800\text{ kg} \Rightarrow M(800\text{ kg}) = 3{,}15 \cdot 800\text{ kg} = 2\,520\text{ kg}$

Ein Kerosinverbrauch von 800 kg führt zu einem Kohlendioxidausstoß von 2 520 kg.

- **Grafische Darstellung** in einem Koordinatensystem

Werden alle **Wertepaare** als Punkte in ein Koordinatensystem eingetragen, entsteht ein **Funktionsgraph**. Die Werte der **unabhängigen Variablen** (erste Koordinate) werden auf der waagrechten Achse aufgetragen. Die Werte der zugeordneten Größe, der **abhängigen Variablen** (zweite Koordinate), werden auf der senkrechten Achse aufgetragen.

> Eine **Funktion f** ist eine **Zuordnung**, die **jedem** Element **x** der Definitionsmenge D_f **genau ein** Element **y** der Wertemenge W_f zuordnet. Einander zugeordnete Werte bilden Wertepaare; sie können in einer **Wertetabelle** aufgelistet werden. Als Punkte im Koordinatensystem veranschaulicht bilden sie den **Funktionsgraphen**. Wird die Zuordnung durch eine Formel angegeben, spricht man von der **Funktionsgleichung**.

Übliche Bezeichnungen und Schreibweisen:
f ... Funktion
x ... unabhängige Variable, Stelle, Argument
y, y(x), f(x) ... abhängige Variable oder Funktionswert

Angabe einer Funktionsgleichung:
$y = f(x)$ oder $y = y(x)$
Angabe als Zuordnungsvorschrift:
$f\colon D_f \to W_f$
$x \mapsto f(x)$

Funktionen

Diskrete und stetige Definitionsmengen

ZB: Auf einem Bauernmarkt kostet 1 kg Landbrot 3,50 €. Das Brot wird nicht nur in abgepackten 1-kg-Wecken, sondern auch als „Meterbrot" angeboten, das heißt man kann von einem langen Brot ein beliebig großes Stück abgeschnitten bekommen, das dann abgewogen wird. In beiden Fällen kann der gekauften Menge x eindeutig ein Preis P zugeordnet werden, der nach der Formel $P(x) = 3{,}50\,\frac{€}{kg} \cdot x$ berechnet werden kann.

Beim Kauf von 1-kg-Wecken kann x die Werte 1, 2, 3 ... n kg annehmen. (Denk dir für n eine natürliche Zahl, die eine sinnvolle Obergrenze für die gekaufte Brotmenge angibt.) Eine aus einzelnen Zahlenwerten bestehende Menge nennt man **diskret**.
Der zugehörige Funktionsgraph besteht aus einzelnen Punkten.
Definitionsmenge $D_f = \{1, 2, 3 \ldots n\}$

Beim Kauf von Meterbrot muss x keine ganze Zahl sein, sondern kann beliebige positive Werte annehmen (bis zu einer mit n bezeichneten sinnvollen Obergrenze für die Brotmenge). Eine aus einem durchgehenden Bereich auf der Zahlengeraden bestehende Menge nennt man **stetig**.
Der zugehörige Funktionsgraph ist eine Linie.
Definitionsmenge $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant n\}$

Funktion – Relation

Abb. 5.1 zeigt den Zusammenhang zwischen dem Luftdruck und der Höhe über dem Meeresspiegel (Barometrische Höhenformel). Ist ein bestimmter Luftdruck gegeben, so kann die zugehörige Höhe immer eindeutig ermittelt werden.

Abb. 5.1

Abb. 5.2 zeigt den Zusammenhang zwischen der Temperatur und der Höhe. Eine Temperatur von −60 °C kann sowohl in einer Höhe von ca. 75 km auftreten als auch in ca. 100 km Höhe. Bei Angabe einer Temperatur kann die zugehörige Höhe nicht eindeutig ermittelt werden, es sind mehrere Antworten richtig. Die rot eingezeichnete Senkrechte bei −60 °C schneidet den Graphen in mehr als einem Punkt. Diese (allgemeinere) Form der Zuordnung nennt man **Relation**.

Abb. 5.2

Eine Funktion ist eine spezielle Relation, so wie zum Beispiel ein Quadrat ein spezielles Rechteck ist. Eine Relation ist nur dann eine Funktion, wenn die Zuordnung eindeutig ist.

Können **einem Element** der Definitionsmenge **mehrere Elemente** der Wertemenge **zugeordnet** werden, spricht man von einer **Relation**.

5.2 Welche Grafik stellt die Geschwindigkeit der Bahn auf dem gekennzeichneten Streckenstück dar?
Begründe deine Antwort. Erkläre, warum die beiden anderen Grafiken nicht in Frage kommen.

ACD

A) Geschwindigkeit – Weg

B) Geschwindigkeit – Weg

C) Geschwindigkeit – Weg

5.3 Die unten im Querschnitt dargestellten Gefäße werden gleichmäßig mit Wasser gefüllt. Schreibe zu jeder Grafik, die den Anstieg des Wassers im Gefäß wiedergibt, den Buchstaben des passenden Gefäßes. Zu einem Gefäß gibt es keine passende Grafik, ergänze sie.

ZB: Querschnitt – Füllhöhe, Zeit

C

A) B) C) D) E) F)

1) Füllhöhe – Zeit
2) Füllhöhe – Zeit
3) Füllhöhe – Zeit
4) Füllhöhe – Zeit
5) Füllhöhe – Zeit

5.4 Handelt es sich bei der folgenden Zuordnung um eine Funktion? Begründe deine Antwort.

D

a) Den Schülerinnen und Schülern einer Klasse werden die Katalognummern zugeordnet.
b) Den Schülern und Schülerinnen einer Klasse werden die jeweils gewählten Freigegenstände zugeordnet.
c) Den natürlichen Zahlen werden ihre Teiler zugeordnet.
d) Der Zeit nach dem Fallenlassen einer Kugel wird die momentane Höhe zugeordnet.
e) Dem Strom wird die Spannung bei konstantem Widerstand R =10 Ω zugeordnet.
f) Den Sitzplätzen im Theater wird der Preis für die Karte zugeordnet.

5.5 Ergänze die fehlende Menge und gib an, ob die Definitionsmenge diskret oder stetig ist.

BC

	Funktionsgleichung	Definitionsmenge	Wertemenge	diskret	stetig
a)	$y = x^2$	[0; 3]			
b)	$y = x - 3$	{–2, 0, 2, 4, 6}			
c)	$y = \frac{x}{2}$		[0; 10]		
d)	$y = x + 5$		{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}		

CD **5.6** Gib an, ob es sich beim dargestellten Zusammenhang zwischen zwei Größen um eine Funktion handelt. Begründe deine Antwort.

a) ***b)*** ***c)*** ***d)***

CD **5.7** Welche der angegebenen Relationen sind Funktionen? Begründe deine Antwort.

1)

x	y
1	2
2	4
3	6
4	8

2)

x	y
1	2
1	4
4	3
4	5

3)

x	y
1	2
2	2
3	2
4	2

ABC **5.8** TE Während der Sommermonate wurden die Ozonwerte in einer österreichischen Kleinstadt gemessen. Steigen diese über 180 µg Ozon pro m^3 Luft, so überschreiten sie die so genannte Informationsschwelle, über 240 $\frac{\mu g}{m^3}$ wird Ozonalarm gegeben.

Uhrzeit	0:00	2:00	4:00	6:00	8:00	10:00	12:00	14:00	16:00	18:00	20:00	22:00	24:00
Ozonwert in $\frac{\mu g}{m^3}$	88	76	71	83	108	156	193	234	251	246	210	150	99

1) Erstelle eine Wertetabelle mit den angegebenen Wertepaaren und stelle den Verlauf der Ozonwerte grafisch als Streckenzug dar.
2) Um wie viel Uhr wurde die Informationsschwelle überschritten?
3) Um wie viel Uhr musste Ozonalarm gegeben werden bzw. wann erfolgte die Entwarnung?
Hinweis: Technologieeinsatz (TE) siehe Seite 309

AB **5.9** Ein Ball fällt aus einem in 54 m Höhe befindlichen Fenster im 18. Stock eines Hochhauses. Die Höhe des Balls nach der Zeit t (in Sekunden) wird durch die Funktionsgleichung

$h(t) = 54\ \text{m} - \frac{g}{2} \cdot t^2$ (g ... Erdbeschleunigung; $g \approx 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

beschrieben. Berechne die Höhe nach 1, 2 und 3 Sekunden. Trage die Werte in eine Tabelle ein.

ABC **5.10** Bio-Orangen kosten pro Kilogramm 2,10 €.
1) Erstelle eine Wertetabelle für x = 1, 2, 3, 4, 5 kg.
2) Gib eine Funktionsgleichung zur Berechnung des Preises P an.
3) Stelle den Funktionsgraphen für $x \leqslant 10$ kg dar, wenn die Orangen wie unter ***a)*** bzw. ***b)*** angegeben verkauft werden.
4) Gib an, ob die Definitionsmenge diskret oder stetig ist.

a) in Säckchen zu 2 kg ***b)*** lose (dh. in annähernd beliebiger Menge, nicht abgepackt)

5.11 Der Handytarif Billy15 bietet Gebühren von 0,15 € pro Minute in fremde Netze bei sekundengenauer Abrechnung an.

AB

1) Ergänze in der Tabelle die Preise bzw. Zeitangaben.
2) Erstelle eine Formel für den Preis P.
x ... Gesprächsdauer in Minuten.
3) Stelle den Zusammenhang in einem geeigneten Koordinatensystem grafisch dar.

Gesprächsdauer in Minuten	Gebühren in Euro
1	0,15
5	
	1,5
20	
	7,5

5.12 Superbenzin kostet 1,383 € pro Liter. An der Zapfsäule fließen 0,4 Liter pro Sekunde in den Tank.

ABC

1) Gib eine Formel für den Preis an. Erstelle eine Wertetabelle für den Preis von Mengen von 0 bis 45 Liter in 5-Liter-Schritten, trage die Wertepaare in ein Diagramm ein und zeichne den Graphen (5 Liter ≙ 1 cm; 5,00 € ≙ 1 cm).
2) Erstelle eine Formel für die Benzinmenge B (in Litern) im Tank nach einer Tankzeit t (in Sekunden), wenn vor dem Beginn des Tankens noch 7 Liter im Tank waren. Gib eine Wertetabelle an (0 bis 3 Minuten in 20-Sekunden-Schritten).
3) Erstelle eine Formel zur Berechnung der Zeit t, die nötig ist, um eine Benzinmenge N (in Liter) zu tanken. Welche Werte von N kannst du sinnvollerweise einsetzen, wenn das Auto einen 55-Liter-Tank hat und du berücksichtigst, dass bereits 7 Liter im Tank waren? Schreibe die Definitionsmenge an. Welche Werte für die Zeit t sind daher möglich? Gib die Wertemenge an.

5.13 Das neue Aquarium in der Aula einer HTL, das 2 m^2 Grundfläche hat, wird gefüllt. Im Diagramm ist eingezeichnet, wie sich die Höhe des Wasserstands mit der Zeit ändert. Um 11:40 Uhr ist das Aquarium voll.

ABCD

1) Was kannst du über die Höhe des Aquariums aussagen?
2) Was ist zwischen 9:50 Uhr und 10:10 Uhr passiert?
3) Ist immer gleich viel Wasser pro Minute zugeflossen?
4) Wann wäre das Aquarium voll gewesen, wenn der Zufluss um 9:50 Uhr ohne Unterbrechung und mit gleicher Zuflussmenge wie zwischen 9:00 Uhr und 9:50 Uhr fortgesetzt worden wäre?
5) Ist der angegebene Streckenzug realistisch? Begründe deine Antwort.
6) Trage in einem Diagramm die Füllmenge in Litern zu den oben angegebenen Uhrzeiten ein.
7) Wie viel Liter Wasser fasst das Aquarium?
8) Wie viel Liter Wasser sind zwischen 9:00 Uhr und 9:50 Uhr bzw. zwischen 10:50 Uhr und 11:40 Uhr im Schnitt pro Minute zugeflossen?

5.2 Lineare Funktionen

5.2.1 Grundbegriffe

ABC **5.14** Stahlseile werden auf großen Holztrommeln geliefert. Eine Rolle mit 100 m Stahlseil wiegt 220 kg. Werden auf die gleiche Holztrommel 200 m Stahlseil aufgewickelt, beträgt die Gesamtmasse 390 kg.

1) Wie viel wiegen 100 m Seil, wie viel wiegt die leere Trommel?

2) Berechne die in der Tabelle fehlenden Werte.

Seillänge	Gesamtmasse
0 m	
50 m	
100 m	220 kg
150 m	
200 m	390 kg
250 m	

3) Zeichne ein Diagramm wie in Abb. 5.3 skizziert. Trage die Werte aus der Tabelle im Diagramm ein und zeichne den Funktionsgraphen. Lies die Masse einer Trommel mit einem 170 m langen Seil ab.

Abb. 5.3

Funktionen, deren Graph eine Gerade ist, werden als **lineare Funktionen** bezeichnet. Anhand des folgenden Beispiels untersuchen wir, welche Art von Zusammenhang auf lineare Funktionen führt.

ZB: Ein Schwimmbecken, das zu Wartungszwecken teilweise entleert wurde, enthält 12 000 ℓ Wasser. Beim Nachfüllen fließen pro Stunde 5 000 ℓ zu, das volle Becken enthält 42 000 ℓ Wasser. Wir betrachten das Wasservolumen (in Litern) im Becken, abhängig von der Füllzeit t (in Stunden). Es kann nach der Formel

$$V(t) = 5\,000\,\frac{\ell}{h} \cdot t + 12\,000\,\ell$$

berechnet werden.

Zeit t in h	Wasservolumen V(t) in ℓ
0	12 000
1	17 000
2	22 000
3	27 000
4	32 000
5	37 000
6	42 000

Mithilfe der Wertetabelle erkennt man: Einer Zeitspanne von jeweils einer Stunde entspricht eine gleichmäßige Zunahme des Wasservolumens um jeweils 5 000 Liter. Wegen dieser gleichmäßigen Zunahme des Wasservolumens ist der Funktionsgraph eine Gerade.

Eine Funktion mit einer Funktionsgleichung der Form **y = k · x + d** heißt **lineare Funktion**. Der Funktionsgraph einer linearen Funktion ist eine **Gerade**.

Wir zeigen nun, dass die Funktionsgleichung $y = k \cdot x + d$ eine Gerade darstellt:

- $x = 0 \Rightarrow y = d$
  Der Funktionsgraph verläuft durch den Punkt $A(0|d)$.
- $x = 1 \Rightarrow y = d + k$
  Der Funktionsgraph verläuft durch den Punkt $P(1|d + k)$.
- Wir verlängern die Strecke AP und wählen einen beliebigen x-Wert. Das Dreieck ACX ist ähnlich zum blauen Dreieck ABP. Es gilt daher $1 : k = x : \overline{CX}$. Die Strecke CX hat demnach die Länge $k \cdot x$. Der auf der Geraden durch A und P liegende Punkt X hat daher die Koordinaten $(x|k \cdot x + d)$. Diese Koordinaten entsprechen einem Wertepaar der Funktion $y = k \cdot x + d$. Alle Punkte der Geraden durch A und P sind daher Wertepaare dieser Funktion.

Abb. 5.4

Da der Graph jeder linearen Funktion eine Gerade ist, bezeichnet man die Funktionsgleichung der linearen Funktion auch als **Geradengleichung**. Man schreibt g: $y = k \cdot x + d$. Zum Zeichnen des Funktionsgraphen benötigt man nur **zwei Punkte**.

Die Schreibweise $\mathbf{y = k \cdot x + d}$ wird als **Normalform** der Geradengleichung bezeichnet. Die ebenfalls übliche Angabe in der Form $\mathbf{a \cdot x + b \cdot y = c}$ wird als **allgemeine Form** bezeichnet.

Eine Geradengleichung kann durch Äquivalenzumformungen von der Normalform auf die allgemeine Form gebracht werden bzw. von der allgemeinen Form auf die Normalform.

ZB: Normalform $y = 2x - 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - y = 4$ allgemeine Form

y-Achsenabschnitt

Der Punkt A aus Abb. 5.4 ist der Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse. Seine x-Koordinate ist null und die y-Koordinate hat den Wert d. Der Wert **d** wird daher **y-Achsenabschnitt** oder **Ordinatenabschnitt** genannt.

Falls **d = 0** ist, verläuft die **Gerade durch den Koordinatenursprung**. Man spricht von einer **homogenen Funktion**. Andernfalls nennt man die Funktion **inhomogen**.

Unterscheiden sich zwei lineare Funktionen nur durch den Wert von d, dann sind die Graphen zueinander parallele Geraden.

ZB: $y_1 = 2x - 4$; $y_2 = 2x$

Für jede lineare Funktion $y = k \cdot x + d$ gilt:

An der Stelle $x = 0$ ist der Funktionswert $y = d$. Der Wert **d** wird **y-Achsenabschnitt** oder **Ordinatenabschnitt** genannt.

Funktionen

Steigung und Steigungsdreieck

Abb. 5.5 zeigt die Funktion
$y = k \cdot x$ für $k = \frac{1}{2}; 1; 2; -0{,}7; -\frac{10}{3}$

Der Wert des Faktors **k** entscheidet über die **Steigung** einer Geraden.
Ist **k > 0**, dann **steigt** die Gerade, ist **k < 0**, dann **fällt** die Gerade.
Für **k = 0** ist die Gerade **parallel zur x-Achse**.
Je größer |k| ist, desto stärker steigt oder fällt die Gerade.

Abb. 5.5

Wir untersuchen nun genauer, in welchem Ausmaß sich der y-Wert einer Funktion ändert, wenn sich die x-Koordinate ändert. Wir überlegen zuerst anhand von Beispielen:

$y = 2 \cdot x$

Jede Änderung des **x-Werts** um **1** führt zu einer Änderung des **y-Werts** um **2**.

x	y
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8

$y = 5 \cdot x$

Jede Änderung des **x-Werts** um **1** führt zu einer Änderung des **y-Werts** um **5**.

x	y
0	0
1	5
2	10
3	15

Wir überlegen nun allgemein anhand des Dreiecks ABC mit A(0|d), B(1|d) und C(1|k + d) und des beliebig gewählten Dreiecks PQR, wie die Steigung k bestimmt werden kann.

Ändert man den Wert der unabhängigen Variablen x um 1, dann ändert sich der Funktionswert y um k.
Da die Dreiecke ABC und PQR ähnlich sind, gilt:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{k}{1} = k$$

Die Dreiecke ABC und PQR nennt man **Steigungsdreiecke**, den Winkel α **Steigungswinkel**.
Für die Differenz $(y_2 - y_1)$ der y-Koordinaten („senkrechte Differenz") schreibt man kurz Δy, für die Differenz $(x_2 - x_1)$ der x-Werte („waagrechte Differenz") schreibt man Δx.

Δ ... [sprich: „Delta"], griechischer Großbuchstabe, Abkürzung für Differenz

Für die Steigung k schreibt man dann kurz $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ und nennt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ **Differenzenquotient**.

Bei einer linearen Funktion $y = k \cdot x + d$ nennt man **k** die **Steigung** der Geraden.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Der Winkel, den die Gerade mit der Waagrechten einschließt, heißt **Steigungswinkel**.

Im Alltag werden Steigungen oft in Prozent angegeben, zB:

18 m
100 m

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{18\text{ m}}{100\text{ m}} = 0{,}18 = 18\ \%$$

18 %

Negative Steigungen werden im Alltag nicht mit einem negativen Vorzeichen angegeben, sondern als Gefälle bezeichnet.

5.15 Beschreibe anhand geeigneter Zeichnungen, wie mithilfe des y-Achsenabschnitts und des Steigungsdreiecks die gegebene Funktion gezeichnet werden kann. BC

a) $y = -2x + 3$ ***b)*** $y = \frac{2}{3}x - 1$

Lösung:

a) $d = 3 \Rightarrow$ Die Gerade verläuft durch den Punkt (0|3).

Das Einzeichnen des Steigungsdreiecks ergibt einen weiteren Punkt der Geraden.

$k = -2 = \frac{-2}{1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$\Rightarrow \Delta x = 1, \Delta y = -2$

Die Gerade wird durch die beiden Punkte gezeichnet.

Δx = 1
Δy = −2

b) $d = -1$

$\Rightarrow$ Punkt (0|−1)

$k = \frac{2}{3} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$\Rightarrow \Delta x = 3, \Delta y = 2$

Die Gerade wird eingezeichnet.

Δy = 2
Δx = 3

B **5.16** Ermittle die Gleichung der Geraden g, die durch die Punkte $A(-2|-4)$ und $B(8|1)$ verläuft.

Lösung:

Ermitteln der Steigung k:

$k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-(-4)}{8-(-2)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

Gleichung der Geraden: $y = \frac{1}{2} \cdot x + d$

- Man erhält die gleiche Steigung, wenn man $\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$ berechnet.

Ermitteln von d:

$B(8|1)$ in $y = \frac{1}{2} \cdot x + d$ einsetzen:

$1 = \frac{1}{2} \cdot 8 + d \Rightarrow d = -3$

Gleichung der Geraden durch A und B:

g: $y = \frac{1}{2} \cdot x - 3$

- A und B liegen auf der Geraden. Das Einsetzen der Koordinaten eines Punkts der Geraden in die Geradengleichung muss daher eine richtige Aussage ergeben.

Sind von einer Geraden zwei Punkte $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ bekannt, so kann mithilfe der Differenzenquotienten für jeden beliebigen Punkt $X(x|y)$ der Geraden die folgende Beziehung abgelesen werden:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Ist eine Koordinate des Punkts X bekannt, so kann die andere direkt durch Einsetzen in die obige Formel berechnet werden, ohne die Geradengleichung ermitteln zu müssen.

Durch Ausmultiplizieren erhält man aus dieser Formel die allgemeine Form der Geradengleichung.

B **5.17** Eine Gerade g verläuft durch die Punkte $A(2|3)$, $B(4|y_B)$ und $C(6|5)$.
1) Ermittle die fehlende Koordinate des Punkts B.
2) Ermittle die allgemeine Form der Geradengleichung.

Lösung:

$A(x_A|y_A) = A(2|3)$, $C(x_C|y_C) = C(6|5)$

1) $B(x_B|y_B) = B(4|y_B)$

$\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow \frac{5-3}{6-2} = \frac{y_B - 3}{4-2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y_B - 3}{2} \Rightarrow 1 = y_B - 3 \Rightarrow y_B = 4$

$B(4|4)$

2) $\frac{5-3}{6-2} = \frac{y-3}{x-2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y-3}{x-2} \qquad | \cdot 2 \cdot (x-2)$

$x - 2 = 2 \cdot (y - 3)$

$x - 2 = 2y - 6 \qquad | + 2 - 2y$

$x - 2y = -4$

g: $x - 2y = -4$

Achsenparallele Geraden

Ist die Steigung einer Geraden k = 0, lautet die Funktionsgleichung:
y = d
Diese Funktion heißt **konstante Funktion**.

Der Graph verläuft waagrecht, also **parallel zur x-Achse**.
Ist auch d = 0, so erhalten wir die Gleichung **y = 0**, die die **x-Achse** beschreibt.

Geraden, die **parallel zur y-Achse** verlaufen, sind **keine Funktionen**. Einem x-Wert werden jeweils unendlich viele y-Werte zugeordnet. Diese Geraden lassen sich aber trotzdem durch eine Gleichung angeben:
ZB liegen auf der blau gezeichneten Geraden alle Punkte, deren x-Wert 2 ist. Die Gleichung x = 2 „wählt" also aus allen Punkten der Zeichenebene jene aus, die auf dieser Geraden liegen.
Durch die Gleichung **x = 0** wird die **y-Achse** beschrieben.

Nullstelle einer linearen Funktion

Als **Nullstelle x_N** einer linearen Funktion bezeichnet man den x-Wert des **Schnittpunkts des Funktionsgraphen mit der x-Achse**. Der zugehörige Funktionswert lautet y = 0.

$y = k \cdot x + d$ schneidet die x-Achse in N:

$0 = k \cdot x_N + d \Rightarrow x_N = -\frac{d}{k} \Rightarrow N\left(-\frac{d}{k}\middle|0\right)$

Mithilfe der Nullstelle x_N lässt sich eine Geradengleichung umformen:

$y = k \cdot x + d \Rightarrow y = k \cdot \left(x + \frac{d}{k}\right) = k \cdot (x - x_N)$

5.18 Berechne die Nullstelle der Funktion $y = \frac{1}{2} \cdot x - 3$, gib den Schnittpunkt N mit der x-Achse und die Funktion in der Form $y = k \cdot (x - x_N)$ an. **B**

Lösung:

$0 = \frac{1}{2} \cdot x - 3 \Rightarrow$ Nullstelle $x_N = 6$, $N(6|0)$, $y = \frac{1}{2} \cdot (x - 6)$

5.19 ***1)*** Löse die Gleichung 2x – 3 = 0 rechnerisch. **BC**

2) Ermittle die Nullstelle der Funktion y = 2x – 3. Vergleiche mit ***1)*** und interpretiere das Ergebnis.

Lösung:

1) $2x - 3 = 0$
$x = \frac{3}{2}$

2) $y = 0$
$2x_N - 3 = 0$
$x_N = \frac{3}{2}$

Die Lösung der Gleichung 2x – 3 = 0 entspricht der Nullstelle der linearen Funktion y = 2x – 3.

Die x-Koordinate des **Schnittpunkts** einer linearen Funktion **mit der x-Achse** heißt **Nullstelle x_N** der Funktion. Es gilt y = 0.
Die lineare Funktion kann in der Form $\mathbf{y = k \cdot (x - x_N)}$ angegeben werden.
Das Lösen einer linearen Gleichung entspricht dem Ermitteln der Nullstelle der zugehörigen Funktion.

CD **5.20** Welches der Diagramme zeigt eine lineare Funktion, welches nicht? Begründe deine Antwort.

1) ***2)*** ***3)*** ***4)***

CD **5.21** Welche der Funktionsgleichungen stellen lineare Funktionen dar, welche nicht? Begründe deine Entscheidungen.

1) $y = \frac{1}{2x} + 3$ ***2)*** $y = \frac{1}{2} + 3x$ ***3)*** $2x + 3y = 5$ ***4)*** $y = 3 \cdot (x + 5)$ ***5)*** $y = \frac{3}{x + 5}$

BC **5.22** Erstelle eine Wertetabelle mit mindestens 3 Werten aus der angegebenen Definitionsmenge und zeichne die gegebene Funktion. Gib anschließend die Wertemenge der Funktion an.

a) $y = 2x - 3$, $D_f = [1; 4]$ ***b)*** $y = -x + 4$, $D_f = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ***c)*** $y = \frac{1}{2}x + 2$, $D_f = \mathbb{R}$

BC **5.23** Zeichne die gegebene lineare Funktion durch Einzeichnen des y-Achsenabschnitts und der Steigung. Gib die einzelnen Arbeitsschritte an.

a) $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{2}$ ***b)*** $y = -x - \frac{7}{10}$ ***c)*** $y = -1{,}5x$ ***d)*** $y = \frac{5}{9}x$

BC **5.24** Überprüfe rechnerisch, ob die Punkte P(4|–1), Q(5|2) und R(–1|3) auf, oberhalb oder unterhalb der Geraden g: y = –x + 3 liegen. Kontrolliere durch eine Zeichnung.

Lösung:
$y(4) = -4 + 3 = -1 = y_P \Rightarrow$ P liegt auf g
$y(5) = -5 + 3 = -2 < y_Q \Rightarrow$ Q liegt oberhalb von g
$y(-1) = -(-1) + 3 = 4 > y_R \Rightarrow$ R liegt unterhalb von g

BC **5.25** Ermittle rechnerisch, ob der Punkt P auf, oberhalb oder unterhalb der Geraden liegt. Kontrolliere durch eine Zeichnung.

a) $y = 3x + 8$ P(4|14) ***b)*** $y = -x - 3$ P(4|7) ***c)*** $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$ P(6|2,5)

BC **5.26** In der Wertetabelle einer linearen Funktion fehlen einige Werte. Ergänze sie richtig.

a)

x	1	2	3		5
y	3	5		9	

b)

x	2	4		8	
y	20	19	18		16

BD **5.27** Professor Schneider möchte seiner Klasse zwei Wertetabellen von linearen Funktionen vorgeben. Bei einem der Wertepaare irrt er sich jedoch. Welche der beiden Wertetabellen enthält einen Fehler? Begründe deine Antwort. Korrigiere den Fehler durch Änderung des

1) x-Werts ***2)*** y-Werts

A)

x	2	5	8	9
y	9	15	21	23

B)

x	4	6	7	10	12
y	10	16	19	31	34

5.28 Ermittle mithilfe des Differenzenquotienten die fehlenden Werte aus der Wertetabelle einer linearen Funktion.

B

x	3	5	8	
y	17		27	33

Lösung:

$P_1(x_1|y_1) = P_1(3|17)$

$P_2(x_2|y_2) = P_2(8|27)$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow \frac{27 - 17}{8 - 3} = \frac{y - 17}{x - 3} \Rightarrow \frac{10}{5} = \frac{y - 17}{x - 3} \Rightarrow 2 = \frac{y - 17}{x - 3}$$

$P(x|y) = P(5|y)$:

$$2 = \frac{y - 17}{5 - 3} \Rightarrow 2 = \frac{y - 17}{2} \quad |\cdot 2$$

$$4 = y - 17 \Rightarrow y = 21 \qquad P(5|21)$$

$P(x|y) = P(x|33)$:

$$2 = \frac{33 - 17}{x - 3} \Rightarrow 2 = \frac{16}{x - 3} \quad |\cdot (x - 3)$$

$$2 \cdot (x - 3) = 16$$

$$2x - 6 = 16 \Rightarrow x = 11 \qquad P(11|33)$$

5.29 Berechne die fehlenden Werte aus der Wertetabelle einer linearen Funktion mithilfe des Differenzenquotienten.

B

a)

x	3	5	8	
y	11		71	83

b)

x	2	5	7	
y	1,5		−6	−9

5.30 Zeichne die dargestellte Funktion und die markierten Punkte ins Heft. Zeichne das Steigungsdreieck, das diese Punkte enthält, und gib die Steigung k mit möglichst einfachen Zahlen an.

B

a) b) c) d)

5.31 Gib die Gleichung der dargestellten Geraden an. Beschreibe deine Vorgehensweise.

ABC

Lösung:

$d = 1$ — Schnittpunkt mit der y-Achse bei 1 ergibt d.

$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$ — Steigungsdreieck zB durch (0|1) und (3|0) einzeichnen, Ablesen von Δx und Δy ergibt k.

$y = -\frac{1}{3}x + 1$ — Die Gleichung der Geraden angeben.

Δx = 3

Δy = −1

AC **5.32** Lies den y-Achsenabschnitt d aus der Zeichnung ab und ermittle die Steigung k mithilfe eines geeigneten Steigungsdreiecks. Gib die Gleichung der Geraden in Normalform und in allgemeiner Form an.

a) **b)** **c)**

D **5.33** Welche Zeichnungen stellen das Steigungsdreieck zur Steigung $k = -\frac{3}{2}$ korrekt dar? Begründe deine Auswahl.

1) **2)** **3)** **4)** **5)**

ABC **5.34** Gib die Steigung der dargestellten Funktion als gekürzten Bruch an. Achte dabei auf die unterschiedlichen Skalierungen auf den Achsen.

a) **b)** **c)**

AC **5.35** Gib die Gleichung der dargestellten Funktion an. Verwende dabei die Variablen- und Konstantenbezeichnungen aus der Zeichnung.

Lösung:

$\Delta v = v_1$

$\Delta s = -(a - b) = b - a$

$$k = \frac{\Delta s}{\Delta v} = \frac{b - a}{v_1}, \quad d = a$$

$$s = \frac{b - a}{v_1} \cdot v + a$$

- Zeichne mithilfe der gegebenen Punkte ein Steigungsdreieck ein und beschrifte es.

AC **5.36** Gib die Gleichung der dargestellten Funktion an, verwende dabei die Variablen- und Konstantenbezeichnungen aus der Grafik.

a) **b)**

B **5.37** Von einer Geraden sind der Punkt D auf der y-Achse und ein weiterer Punkt gegeben. Ermittle die Gleichung der Geraden in Normalform.

a) D(0|4), P(−2|2) **b)** D(0|−1), P(3|−4) **c)** D(0|0,5), P(2,5|−1,5)

5.38 Löse die gegebene Gleichung grafisch. Beschreibe den Lösungsweg mit eigenen Worten. BC

a) $2x + 5 = 0$ ***b)*** $3x - 5 = 7$ ***c)*** $-x + 4 = -1$ ***d)*** $4x - 2 = -x + 1$

5.39 Gib die Gleichungen aller in Abb. 5.6 dargestellten Geraden an. AC

Abb. 5.6

5.40 Berechne die Nullstelle $N(x_N|0)$ der Funktion und gib die Funktionsgleichung in der Form $y = k \cdot (x - x_N)$ an. B

a) $y = \frac{1}{3}x + 2$ ***b)*** $y = -x + 7$ ***c)*** $y = -0{,}5x + 3$

5.41 ***1)*** Forme die gegebene Gerade auf Normalform um. B TE

2) Stelle die Gerade grafisch dar.

a) $2x + 3y = 9$ ***b)*** $-3x + 10y = 5$ ***c)*** $4x - y = -7$

Hinweis: Technologieeinsatz (TE) siehe Seiten 190 und 309

5.42 Prüfe rechnerisch, ob die Punkte auf einer Geraden liegen. B

a) $A(1|4)$, $B(4|1)$, $C(6|-1)$ ***b)*** $A(-4|-2)$, $B(-2|-5)$, $C(3|1)$

5.43 Stelle $y + 2 = 3x$, $y = 3 \cdot (x + 2)$ und $y = 3x$ grafisch dar. Was fällt dir auf? CD

5.44 Was kann man über die Geraden aussagen? C

1) g_1: $y = k \cdot (x + 2)$ und g_2: $y = k \cdot (x - 3)$ ***2)*** g_1: $y = k \cdot (x - 1)$ und g_2: $y = \frac{k}{3} \cdot (x - 1)$

5.45 Begründe, wie sich der Graph von $y = k \cdot x + d$ ändert, wenn D

a) das Vorzeichen von k geändert wird. ***c)*** k null wird. ***e)*** d null wird.

b) k verdoppelt wird. ***d)*** d um 2 kleiner wird. ***f)*** d verdoppelt wird.

5.46 ***1)*** Stelle die Gleichung der Geraden g auf, die durch die Punkte A und B geht. AB

2) Ermittle die Schnittpunkte dieser Geraden mit beiden Koordinatenachsen.

3) Gib die Gleichung jener Geraden an, die zu g parallel ist und durch $P(-2|-2)$ geht.

4) Stelle die beiden Geraden grafisch dar.

a) $A(-4|5)$, $B(4|1)$ ***b)*** $A(1|7)$, $B(5|2)$ ***c)*** $A(-3|-2)$, $B(6|1)$

5.47 Zeichne die Gerade $y = \frac{3}{4}x - 2$. Wie muss das Steigungsdreieck bzw. die Steigung gewählt werden, damit eine Gerade entsteht, die mit der gezeichneten Geraden einen rechten Winkel einschließt? Gib diesen Zusammenhang allgemein für $y = k \cdot x + d$ an. ABC

5.48 Gib an, wie viel Prozent die Steigung bzw. das Gefälle beträgt. AB

a) 27 cm, 53 cm ***b)*** 89 mm, 24 cm ***c)*** 4,8 km, 1,5 km

5.49 Auf einer Teststrecke für Autobusse wird mit verschiedenem Gefälle experimentiert. Ermittle jeweils die fehlenden Längen h und s. Vergleiche die Ergebnisse. Was fällt dir auf? ABC

1) h, s, 1 km, 2,5 % ***2)*** h, s, 1 km, 5 % ***3)*** h, s, 1 km, 7 %

5.50 Welche Steigung entspricht folgendem Steigungswinkel? Verwende besondere Dreiecke. AB

a) 45° ***b)*** 30° ***c)*** 60°

5.51 Kann man mithilfe eines Steigungsdreiecks einen Steigungswinkel von 90° beschreiben? Begründe deine Antwort. D

Technologieeinsatz: Lineare Funktion

Excel, TI-Nspire: www.verlaghpt.at

GeoGebra

B TE

5.52 Eine lineare Funktion ist durch die Gleichung $y = 2x + 3$ gegeben.

1) Stelle die Funktion grafisch dar.

2) Gib die Nullstelle an.

Lösung:

1)

- Um die Steigung k und den y-Achsenabstand d verändern zu können, werden diese als Variablen eingegeben.
  d=3
  k=2
- Anschließend wird die Funktionsgleichung eingegeben.
  k*x+d
- Der Bereich kann verschoben, vergrößert oder verkleinert werden.

2)

- Die Nullstelle kann grafisch mithilfe des Werkzeugs **Schneide zwei Objekte** oder mit dem Befehl **Schneide** ermittelt werden.
  Schneide[f(x),xAchse]

Die Nullstelle liegt bei $x_N = -1{,}5$.

Gibt man **y = k · x + d** statt **k · x + d** ein, so wird diese Eingabe als Geradengleichung interpretiert und die Gerade erhält automatisch einen Namen.

Die Werte von k und d können auch mithilfe eines Schiebereglers interaktiv verändert werden.

BC TE

5.53 Verwende Aufgabe 5.52. Ändere k und d auf die angegebenen Werte. Beschreibe die Änderung der Geraden und gib die Nullstelle an.

1) $k = -2,\ d = 3$ ***2)*** $k = 0,\ d = 3$ ***3)*** $k = 2,\ d = 0$ ***4)*** $k = 0,\ d = 0$

BC TE

5.54 In eine Wertetabelle einer linearen Funktion ist ein falscher Wert geschrieben worden. Wie kannst du diesen falschen Wert grafisch erkennen? Gib die richtige Funktionsgleichung an. Erstelle eine Grafik. Dokumentiere deine Vorgehensweise.

x	−1	0	1	2
y	0,6	1,1	1,4	2,1

5.2.2 Anwendungen linearer Funktionen

In Alltag, Wirtschaft und Technik ist es oft wichtig zu wissen, welchen Einfluss die Änderung einer Größe auf eine andere Größe hat. In vielen Fällen kann man diese Abhängigkeit mathematisch durch eine lineare Funktion beschreiben. Mathematische Modelle nehmen jedoch meist Vereinfachungen vor bzw. entsprechen der Realität nur innerhalb gewisser Grenzen.

Lineare Funktionen im Alltag

5.55 Wegen einer Reparatur wird ein Tank für Dieselöl gleichmäßig leer gepumpt. Nach 6 Minuten befinden sich noch 4 500 ℓ im Tank, nach weiteren 3 Minuten noch 3 000 ℓ. Wie viel Liter sind nach insgesamt 12 Minuten bzw. 15 Minuten noch im Tank? **AB**

5.56 Arbeite mit den Angaben aus Aufgabe 5.55. **ABCD**

1) Begründe, warum das Abpumpen durch eine lineare Funktion beschrieben werden kann und gib die Funktionsgleichung an.
2) Wie viel Liter Dieselöl befanden sich ursprünglich im Tank?
3) Wie lang dauert die komplette Entleerung?
4) Stelle den Vorgang grafisch dar, markiere die in ***2)*** und ***3)*** berechneten Größen.
5) Wie ändert sich die Funktionsgleichung, wenn der Tank in der halben Zeit entleert werden soll?

Lösung:
Tankinhalt V(t) in Liter, Zeit t in Minuten.

1) Vereinfacht kann man davon ausgehen, dass in gleichen Zeitintervallen gleiche Ölmengen abgepumpt werden und dass der Tank vollständig entleert werden kann.

$V(t) = k \cdot t + d$

- Ermittle k aus den gegebenen Wertepaaren (6 min|4 500 ℓ) und (9 min|3 000 ℓ).

$k = \frac{\Delta V(t)}{\Delta t} = \frac{3\,000\,\ell - 4\,500\,\ell}{9\text{ min} - 6\text{ min}} = \frac{-1\,500\,\ell}{3\text{ min}} = -500\,\frac{\ell}{\text{min}}$

$4\,500\,\ell = -500\,\frac{\ell}{\text{min}} \cdot 6\text{ min} + d \;\Rightarrow\; d = 7\,500\,\ell$

- Setze k und ein Wertepaar, zB (6 min|4 500 ℓ) in die Gleichung ein, um d zu ermitteln.

$V(t) = -500\,\frac{\ell}{\text{min}} \cdot t + 7\,500\,\ell$

2) $V(0\text{ min}) = 7\,500\,\ell$
Zu Beginn waren 7 500 ℓ im Tank.

- Anfangsmenge: V nach 0 Minuten

3) $0\,\ell = -500\,\frac{\ell}{\text{min}} \cdot t + 7\,500\,\ell \;\Rightarrow\; t = 15\text{ min}$
Das Abpumpen dauert 15 Minuten.

- Der Tank ist leer, wenn V(t) = 0 ℓ ist.

4)

- Trage die unabhängige Variable t waagrecht, die daraus errechneten Funktionswerte senkrecht ein. Der sinnvolle Bereich für t reicht von t = 0 min bis t = 15 min. Wähle eine Skalierung, die eine Zeichnung in sinnvoller Größe ergibt und einfaches Umrechnen ermöglicht, zB: 1 cm ≙ 2 min, 1 cm ≙ 1 000 ℓ

5) k muss mit 2 multipliziert werden:
$V(t) = -1\,000\,\frac{\ell}{\text{min}} \cdot t + 7\,500\,\ell$

Wirtschaft und Geld

Auch einfache wirtschaftliche Zusammenhänge führen auf lineare Funktionen, zum Beispiel einfache Zinsen, lineare Tarife und lineare Kostenfunktionen.

Lineare Tarife

Bei linearen Tarifen setzt sich der Rechnungsbetrag aus einem **Grundpreis** und einem **Preis pro Einheit** zusammen.

$P(x) = k \cdot x + G$

P(x) ... Preis (für x Einheiten)
k ... Preis pro Einheit
x ... Anzahl der Einheiten
G ... Grundpreis

AB **5.57** Frau Heinrich fährt Montagmorgen mit dem Taxi zum 7 km entfernten Krankenhaus. Die Fahrt kostet 12,70 €. Am Dienstagmorgen fährt sie mit dem Taxi zum 11 km entfernten Bahnhof und bezahlt 18,70 €. Beide Fahrten wurden nach dem gleichen Tarif abgerechnet.

1) Welchen Grundpreis zeigt der Taxameter zu Beginn der Fahrt an und wie hoch ist der Preis pro Kilometer?
2) Wie viel kostet eine Fahrt von 5 km?
3) Wie weit ist jemand gefahren, der 23,20 € bezahlt?

Lösung:

1) $P(x) = k \cdot x + G \qquad x \geq 0 \text{ km}$

- Ermittle den Preis k pro Einheit mithilfe des Differenzenquotienten.

$k = \frac{\Delta P(x)}{\Delta x} = \frac{18{,}70\text{ €} - 12{,}70\text{ €}}{11\text{ km} - 7\text{ km}} = \frac{6{,}00\text{ €}}{4\text{ km}} = 1{,}50\,\frac{\text{€}}{\text{km}}$

$12{,}70\text{ €} = 1{,}50\,\frac{\text{€}}{\text{km}} \cdot 7\text{ km} + G \;\Rightarrow\; G = 2{,}20\text{ €}$

- Berechne den Grundpreis G durch Einsetzen eines gegebenen Wertepaars.

$P(x) = 1{,}50\,\frac{\text{€}}{\text{km}} \cdot x + 2{,}20\text{ €}$

Taxameteranzeige zu Beginn: 2,20 €
Kosten pro Kilometer: 1,50 €

- Beginn der Fahrt $\Rightarrow$ x = 0 km

2) $P(5\text{ km}) = 1{,}50\,\frac{\text{€}}{\text{km}} \cdot 5\text{ km} + 2{,}20\text{ €} = 9{,}70\text{ €}$

Eine Fahrt von 5 km kostet 9,70 €.

3) $P(x) = 23{,}20\text{ €} \;\Rightarrow\; 23{,}20\text{ €} = 1{,}50\,\frac{\text{€}}{\text{km}} \cdot x + 2{,}20\text{ €} \;\Rightarrow\; x = 14\text{ km}$

Fahrtkosten von 23,20 € entstehen bei einer Fahrt von 14 km.

Lineare Kosten

Bei der Produktion von Waren fallen im Allgemeinen **Fixkosten** an (Gehälter, Miete ...). Die zusätzlich zu den Fixkosten pro produziertem Stück anfallenden Kosten nennt man **proportionale Kosten** oder **variable Kosten**. Wenn diese **konstant** sind, also nicht von der erzeugten Stückzahl abhängen, ist die Kostenfunktion eine lineare Funktion. Der beim Verkauf erzielte **Erlös** ist ebenfalls durch eine lineare Funktion beschreibbar, falls der **Preis pro Stück fix** ist. Der **Gewinn** errechnet sich aus der Differenz von Erlös und Kosten.

$K(x) = k \cdot x + F$

K(x) ... Kosten (für x Stück)
x ... Anzahl der produzierten Stücke
k ... proportionale (variable) Kosten (pro Stück)
F ... Fixkosten

$E(x) = p \cdot x$

E(x) ... Erlös (für x Stück)
p ... Preis pro Stück

$G(x) = E(x) - K(x)$

5.58 Die Firma City-Plan druckt U-Bahnpläne und hat monatliche Fixkosten von 50 000,00 €. Im Monat können maximal 40 000 U-Bahnpläne erzeugt werden. Die proportionalen Kosten betragen 4,00 € pro Plan und jeder Plan wird um 6,00 € verkauft.

ABC

1) Gib die Kostenfunktion an.
2) Bei welchen Produktionsmengen arbeitet die Firma kostendeckend?
3) Wie viel Stück müssen produziert werden, um einen Gewinn von 20 000,00 € zu erzielen?
4) Stelle die benötigten Funktionen grafisch dar und kennzeichne die ermittelten Werte.

Lösung:

1) $K(x) = 4{,}00\,\frac{€}{\text{Stück}} \cdot x + 50\,000{,}00\,€ \qquad 0 \text{ Stück} \leqslant x \leqslant 40\,000 \text{ Stück}$

2) $E(x) = 6{,}00\,\frac{€}{\text{Stück}} \cdot x$

$E(x) = K(x)$

$6{,}00\,\frac{€}{\text{Stück}} \cdot x = 4{,}00\,\frac{€}{\text{Stück}} \cdot x + 50\,000{,}00\,€$

$2{,}00\,\frac{€}{\text{Stück}} \cdot x = 50\,000{,}00\,€$

$x = 25\,000 \text{ Stück}$

Ab 25 000 produzierten Plänen arbeitet die Firma kostendeckend.

- Kostendeckend bedeutet: Der Erlös ist (mindestens) so groß wie die Kosten.

3) $G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = 6{,}00\,\frac{€}{\text{Stück}} \cdot x - \left(4{,}00\,\frac{€}{\text{Stück}} \cdot x + 50\,000{,}00\,€\right)$

$G(x) = 2{,}00\,\frac{€}{\text{Stück}} \cdot x - 50\,000{,}00\,€$

$G(x) = 20\,000{,}00\,€$

$2{,}00\,\frac{€}{\text{Stück}} \cdot x - 50\,000{,}00\,€ = 20\,000{,}00\,€$

$2{,}00\,\frac{€}{\text{Stück}} \cdot x = 70\,000{,}00\,€$

$x = 35\,000 \text{ Stück}$

Einen Gewinn von 20 000,00 € erzielt man bei einer Produktion von 35 000 Plänen.

- Gewinn = Erlös – Kosten

4)

- Waagrechte Achse: 0 Stück $\leqslant x \leqslant$ 40 000 Stück
zB: 5 000 Stück ≙ 1 cm
- Wertebereich der Funktionswerte ($K(x)$, $E(x)$, $G(x)$) in €:
Der „Gewinn“ kann auch negativ sein, $G(0) = -50\,000{,}00$ €
Bei 40 000 Stück gilt: Erlös > Kosten
$E(40\,000) = 240\,000{,}00$ €
⇒ senkrechte Achse:
zB: –50 000,00 € bis 250 000,00 €,
50 000,00 € ≙ 1 cm

Ab einer Produktion von 25 000 Plänen arbeitet die Firma kostendeckend, bei einer größeren Anzahl wird Gewinn erzielt, bei einer geringeren Verlust.

Lineare Zusammenhänge in Naturwissenschaften und Technik

In vielen technischen Zusammenhängen spielen gleichmäßige Veränderungen eine wichtige Rolle. Der Zusammenhang zwischen zwei solchen Größen lässt sich dann als lineare Funktion angeben. ZB: Bei konstanter Geschwindigkeit ist der zurückgelegte Weg eine lineare Funktion der Zeit. Aus dem naturwissenschaftlichen Unterricht kennst du schon die Formel zur Beschreibung dieses Zusammenhangs: $s = v \cdot t$

ABC **5.59** Ein PKW fährt mit einer mittleren Geschwindigkeit von $v = 110\,\frac{km}{h}$ von Linz in Richtung Eisenstadt. Er startet um 10:20 Uhr.

1) Wie weit von Linz entfernt ist er um 11:35 Uhr?
2) Wann erreicht er das 229 km entfernte Ziel?
3) Stelle die Entfernung des PKWs von Linz in einem Weg-Zeit-Diagramm dar.
Wie kann der Rückweg eingetragen werden, wenn der PKW-Fahrer um 13:20 Uhr in Eisenstadt losfährt und die gleiche mittlere Geschwindigkeit erreicht?
4) Gib die Funktionsgleichung für den Rückweg an und interpretiere die auftretenden Größen.

Lösung:

$s(t) = 110\,\frac{km}{h} \cdot t \qquad (t \geqslant 0)$

1) 10:20 Uhr bis 11:35 Uhr $\Rightarrow$ Fahrzeit 1 h 15 min $\Rightarrow$ $t = 1{,}25$ h

$s(1{,}25\text{ h}) = 110\,\frac{km}{h} \cdot 1{,}25\text{ h} = 137{,}5\text{ km}$

Um 11:35 Uhr ist der PKW 137,5 km von Linz entfernt.

2) $s(t) = 229\text{ km} \Rightarrow 110\,\frac{km}{h} \cdot t = 229\text{ km} \qquad |:110\,\frac{km}{h}$

$t = 2{,}0\dot{8}\dot{1}\text{ h} \approx 2\text{ h }5\text{ min}$

Startzeit 10:20 Uhr, Fahrzeit 2 h 5 min $\Rightarrow$ Ankunft 12:25 Uhr

Der PKW erreicht sein Ziel um 12:25 Uhr.

3)

- Waagrechte Achse:
  Zeit t
  zB: 1 h ≙ 2 cm
- Senkrechte Achse:
  Weg s
  zB: 20 km ≙ 1 cm

4) 13:20 Uhr – 10:20 Uhr = 3 h

$s(t) = 229\text{ km} - 110\,\frac{km}{h} \cdot (t - 3\text{ h})$

$s(t) = 229\text{ km} - 110\,\frac{km}{h} \cdot t + 330\text{ km}$

$s(t) = 559\text{ km} - 110\,\frac{km}{h} \cdot t \quad (t \geqslant 3\text{ h})$

- Beginn der Rückfahrt 3 Stunden später
- Entfernung am Rückweg:
  229 km minus zurückgelegter Weg

559 km ist der y-Achsenabschnitt, $(-110\,\frac{km}{h})$ gibt die Steigung an.

Zusammenhänge aus vielen Gebieten lassen sich durch das Modell der linearen Funktion beschreiben. Modelle beschreiben die Wirklichkeit nur in gewissen Bereichen und oft nur näherungsweise.

Technologieeinsatz: Anwendungen linearer Funktionen

Excel 2010

TI-Nspire, GeoGebra: www.verlaghpt.at

AB TE

5.60 Zwei Telefonanbieter wollen neue Kunden werben. Die Kosten setzen sich aus einer Grundgebühr und einem Minutentarif zusammen.
Anbieter A: Grundgebühr 14,90 €; 5 Cent pro Minute in fremde Netze
Anbieter B: Grundgebühr 9,90 €; 25 Cent pro Minute in fremde Netze
1) Stelle die beiden Kostenfunktionen in einem Diagramm dar.
2) Bei welcher Gesprächsdauer pro Monat sind die Kosten gleich?
3) Gib an, welcher Tarif abhängig von der Gesprächsdauer pro Monat der günstigere ist.

Lösung:

1)

Anbieter A:	GB	€	14,90
	Kosten/Min	€	0,05

Anbieter B:	GB	€	9,90
	Kosten/Min	€	0,25

- Die Grundgebühr (GB) und die Kosten pro Minute werden in eine Tabelle eingetragen.

Minuten	Kosten A		Kosten B	
0	€	14,90	€	9,90
2	€	15,00	€	10,40
4	€	15,10	€	10,90
6	€	15,20	€	11,40
8	€	15,30	€	11,90
10	€	15,40	€	12,40
12	€	15,50	€	12,90

- Für jeden Anbieter wird eine Wertetabelle von zB 0 bis 60 Minuten mit einer Schrittweite von 2 Minuten erstellt.

€ 30,00
€ 25,00
€ 20,00
€ 15,00
€ 10,00
€ 5,00
€ -
0 10 20 30 40 50 60 Minuten
Kosten A
Kosten B

- Um beide Graphen in ein Diagramm zu zeichnen, wird die gesamte Wertetabelle markiert und ein Diagramm (Diagrammtyp **Punkt (XY)**, Typ 5) gezeichnet. Das Programm interpretiert die Werte der ersten Spalte als x-Werte und die beiden rechten Spalten als y-Werte.

2)

25	€	16,15	€	16,15	€ -

Zielwertsuche
Zielzelle: F39
Zielwert: 0
Veränderbare Zelle: B39
OK Abbrechen

Die Kosten sind bei 25 Minuten gleich groß.

- Die Kosten sind gleich, wenn die beiden Graphen einander schneiden, ihre Differenz ist null. Zur Ermittlung des Werts wird die **Zielwertsuche** verwendet. Wir berechnen daher die Kostendifferenz nach einer beliebigen Minutenanzahl. Diese Differenz muss nun 0 werden.

3) Bis zu einer Gesprächsdauer von 25 Minuten im Monat ist Anbieter B günstiger.

5.61 Arbeite mit den Angaben aus Aufgabe 5.60.
1) Bei welcher Gesprächsdauer betragen die Kosten 30,00 €?
2) Auf wie viel Cent pro Minute müsste Anbieter B die Gesprächsgebühr senken, damit die Kosten erst bei einer Gesprächsdauer von 50 Minuten gleich sind?

ABC TE

C **5.62** Welche linearen Tarife kennst du? Gib mindestens fünf an.

ABC **5.63** Eine 40 cm große Kerze brennt gleichmäßig ab. Nach 10 Stunden ist sie noch 27 cm hoch.
1) Ermittle die Funktion, die die Höhe der Kerze nach der Brenndauer t (in Stunden) angibt.
2) Wie lang brennt die Kerze maximal?
3) Stelle die Funktion in einem geeigneten Maßstab und Bereich dar und kennzeichne die in der Angabe gegebenen Werte.

ABD **5.64** Aus einem 80 cm langen Stück Draht soll ein Rechteck gebogen werden. Gib die Funktionsgleichung zur Berechnung der Breite b an, wenn die Länge a gewählt wird. Gib an, warum die Funktion linear ist. Welche Werte sind für die Länge sinnvoll?

ABC **5.65** In einer Kuranstalt werden pro Tag 16 Liter Desinfektionslösung verbraucht. Derzeit beträgt der Vorrat 450 Liter, wenn er auf 100 Liter sinkt, wird nachbestellt.
1) Stelle die Funktionsgleichung auf und berechne, wie groß der Vorrat nach 10 Tagen ist. Wie viele Tage haben die Zuständigen noch Zeit für die Nachbestellung?
2) Nach wie vielen Tagen wäre der Vorrat ohne Nachbestellung verbraucht?
3) Zeichne die Funktion und überprüfe so die Ergebnisse deiner Rechnung.

ABD **5.66** In einem neuen Wellnesshotel sind zur Eröffnung 800 Handtücher für den Saunabereich vorhanden. Pro Tag verschwinden im Mittel 4 Handtücher.
1) Gib die Anzahl der Handtücher als Funktion der Zeit t (in Tagen) nach der Eröffnung an. Stelle die Funktion in geeignetem Maßstab und Bereich grafisch dar.
2) Wie viele Handtücher sind 6 Wochen nach der Eröffnung noch vorhanden?
3) Wenn die Anzahl der Handtücher unter 500 sinkt, wird nachbestellt. Wie lang nach der Eröffnung ist damit zu rechnen?
4) Wie viele Handtücher gäbe es ohne Nachbestellung 20 Wochen nach der Eröffnung?
5) Erkläre, warum der Graph eigentlich durch einzelne Punkte dargestellt werden müsste.

ABC **5.67** Eine Stromrechnung setzt sich aus der Grundgebühr und den Kosten pro verbrauchter Einheit zusammen. Die Grundgebühr beträgt 19,20 € pro Jahr, für eine Kilowattstunde muss man 9,65 Cent bezahlen.
1) Gib die Kostenfunktion an, stelle sie für einen Verbrauch von maximal 5 000 kWh grafisch dar.
2) Wie verändert sich der Graph, wenn keine Grundgebühr zu bezahlen ist?
3) Wie verändert sich die Kostenfunktion, wenn der Preis je kWh um 10 % erhöht wird?

ABC **5.68** TE Die fixen Kosten für die Herstellung eines Produkts betragen 348 500,00 € pro Woche, die proportionalen Kosten 117,00 $\frac{€}{\text{Stück}}$. Der Verkaufspreis wird mit 199,90 $\frac{€}{\text{Stück}}$ festgesetzt.
1) Gib die Kostenfunktion, die Erlösfunktion und die Gewinnfunktion an.
2) Ermittle für eine wöchentliche Produktionsmenge von 5 000, 10 000 bzw. 20 000 Stück die Gesamtkosten, den Erlös und den Gewinn.
3) Überprüfe deine Ergebnisse durch eine geeignete grafische Darstellung.

AB **5.69** Die Firma Saxet stellt Taschenrechner her. Die Fixkosten betragen12 000,00 € pro Monat. Bei einer Produktion von 10 000 Stück pro Monat sind die Gesamtkosten 162 000,00 €.
1) Um wie viel Euro müssen die Geräte verkauft werden, wenn der Gewinn bei einer Produktion von 25 000 Stück 33 000,00 € betragen soll?
2) Wie viel Stück müssen mindestens produziert (und auch verkauft) werden, um bei dem in ***1)*** errechneten Preis keinen Verlust zu haben?

5.70 Auf einer Kartbahn werden 2 Tarife angeboten. ABC

Tarif 1: 10 Minuten kosten 11,00 € inklusive Leihgebühr für den Helm und den Anzug.
Tarif 2: 10 Minuten kosten 9,00 €, die Leihgebühr für Helm und Anzug beträgt 14,00 €.

1) Gib die beiden Kostenfunktionen an, erstelle eine Wertetabelle (mindestens 10 Werte pro Funktion) und zeichne die beiden Funktionen in einem geeigneten Maßstab.

2) Ermittle durch Berechnung und durch Ablesen aus der Grafik, für welche Fahrzeit welcher Tarif günstiger ist, wenn man Helm und Anzug benötigt.

5.71 Die Telefongesellschaft TWO bietet zwei verschiedene Tarife an. ABC

Tarif 1: Monatliche Grundgebühr 9,00 €, Gesprächsminute 9 Cent
Tarif 2: Monatliche Grundgebühr 15,00 €, Gesprächsminute 5 Cent

1) Gib die beiden Kostenfunktionen für ein Monat an, erstelle eine Wertetabelle und zeichne die beiden Funktionen.

2) Wie viel Euro mehr als notwendig bezahlt Herr Paul, wenn er in einem Monat $5\frac{1}{2}$ Stunden telefoniert und den ungünstigeren Tarif gewählt hat?

3) Beschreibe, wie sich der Graph ändert, wenn bei Tarif 1 zusätzlich 100 Freiminuten enthalten sind?

5.72 Ein Stahlstab hat die Querschnittsfläche $A = 2\,500\ mm^2$. Wirkt auf den Stab eine Kraft F normal zur Fläche, entsteht eine Zugspannung $\sigma = \frac{F}{A}$. Um die Festigkeit des Stabs zu überprüfen, wird er belastet. BCD

1) Stellt die Abhängigkeit der Zugspannung von der Kraft eine lineare Funktion dar? Begründe deine Antwort. Gilt das auch, wenn die Kraft konstant und die Querschnittsfläche variabel ist?

2) Stelle den Spannungsverlauf $\sigma(F)$ für Kräfte von 0 N bis 50 000 N grafisch dar.

3) Welche Größe müsste geändert werden, um einen „flacheren“ Verlauf des Graphs zu erhalten? Gib eine passende Funktionsgleichung an.

5.73 Die Bremsen eines PKW werden durch gleichmäßiges Verringern der Geschwindigkeit getestet. Für die Geschwindigkeit v nach einer Bremsdauer t (in Sekunden) gilt: AB

$v(t) = v_0 + a \cdot t$ mit Anfangsgeschwindigkeit v_0 in $\frac{m}{s}$, Bremsverzögerung a in $\frac{m}{s^2}$

Die Bremsung beginnt bei $v_0 = 20\ \frac{m}{s}$, die Bremsverzögerung beträgt $a = -4\ \frac{m}{s^2}$.

1) Wie lang dauert es, bis das Fahrzeug zum Stillstand kommt?

2) Berechne die Geschwindigkeit des Fahrzeugs 2 Sekunden nach Beginn der Bremsung.

3) Stelle die Funktion grafisch dar.

5.74 Ein PKW fährt von Salzburg mit annähernd konstanter Geschwindigkeit von $115\ \frac{km}{h}$ auf der Autobahn Richtung München. Zur gleichen Zeit startet ein LKW von einer 40 km nach Salzburg gelegenen Tankstelle und fährt mit einer mittleren Geschwindigkeit von $85\ \frac{km}{h}$ ebenfalls Richtung München. ABC

1) Gib sowohl für den PKW als auch für den LKW die Funktionsgleichung an, die die Entfernung von Salzburg nach der Fahrzeit t (in Stunden) angibt.

2) Wie viel Stunden nach Fahrtbeginn überholt der PKW den LKW? In welcher Entfernung von Salzburg ist das?

3) Stelle die Funktionen grafisch dar und überprüfe die Ergebnisse deiner Berechnungen.

5.3 Stückweise lineare Funktionen

ABC **5.75** Die Supermarktkette Interkauf wirbt mit Rückvergütungen zu Jahresende. Für Einkäufe bis zu einer Gesamthöhe von 5 000,00 € werden 2 % der Summe in Form einer Gutschrift rückerstattet. Hat jemand im Lauf des Jahrs um mehr als 5 000,00 € eingekauft, so erhält er 3 % der Gesamtsumme gutgeschrieben.

1) Ermittle die fehlenden Werte der Tabelle.

2) Frau Martinu stellt am 31. Dezember fest, dass sie im Lauf des Jahrs um 4 996,00 € eingekauft hat. Lohnt es sich für Frau Martinu, noch etwas um 5,00 € einzukaufen, das sie nicht dringend braucht?

Einkaufs-summe	Höhe der Gutschrift
1 000,00 €	20,00 €
4 000,00 €	
5 000,00 €	
5 500,00 €	
6 000,00 €	

In vielen Sachsituationen setzt sich eine Funktion aus verschiedenen linearen Funktionen zusammen. Solche Funktionen nennt man **stückweise lineare Funktionen**.

ABCD **5.76** Viele moderne Heizungen werden mit Holzpellets befeuert. Ein Händler bietet Pellets zu folgenden Preisen an: 245,10 € pro Tonne bis zu einer Gesamtmenge von 2 Tonnen, 237,50 € pro Tonne ab einer Gesamtmenge von 2 Tonnen bis zu 4 Tonnen und 229,90 € pro Tonne über 4 Tonnen.

Stelle die Preisentwicklung grafisch dar. Ist es möglich, dass für eine größere Menge weniger bezahlt werden muss? Kennzeichne die entsprechenden Bereiche in der Zeichnung.

Lösung:

$K_1(x) = 245{,}10\,\frac{€}{t} \cdot x;\;\; 0\,t \leqslant x \leqslant 2\,t$

$K_2(x) = 237{,}50\,\frac{€}{t} \cdot x;\;\; 2\,t < x \leqslant 4\,t$

$K_3(x) = 229{,}90\,\frac{€}{t} \cdot x;\;\; x > 4\,t$

x ... Menge in Tonnen, K(x) ... Kosten in Euro

- Den drei verschiedenen Preisbereichen des Angebots entsprechen drei verschiedene Kostenfunktionen und ihre Definitionsmenge.

- Die Bereiche, in denen größere Mengen zu kleineren Preisen führen können, sind in der Zeichnung farbig unterlegt.

€ Kosten
1440, 1320, 1200, 1080, 960, 840, 720, 600, 480, 360, 240, 120
Menge
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 t

Zum Beispiel ergibt sich für Mengen knapp über 2 Tonnen ein geringerer Gesamtpreis als für 2 Tonnen oder knapp darunter.

5.3.1 Spezielle stückweise lineare Funktionen

Betragsfunktion

$$|x| = \begin{cases} x \text{ für } x \geqslant 0 \\ -x \text{ für } x < 0 \end{cases}$$

Die Funktion y(x) = |x| nennt man Betragsfunktion.
Sie setzt sich aus zwei linearen Funktionen zusammen.

Signumfunktion

Bei der Verarbeitung von Zahlenwerten am Computer kann es notwendig sein, das Vorzeichen eines Terms zu kennen.

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} +1 \text{ für } x > 0 \\ 0 \text{ für } x = 0 \\ -1 \text{ für } x < 0 \end{cases}$$

Treppenfunktionen

Funktionen, die stückweise konstant sind, nennt man Treppenfunktionen.

ZB: Die Gebühr in einem Parkhaus beträgt 2,00 € für jede begonnene Stunde. Eine Parkdauer bis zu einer Stunde kostet 2,00 €, danach bezahlt man bis zu zwei Stunden Parkdauer 4,00 € usw.

Vor allem in der Informatik werden Treppenfunktionen häufig verwendet.

- **Integerfunktion**

  Sie ordnet jeder reellen Zahl x den ganzzahligen Anteil zu.
  Die Stellen nach dem Komma werden weggelassen.
  Schreibweise: y(x) = int(x)

  ZB: int(1,45) = 1, int(−3,4) = −3

- **Gaußklammerfunktion**

  Sie ordnet jeder reellen Zahl x die größte ganze Zahl z zu, für die $z \leqslant x$ gilt. Schreibweise: $y(x) = \lfloor x \rfloor$

  ZB: $\lfloor 1{,}45 \rfloor = 1$, $\lfloor -3{,}4 \rfloor = -4$

5.77 Im Printshop werden A4-Farbkopien angeboten. Entnimm die Preise der Tabelle und stelle die Kostenfunktion für Stückzahlen bis zu 110 Stück grafisch dar. AB

Menge	Einzelkopie	ab 10 Kopien	ab 25 Kopien	ab 50 Kopien	ab 100 Kopien
Preis pro Farbkopie	0,90 €	0,65 €	0,55 €	0,50 €	0,45 €

5.78 Der Eintritt im neuen Erlebnisbad beträgt für Kinder unter 14 Jahren für die ersten beiden Stunden 3,50 €, jede weitere Stunde kostet 1,50 €. Eine Tageskarte kostet 7,00 €. ABC
1) Stelle die Kosten für Badezeiten bis zu 8 Stunden grafisch dar.
2) Ermittle grafisch, ab welcher Badezeit eine Tageskarte rentabel ist.

ABC 5.79 Für das Parkhaus am Hauptplatz gelten folgende Tarife: Die erste Stunde parkt man gratis, ab der zweiten Stunde kostet jede begonnene Stunde 2,00 €.
1) Stelle die Kostenfunktion grafisch dar.
2) Für Abendveranstaltungen gibt es Tickets um 2,50 €, mit denen man maximal 4 Stunden parken darf. Ab welcher Parkdauer ist dieses Ticket günstiger als der Normaltarif? Wie viel erspart man sich mit diesem Ticket an einem Abend höchstens?

B 5.80 Stelle die Funktion $y = |2x - 4|$ grafisch dar.

Lösung:
$2x - 4 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 4 \Rightarrow x \geq 2$
$2x - 4 < 0 \Rightarrow 2x < 4 \Rightarrow x < 2$

$$|2x - 4| = \begin{cases} 2x - 4 & \text{für } x \geq 2 \\ -2x + 4 & \text{für } x < 2 \end{cases}$$

B 5.81 Stelle die gegebene Funktion grafisch dar.
a) $y = |x + 1|$ ***b)*** $y = |4 - x|$ ***c)*** $y = \left|\frac{1}{2}x + 1\right|$

B 5.82 Stelle die Funktion im Bereich [–5; 5] grafisch dar.
a) $y(x) = 2 \cdot \text{sgn}(x)$ ***b)*** $y(x) = \text{sgn}(x + 2)$ ***c)*** $y(x) = \text{sgn}(x) + 2$

B 5.83 Stelle $y(x) = \lfloor x \rfloor$ im Bereich [–5; 5] grafisch dar und gib $\lfloor 2{,}5 \rfloor$, $\lfloor 1 \rfloor$ und $\lfloor -1{,}2 \rfloor$ an.

AB 5.84 In vielen Programmiersprachen gibt es eine Funktion, die Dezimalzahlen auf ganze Zahlen rundet. Stelle diese Funktion grafisch dar.

AC 5.85 Gib die Funktionsgleichung der skizzierten Funktion an.

Lösung:
Teilstück 1: $k = \frac{3}{2}, d = 0 \Rightarrow y_1(x) = \frac{3}{2}x$
Teilstück 2: $k = 0, d = 2 \Rightarrow y_2(x) = 2$
Teilstück 3: $k = \frac{4}{3}$, zB $P(7|6)$ einsetzen in die Funktionsgleichung:
$\Rightarrow 6 = 7 \cdot \frac{4}{3} + d \Rightarrow d = -\frac{10}{3}$
$\Rightarrow y_3(x) = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$

$$y(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{für } 2 < x \leq 4 \\ \frac{4}{3}x - \frac{10}{3} & \text{für } 4 < x \leq 7 \end{cases}$$

AC 5.86 Gib die Funktionsgleichung der skizzierten Funktion an.
a) **b)**

5.3.2 Rechnen mit Funktionen

Ähnlich wie Terme können auch Funktionen mithilfe der Grundrechnungsarten miteinander verknüpft werden. Zum Beispiel ergibt sich die Gewinnfunktion als Differenz von Erlösfunktion und Kostenfunktion.

5.87 Gegeben sind die Betragsfunktion $y_1(x) = |x|$ und die Signumfunktion $y_2(x) = \text{sgn}(x)$. Ermittle das Produkt der beiden Funktionen. Veranschauliche die Funktionen grafisch. B

Lösung:

$$y_1(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \geqslant 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}, \quad y_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

- Aus der Definition der beiden Funktionen ergeben sich drei Fälle.

$x > 0$: $|x| \cdot \text{sgn}(x) = x \cdot 1 = x$

$x = 0$: $|x| \cdot \text{sgn}(x) = 0 \cdot 0 = 0$

$x < 0$: $|x| \cdot \text{sgn}(x) = -x \cdot (-1) = x$

$\Rightarrow \; y = |x| \cdot \text{sgn}(x) = x$

5.88 Stelle die Funktionen $f(x) = \frac{7}{8}x + \frac{3}{5}$ und $g(x) = 0{,}5x - 2{,}4$ und die Differenz $f - g$ grafisch dar. B TE

Hinweis: Mit GeoGebra bzw. dem TI-Nspire werden Funktionsgleichungen eingegeben und wie Rechenausdrücke verknüpft.

5.89 Berechne die Summe bzw. die Differenz von $f(x) = 50x + 25$ und $g(x) = 50x - 25$. Gib an, ob das Ergebnis wieder eine lineare Funktion ist. Stelle grafisch dar, wie man die Summe bzw. die Differenz in einer Zeichnung ermitteln kann. BC

5.90 Wie müssen die Gewinnfunktion $G(x) = 3\,800{,}00 \,\frac{€}{\text{Stück}} \cdot x - 570\,000{,}00$ € und die Erlösfunktion $E(x) = 5\,200{,}00 \,\frac{€}{\text{Stück}} \cdot x$ verknüpft werden, um die Kostenfunktion $K(x)$ zu erhalten? Gib die Kostenfunktion an. BD

5.91 Berechne das Produkt der Funktionen $f(x) = 4x + 3$ und $g(x) = -x - 2$ und stelle es grafisch dar. Begründe, warum das Ergebnis keine lineare Funktion ist. BD TE

5.92 Gegeben sind die Funktionen $y_1(x) = 2x + 1$, $y_2(x) = 2$ und $y_3(x) = 0$. Berechne BC

1) $y_1 + y_2$ ***2)*** $y_1 + y_3$ ***3)*** $y_1 \cdot y_2$ ***4)*** $y_1 \cdot y_3$

Veranschauliche die Funktionen durch geeignete Skizzen und erkläre mit eigenen Worten, wie sich die Ergebnisse von y_1 unterscheiden.

5.93 Zeichne die Differenz der Funktionen $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = \text{int}(x)$. Erkläre mit eigenen Worte, was durch diese Differenz angegeben wird. D

5.94 Ein Farbhersteller bietet Abbeizmittel für 5,60 € pro Liter und Gebinde zu 10 Liter für den Transport an. Je Gebinde verlangt er 2,50 € Einsatz. Gib eine Funktion für den Preis des Abbeizmittels bzw. für den Einsatz bis zu 30 Liter an. Wie ergibt sich daraus eine Funktion für den zu bezahlenden Betrag? Gib diese an. AB

5.4 Proportionalität

5.4.1 Proportionen

In Abschnitt 1.3.2 haben wir eine Möglichkeit kennen gelernt, zwei Größen mithilfe eines Verhältnisses zu vergleichen.

AC **5.95** „Die Steigung einer Straße beträgt 1 : 50" bedeutet:
Höhendifferenz : Horizontalabstand = 1 : 50.
Was bedeuten die folgenden Aussagen?
1) „Der Maßstab einer Landkarte beträgt 1 : 50 000."
2) „Das Mischungsverhältnis zweier Flüssigkeiten beträgt 2 : 3."
3) „Das Übersetzungsverhältnis zweier Zahnräder beträgt 1 : 2."

Vergleicht man die Höhen der Gebäude in Abbildung 5.7, so kann man sagen: „Das große Gebäude ist viermal so hoch wie das kleine.", „Das Höhenverhältnis beträgt vier zu eins." oder „Die Höhe des großen Gebäudes verhält sich zur Höhe des kleinen Gebäudes wie 4 : 1."
Wenn wir diese Aussagen mithilfe von Variablen anschreiben, entstehen Gleichungen. Wir nennen sie **Proportionen** oder **Verhältnisgleichungen**, hier $h_1 : h_2 = 4 : 1$

Abb. 5.7

Da Verhältnisse Quotienten sind, kann die Proportion auch als Bruchgleichung $\frac{h_1}{h_2} = \frac{4}{1}$ geschrieben und anschließend bruchfrei gemacht werden. Es entsteht die Produktgleichung $h_1 = 4 \cdot h_2$.

Verbindet man zwei Verhältnisse durch ein Gleichheitszeichen, so entsteht eine
Verhältnisgleichung oder **Proportion** $a : b = c : d$ $(a, b, c, d \neq 0)$ bzw.
in bruchfreier Form eine **Produktgleichung** $a \cdot d = b \cdot c$.
Für Proportionen $a : b = c : d$ gilt also:
Das Produkt der Außenglieder a und d ist gleich dem Produkt der Innenglieder b und c.

ABC **5.96** Für Himbeersaft wird Wasser mit Himbeersirup im Verhältnis 7 : 2 vermischt. Wie viel Wasser muss zu 32 mℓ Sirup gegeben werden? Passt der Saft in ein 150-mℓ-Glas?

Lösung:

$w : 32\,m\ell = 7 : 2$ — ● Wasser : Sirup = 7 : 2

$2 \cdot w = 7 \cdot 32\,m\ell$ — ● Produkt der Außenglieder = Produkt der Innenglieder

$w = 112\,m\ell$

$32\,m\ell + 112\,m\ell = 144\,m\ell < 150\,m\ell$

Man muss 112 mℓ Wasser dazugeben. Der Saft passt gerade noch in das Glas.

Durch Umformen der gegebenen Proportion können weitere Zusammenhänge abgelesen werden.

$a : b = c : d \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$

$a \cdot d = c \cdot b \Rightarrow a : c = b : d$

Werden in der Produktgleichung die Faktoren auf der rechten Seite vertauscht und die Gleichung wieder als Proportion angeschrieben, so sind gegenüber der ursprünglichen Proportion die Innenglieder vertauscht. Ebenso führt das Vertauschen der Faktoren auf der linken Seite der Produktgleichung zum Vertauschen der Außenglieder.

Die beiden Innenglieder bzw. die beiden Außenglieder einer Proportion dürfen miteinander vertauscht werden.

Eine Proportion kann auch mithilfe von Anteilen beschrieben werden. Zum Beispiel bedeutet $a : b = 2 : 3$, dass a aus 2 Teilen einer Größe und b aus 3 Teilen derselben Größe besteht. Aus dieser Darstellung erkennt man, dass a und b zusammen 5 Teile ergeben.

a b

Man kann daher auch die Schreibweise $a = 2 \cdot k$ und $b = 3 \cdot k$ verwenden, denn es gilt:
$a : b = 2 : 3 \Leftrightarrow a : b = 4 : 6 \Leftrightarrow a : b = 10 : 15$ ...

Für eine Proportion gilt: $a : b = c : d \Rightarrow a = k \cdot c$ und $b = k \cdot d$
k wird als **Proportionalitätsfaktor** bezeichnet.

5.97 Für den Umfang des abgebildeten gleichschenkligen Dreiecks gilt $u = 2 \cdot x + y$. Berechne die Längen der Seiten, wenn der Umfang u = 68 cm beträgt und für die Längen der Seiten gilt $x : y = 7 : 3$.

AB

x x y

Lösung:

$u = 2 \cdot x + y$
$68\text{ cm} = 2 \cdot x + y$

$x : y = 7 : 3 \Rightarrow x : y = 7\text{ cm} : 3\text{ cm}$
$x = k \cdot 7\text{ cm}$
$y = k \cdot 3\text{ cm}$

- x und y sind Längen
- k ... Proportionalitätsfaktor

$68\text{ cm} = 2x + y$
$68\text{ cm} = 2 \cdot k \cdot 7\text{ cm} + k \cdot 3\text{ cm}$
$68\text{ cm} = k \cdot 17\text{ cm}$
$k = 4$
$x = k \cdot 7\text{ cm} = 28\text{ cm}$
$y = k \cdot 3\text{ cm} = 12\text{ cm}$

- Durch Einsetzen in die Gleichung können k und die gesuchten Längen berechnet werden.

Jeder Schenkel ist 28 cm lang, die Basis ist 12 cm lang.

Fortlaufende Proportionen

5.98 Maximilians Schwester Sophie ist zwei Jahre älter als er und erhält doppelt so viel Taschengeld wie er. Maximilians Schwester Anna ist sechs Jahre älter als er und erhält sechsmal so viel Taschengeld wie er.

ABC

1) Wie verhält sich das Taschengeld der drei Geschwister zueinander? Gib die beiden fehlenden Zahlen an:
Maximilian : Sophie : Anna = 1 : ? : ?

2) Lies aus der entstehenden Gleichung ab, wie sich das Taschengeld von Sophie zu Annas Taschengeld verhält.

Eine Proportion der Form $a : b : c = d : e : f$ ($a, b, c, d, e, f \neq 0$) heißt **fortlaufende Proportion**.
Sie beinhaltet die Proportionen $a : b = d : e$, $b : c = e : f$ und $a : c = d : f$.

Analog sind auch fortlaufende Proportionen mit mehr als drei Gliedern auf jeder Seite möglich.

AB **5.99** Bei einem Triathlon muss jeder Teilnehmer eine Strecke von 154 km zurücklegen. Dabei ist das Verhältnis von geschwommener Strecke s zu gelaufener Strecke ℓ 2 : 15 und das Verhältnis von gelaufener Strecke ℓ zu der mit dem Fahrrad zurückgelegten Strecke f 1 : 4. Berechne die Längen der drei Teilstrecken.

Lösung:

$s : \ell = 2\text{ km} : 15\text{ km}$

$\ell : f = 1\text{ km} : 4\text{ km} \quad | \cdot 15$

$s : \ell = 2\text{ km} : 15\text{ km}$

$\ell : f = 15\text{ km} : 60\text{ km}$

$s : \ell : f = 2\text{ km} : 15\text{ km} : 60\text{ km}$

- Aus der Angabe ergeben sich zwei Proportionen. Um diese als fortlaufende Proportion anzuschreiben, muss die Größe, die in beiden Proportionen vorkommt, gleich sein.
- Daher werden die Glieder der rechten Seite der zweiten Proportion mit 15 multipliziert.

$s = 2\text{ km} \cdot k,\ \ \ell = 15\text{ km} \cdot k,\ \ f = 60\text{ km} \cdot k$

- k ... Proportionalitätsfaktor

$$s + \ell + f = 154\text{ km}$$
$$2\text{ km} \cdot k + 15\text{ km} \cdot k + 60\text{ km} \cdot k = 154\text{ km}$$
$$77\text{ km} \cdot k = 154\text{ km}$$
$$k = 2$$

$s = 2\text{ km} \cdot 2 = 4\text{ km}$

$\ell = 15\text{ km} \cdot 3 = 30\text{ km}$

$f = 60\text{ km} \cdot 2 = 120\text{ km}$

Die Schwimmstrecke beträgt 4 km, die Laufstrecke 30 km und die mit dem Fahrrad zurückgelegte Strecke 120 km.

Mittelwerte

Was im Alltag meist mit „Durchschnitt“ bezeichnet wird, ist, mathematisch gesehen, ein Mittelwert.

ABC **5.100** ***1)*** Andreas ist 180 cm groß, Bettina ist 160 cm groß. Die Größe von Martin liegt genau in der Mitte. Wie groß ist Martin? Gib den Größenunterschied zwischen Andreas und Martin bzw. zwischen Martin und Bettina in Zentimeter an.

2) In einem Reagenzglas vermehren sich Bakterien gleichmäßig. Um 10:00 Uhr waren es 1 000 Bakterien, um 11:00 Uhr 2 000 Bakterien und um 13:00 Uhr 8 000 Bakterien. Wie viele Bakterien waren es um 12:00 Uhr? Welcher Rechenschritt beschreibt die Änderung der Anzahl zwischen 11:00 Uhr und 12:00 Uhr und welcher zwischen 12:00 Uhr und 13:00 Uhr?

Wird die Änderung von Werten mithilfe der Differenz beschrieben, entspricht dem „Durchschnitt“ das **arithmetische Mittel**.

$$a - \overline{m} = \overline{m} - b \quad | + \overline{m} + b$$
$$2 \cdot \overline{m} = a + b \quad | : 2$$
$$\overline{m} = \frac{a+b}{2}$$

Der Wert $\overline{m} = \frac{a+b}{2}$ heißt **arithmetisches Mittel** von a und b.

Wird die Änderung von Werten durch Änderungsfaktoren bzw. Verhältnisse beschrieben, entspricht dem „Durchschnitt“ das **geometrische Mittel**.

$$a : \overline{m}_g = \overline{m}_g : b \quad | \cdot \overline{m}_g \cdot b$$
$$\overline{m}_g^{\,2} = a \cdot b \quad | \sqrt{\ }$$
$$\overline{m}_g = \sqrt{a \cdot b}$$

Der Wert $\overline{m}_g = \sqrt{a \cdot b}$ heißt **geometrisches Mittel** von a und b.

5.101 Bei einer Radtour werden am ersten Tag 64 km zurückgelegt, am zweiten Tag werden 48 km zurückgelegt. Wie lang war eine Tagesetappe im „Durchschnitt“? Welchen Mittelwert berechnest du? Begründe deine Wahl.

ABD

Lösung:
Unterschiede in der Länge der Tagesetappe werden durch die Differenz beschrieben. ZB: Am zweiten Tag wurden um 16 km weniger zurückgelegt. Es wird daher das arithmetische Mittel berechnet.

$\bar{m} = \frac{a + b}{2} = \frac{64 \text{ km} + 48 \text{ km}}{2} = 56 \text{ km}$

5.102 Jonas legt ein Foto mit den Abmessungen 10 cm x 15 cm in den Kopierer, um es zu vergrößern. Weil ihm das vergrößerte Foto noch immer zu klein ist, vergrößert er die Kopie ein zweites Mal. Er erhält ein Foto mit den Abmessungen 14,4 cm x 21,6 cm. Welche Abmessungen hatte das Foto der ersten Kopie? Welchen Vergrößerungsfaktor bzw. Prozentwert hatte Jonas eingestellt? Welcher Mittelwert wird hier berechnet? Begründe deine Antwort.

ABD

10x15

b_1

ℓ_1

14,4x21,6

Lösung:
Die Änderungen der Seitenlängen werden durch Änderungsfaktoren beschrieben, das heißt die neue Länge ist ein Vielfaches der ursprünglichen. Es wird daher das geometrische Mittel berechnet.

$\ell_1 = \sqrt{10 \text{ cm} \cdot 14{,}4 \text{ cm}} = \sqrt{144 \text{ cm}^2} = 12 \text{ cm}$

$b_1 = \sqrt{15 \text{ cm} \cdot 21{,}6 \text{ cm}} = \sqrt{324 \text{ cm}^2} = 18 \text{ cm}$

Das Foto war in der ersten Kopie 12 cm lang und 18 cm breit.

ZB 12 cm : 10 cm = $\frac{12 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 1{,}2$

Jonas hatte den Vergrößerungsfaktor 1,2 bzw. 120 % eingestellt.

Proportionen

5.103 Welche der Gleichungen entsprechen der gegebenen Proportion? Welche Umformungen wurden durchgeführt?

BC

a) $a : b = 3 : 4$ **1)** $4 : 3 = b : a$ **2)** $a : 3 = 4 : b$ **3)** $a = 0{,}75 \cdot b$

b) $r_1 : r_2 = z_1 : z_2$ **1)** $r_1 : z_1 = z_2 : r_2$ **2)** $r_1 \cdot z_2 = r_2 \cdot z_1$ **3)** $r_1 : z_1 = r_2 : z_2$

Aufgaben 5.104 – 5.107: Löse die folgenden Proportionen nach x.

5.104 **a)** $x : 4 = 2 : 7$ **b)** $3 : 5 = x : 9$ **c)** $2 : x = 8 : 3$ **d)** $9 : 40 = 5 : x$ — B

5.105 **a)** $2{,}4 : x = 1{,}5 : 2{,}1$ **b)** $x : 1{,}25 = 5{,}28 : 1{,}65$ **c)** $\frac{6}{11} : x = \frac{2}{5} : \frac{3}{8}$ **d)** $\frac{9}{4} : \frac{1}{3} = x : \frac{5}{2}$ — B

5.106 **a)** $(x - 1) : 9 = 5 : 3$ **b)** $5 : (3x - 2) = 6 : \frac{2}{3}$ **c)** $4 : 5 = 12 : (x + 5)$ — B

5.107 **a)** $(x + 2) : (2x - 3) = 9 : 2$ **c)** $x : (x + 3) = \frac{1}{3} : \frac{2}{5}$ **e)** $(2x + 1) : (x - 1) = 4x : (2x + 2)$ — B

b) $(3x - 5) : (4x - 2) = \frac{3}{7} : 4$ **d)** $5 : 3 = 2x : (x + 7)$ **f)** $(2x - 1) : (3x - 4) = 4x : (6x - 1)$

Aufgaben 5.108 – 5.110: Löse die folgenden Proportionen nach x.

B **5.108** **a)** $x : a = 3 : 4$ **b)** $x : \frac{2}{b} = \frac{1}{a} : 4b$ **c)** $3a : 2b = 2x : 9ab$

B **5.109** **a)** $(a + 1) : b = (b + 1) : x$ **b)** $ab : (x + 2) = b : (x - 3)$ **c)** $(2 - x) : 3a = (x + 1) : (2a - 2)$

B **5.110** **a)** $\frac{1}{x-2} : \frac{x-3}{a} = \frac{a}{x} : (x - 3)$ **b)** $\frac{u-v}{x} : \frac{u-x}{v} = \frac{2}{x} : \frac{1-x}{v}$ **c)** $\frac{3p}{q-1} : \frac{5p}{x-3} = \frac{2x}{q-1} : \frac{5p}{p+1}$

ABC **5.111** Bei einem Zahnradgetriebe oder einem Kettentrieb stehen die Anzahl der Zähne (z_1, z_2) im selben Verhältnis wie die Radien (r_1, r_2) der Zahnräder.

1) Welche Proportion drückt diesen Zusammenhang aus?
A) $z_1 : z_2 = r_2 : r_1$ B) $z_1 : z_2 = r_1 : r_2$

2) Wie viele Zähne hat das erste Zahnrad, wenn der Radius des zweiten Zahnrads halb so groß ist wie der des ersten?

B **5.112** Zwischen den Drehzahlen n_1 und n_2 und den Anzahlen der Zähne z_1 und z_2 der Zahnräder eines Zahnradgetriebes oder eines Kettentriebs besteht der Zusammenhang $n_1 : n_2 = z_2 : z_1$. Berechne die fehlende Größe.

a) $n_2 = 1\,000\text{ min}^{-1}$, $z_1 = 8$, $z_2 = 22$
b) $n_1 = 5\text{ min}^{-1}$, $z_1 = 85$, $z_2 = 18$
c) $n_1 = 1\,250\text{ min}^{-1}$, $n_2 = 860\text{ min}^{-1}$, $z_2 = 32$
d) $n_1 = 8\,000\text{ min}^{-1}$, $n_2 = 1\,000\text{ min}^{-1}$, $z_1 = 60$

ABD **5.113** Bei einem hydraulischen Wagenheber wird die Kraft zum Anheben des Fahrzeugs über ein Kolbensystem (Pumpkolben, Lastenkolben) erzeugt. Dabei gilt für die Kolbenkräfte F_P und F_L und für die Kolbenquerschnittsflächen A_P und A_L, dass $F_P : F_L = A_P : A_L$.

1) Berechne die am Pumpkolben notwendige Kraft F_P, wenn die am Lastkolben auftretende Kraft $F_L = 3\,500$ N und die Querschnittsflächen $A_P = 2{,}5\text{ cm}^2$ und $A_L = 87{,}5\text{ cm}^2$ betragen.

2) Wie ändert sich die notwendige Kraft, wenn die Fläche A_P verdoppelt wird?

ABC **5.114** Bei einer Balkenwaage im Gleichgewicht besteht zwischen den Massen in den Waagschalen und den Längen des Waagbalkens der Zusammenhang $m_1 : m_2 = \ell_2 : \ell_1$.

1) Welche Masse m_1 hat der zu wiegende Gegenstand, wenn das Wiegegewicht die Masse $m_2 = 0{,}33$ kg hat und das Verhältnis der Längen $\ell_1 : \ell_2 = 1 : 7$ beträgt?

2) Schreibe die Proportion als Produktgleichung an. Welches dir bekannte physikalische Gesetz ergibt sich daraus?

AB **5.115** Das Verhältnis der Winkel α und β eines rechtwinkligen Dreiecks beträgt 11 : 4. Berechne die Größe der Winkel.

AB **5.116** Das Verhältnis der Winkel α und β eines Parallelogramms beträgt 3 : 7. Berechne die Größe der Winkel.

AB **5.117** Der Umfang eines Rechtecks beträgt u = 76 cm und für das Verhältnis der Seiten gilt Länge : Breite = 9 : 4. Berechne die Länge ℓ und die Breite b.

ABD **5.118** Am Ende des Jahres 2012 sollen zwei Unternehmer den Gewinn von 150 000,00 € im Verhältnis 1 : 3 aufteilen.

1) Der erste Unternehmer behauptet, dass er daher ein Drittel des Gewinns bekommt. Der Zweite erklärt ihm aber, dass er nur ein Viertel erhält. Wer von den beiden hat Recht? Begründe deine Entscheidung.

2) Wie müsste das Verhältnis lauten, damit der erste Unternehmer ein Fünftel erhält?

3) Sie einigen sich auf das Verhältnis 3 : 7. Wie viel Geld erhält jeder?

5.119 Stehen zwei Größen so im Verhältnis zueinander, dass a : b = (a + b) : a gilt, so spricht man vom **goldenen Schnitt**. Dieses Verhältnis wird schon seit der Antike als besonders ästhetisch empfunden und wird daher zum Beispiel in der Architektur verwendet. Dabei ist $a : b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} : 1 \approx 1{,}618 : 1$. BCD

1) Das Verhältnis zweier Strecken a und b entspricht dem goldenen Schnitt. Fertige eine beschriftete Zeichnung mit a = 4 cm an. Erkläre die oben angegebene Proportion mithilfe der Zeichnung.
2) Finde mithilfe des Internets Bauwerke, bei denen der goldene Schnitt verwendet wurde.
3) In welchen Bereichen tritt der goldene Schnitt auf bzw. soll er angeblich auftreten? Arbeitet in Kleingruppen und präsentiert ein Plakat mit interessanten Beispielen.

Fortlaufende Proportionen

Aufgaben 5.120 – 5.121: Gib die Proportionen an, die die angegebenen fortlaufenden Proportionen beinhalten. Verwende möglichst einfache Zahlenwerte.

5.120 ***a)*** a : b : c = 2 : 7 : 5 ***b)*** u : v : w = 3 : 15 : 20 ***c)*** n : m : o = 1 : 10 : 100 B

5.121 ***a)*** $t_1 : t_2 : t_3 = 5 : 10 : 14$ ***b)*** $V_1 : V_2 : V_3 = 9 : 27 : 81$ ***c)*** $\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 = 0{,}84 : 0{,}86 : 0{,}87$ B

Aufgaben 5.122 – 5.124: Bilde fortlaufende Proportionen.

5.122 B
a) a : b = 3 : 5, b : c = 1 : 4
b) a : b = 2 : 3, a : c = 6 : 1
c) $R_1 : R_2 = 10 : 100$, $R_2 : R_3 = 5 : 10$
d) $F_1 : F_2 = 5 : 9$, $F_1 : F_3 = 2 : 7$

5.123 B
a) $u : v = 2 : \frac{1}{2}$, $v : w = 2 : 3$
b) $a : b = 7 : \frac{3}{4}$, $b : c = \frac{2}{3} : 2$
c) $x : y = \frac{5}{6} : 2$, $x : z = 3 : \frac{1}{3}$

5.124 B
a) r : s = 0,9 : 0,4, s : t = 0,3 : 0,7
b) a : b = 0,2 : 5, a : c = 0,5 : 8
c) l : b = 2,5 : 2,7, b : h = 3,6 : 3,0

5.125 Für die Seiten eines Dreiecks soll a : b : c = 3 : 2 : 6 gelten. BCD
1) Begründe, warum diese Angabe nicht stimmen kann.
2) Ändere den Wert für c so ab, dass die Angabe möglich ist. Berechne anschließend die Längen der Seiten b und c, wenn a = 9 cm lang ist.

5.126 Zum Abmischen von 1 m^3 Beton sind 1 900 kg Sand notwendig. Wie viel Kilogramm Zement und wie viel Kilogramm Wasser müssen dem Sand zugesetzt werden, wenn das Mischungsverhältnis von Zement : Sand : Wasser = 1 : 5 : 0,6 beträgt? Gib an, welche Dichte der so entstandene Beton hat, und dokumentiere deine Überlegungen. ABC

5.127 Für das Verhältnis der Winkel eines Dreiecks gilt $\alpha : \beta : \gamma = 11 : 12 : 13$. Berechne die Größen der Winkel. B

5.128 Drei Gesellschafter haben bei der Gründung eines Unternehmens folgende Investitionen getätigt: 3 000,00 €, 25 000,00 € und 40 000,00 €. Wie kann ein Gewinn von 429 998,00 € gerecht aufgeteilt werden? Berechne die einzelnen Beträge. BD

5.129 Bei einem Radrennen müssen in drei Etappen insgesamt 480 km zurückgelegt werden. Dabei ist das Verhältnis der Länge der ersten Etappe zur Länge der zweiten Etappe 3 : 5 und das Verhältnis der Länge der zweiten Etappe zur Länge der dritten Etappe 3 : 2. Berechne die Längen der drei Etappen. AB

Mittelwerte

D **5.130** Welcher Mittelwert passt besser? Begründe deine Antwort.

1) Die „durchschnittliche“ Anzahl von Besuchern auf einer zweitägigen Veranstaltung.
2) Jährlicher „durchschnittlicher“ Wachstumsfaktor, wenn die Werte von 2010 und 2012 bekannt sind.
3) Schraubendurchmesser, der „in der Mitte“ zwischen zwei vorhandenen Größen liegt.

BC **5.131** Überprüfe, ob m ein Mittelwert der Zahlen a und b ist und gib gegebenenfalls an, welcher.

a) a = 3, m = 6, b = 12 **c)** a = 10, m = 16, b = 40 **e)** a = 2, m = 4, b = 8
b) a = 7, m = 12, b = 15 **d)** a = 17, m = 18, b = 19 **f)** a = 4, m = 10, b = 24

B **5.132** Berechne das geometrische Mittel der Zahlen a und b.

a) a = 2, b = 32 **b)** a = 27, b = 3 **c)** a = 121, b = 9 **d)** a = 196, b = 4

AB **5.133** Finde zwei Zahlen so, dass das arithmetische und das geometrische Mittel gleich groß sind.

B **5.134** Berechne das arithmetische und das geometrische Mittel der beiden Zahlen und schreibe die Ergebnisse in der Form $a - \bar{m} = \bar{m} - b$ und $a : \bar{m}_g = \bar{m}_g : b$ an.

a) a = 2, b = 72 **b)** a = 1 250, b = 8 **c)** a = 0,5, b = 684,5 **d)** a = 32,67, b = 3

ABD **5.135** Die Länge einer Strecke a beträgt 1 km und die Länge einer Strecke b beträgt 1 mm. Berechne das arithmetische und das geometrische Mittel der beiden Strecken und schreibe die Ergebnisse in der Form $a - \bar{m} = \bar{m} - b$ und $a : \bar{m}_g = \bar{m}_g : b$ an. Begründe, welcher Mittelwert sich zum Vergleich der beiden Größen besser eignet.

ABC **5.136** Ein Radrennen wird in drei Tagesetappen gefahren. Die erste Etappe ist 158 km lang und die dritte Etappe ist 105 km lang. Berechne die Länge der zweiten Etappe, wenn die Etappen täglich um die gleiche Strecke kürzer werden. Beschreibe, wie der Wert rasch und effizient berechnet werden kann.

ABD **5.137** Die genormten Papierformate A0, A1 usw. sind so gewählt, dass das Verhältnis von Höhe zu Breite immer gleich ist und die nächstkleinere Größe jeweils durch Halbieren des Blatts entsteht. Das A3-Blatt ist 420 mm hoch.

1) Berechne die Breite des A4-Blatts.
2) Gib die Proportion mit dem Verhältnis Höhe zu Breite der beiden Papiergrößen an und berechne damit die Breite des A3-Blatts.
3) Welcher Mittelwert wird hier berechnet? Begründe.

AB **5.138** Herr Kaiser möchte Wasserleitungsrohre kaufen. Im Baumarkt werden Rohre mit 19 mm Außendurchmesser und mit 29 mm Außendurchmesser angeboten. Herr Kaiser weiß, dass es dazwischen noch eine Größe gibt. Welchen Außendurchmesser hat diese, wenn das Verhältnis der Außendurchmesser der im Handel erhältlichen Wasserleitungsrohre konstant ist?

AB **5.139** Der Umsatz einer Schlosserei betrug im Jahr 2009 194 000,00 € und im Jahr 2011 betrug er 230 490,00 €. Wie hoch war der Umsatz im Jahr 2010, wenn

a) das Verhältnis der jährlichen Umsätze konstant ist?
b) die Differenz der Umsätze zweier aufeinander folgender Jahre konstant ist?

AB **5.140** Der Wert einer Aktie ist in den letzten beiden Jahren von 28,60 € auf 24,10 € gesunken, wobei das Verhältnis Kurs : Vorjahreskurs konstant war.

a) Wie hoch war der Wert einer Aktie vor einem Jahr?
b) Wie hoch wird der Wert einer Aktie in zwei Jahren sein, wenn das Verhältnis der Aktienkurse weiterhin konstant bleibt?

5.4.2 Direkte und indirekte Proportionalität, Schlussrechnung

Oft ist der Zusammenhang zweier Größen so gegeben, dass sich bei Änderung der einen Größe die andere im selben Verhältnis bzw. genau gegengleich ändert.

Direkt proportionale Zusammenhänge

Sind zwei Größen zueinander **direkt proportional**, lässt sich dieser Zusammenhang mithilfe eines konstanten Änderungsfaktors beschreiben. Vereinfacht gesagt gilt: **Mehr** von der einen Größe bedeutet **mehr** von der anderen Größe; **weniger** von der einen Größe bedeutet **weniger** von der anderen Größe. ZB: Wird die eine Größe verdoppelt, so wird auch die andere Größe verdoppelt.

5.141 1 kg Orangen kostet 2,00 €. ABC

1) Gib als Funktionsgleichung an, wie der Preis von der Menge x (in kg) abhängt.

2) Zeichne den Funktionsgraphen in ein Koordinatensystem ein. Wie nennt man diesen Graphen?

Der Zusammenhang zwischen **direkt proportionalen Größen** lässt sich in der Form

$y = k \cdot x$

angeben. Der **Proportionalitätsfaktor k** gibt die Steigung der Funktion an.
Die Funktionsgleichung entspricht einer **linearen Funktion** mit **d = 0**.

ZB: Eine Pumpe fördert in 4 Stunden 128 m^3 Wasser. Welche Wassermenge kann sie in 6,5 Stunden fördern, welche in t Stunden?

Für die Wassermenge gilt: Je **länger** die Förderzeit ist, desto **größer** ist die geförderte Menge. Zum Beispiel wird in der dreifachen Zeit die dreifache Menge an Wasser gefördert.

↓ 4 Stunden …… 128 m^3 ↓
6,5 Stunden …… x

Die geförderte Wassermenge und die dafür benötigte Zeit sind zueinander **direkt proportional**.

Soll nur der Wert nach 6,5 Stunden berechnet werden, kann eine Schlussrechnung oder eine Proportion verwendet werden.

Schlussrechnung:

4 Stunden ………… 128 m^3

(: 4) 1 Stunde ………… $\frac{128\ m^3}{4}$ (: 4)

(· 6,5) 6,5 Stunden ……. $x = \frac{128\ m^3}{4} \cdot 6{,}5 = 208\ m^3$ (· 6,5)

Proportion:

$4\ h : 6{,}5\ h = 128\ m^3 : x$

$4\ h \cdot x = 128\ m^3 \cdot 6{,}5\ h$

$x = \frac{128\ m^3 \cdot 6{,}5\ h}{4\ h} = 208\ m^3$

Der allgemeine Zusammenhang wird mithilfe einer linearen **Funktion** beschrieben.

W(t) ... Wassermenge (in Litern), t ... Zeit (in Stunden)

$W(t) = k \cdot t$

$W(4\ h) = 128\ m^3$

$128\ m^3 = k \cdot 4\ h \Rightarrow k = \frac{128\ m^3}{4\ h} = 32\ \frac{m^3}{h}$

$W(t) = 32\ \frac{m^3}{h} \cdot t$

$W(6{,}5\ h) = 32\ \frac{m^3}{h} \cdot 6{,}5\ h = 208\ m^3$

Funktionen

Indirekt proportionale Zusammenhänge

Sind zwei Größen zueinander **indirekt proportional**, so ist das Produkt aus Ausgangsgröße und zugeordneter Größe konstant. Vereinfacht: **Mehr** von der einen Größe bedeutet **weniger** von der anderen Größe; **weniger** von der einen Größe bedeutet **mehr** von der anderen Größe.

ZB: Die Längen und die Breiten aller Rechtecke mit dem konstanten Flächeninhalt 48 cm² sind zueinander indirekt proportionale Größen. Drückt man aus dem Zusammenhang

$$\ell \cdot b = 48\ \text{cm}^2$$

zum Beispiel die Variable b aus, erhält man die Formel

$$b = \frac{48\ \text{cm}^2}{\ell}.$$

b kann also als Funktion der Größe ℓ aufgefasst werden, man schreibt zur Verdeutlichung auch $b(\ell)$.
Ebenso kann man ℓ als Funktion von b angeben.

ℓ	b
3	16
4	12
6	8
8	6
12	4
16	3

Das Produkt von **indirekt proportionalen Größen** x und y ist konstant, es gilt: $x \cdot y = k$
Drückt man aus dem Zusammenhang eine der beiden Größen aus, so erhält man eine **Reziprokfunktion** der Form $y = \frac{k}{x}$.

ABCD **5.142** Eine Gemeinde rechnet damit, im kommenden Winter an 48 Tagen jeweils 1 200 kg Streusand auf den Gehsteigen zu benötigen und legt einen entsprechenden Vorrat an. Berechne, wie viele Tage früher der Vorrat aufgebraucht ist, wenn aufgrund zusätzlich zu streuender Flächen 1 440 kg pro Streutag verbraucht werden. Erkläre, um welches Verhältnis es sich handelt. Führe die Berechnung mithilfe einer Schlussrechnung und mithilfe einer Proportion durch und stelle den Zusammenhang grafisch dar.

Lösung:
Je **mehr** Streusand verbraucht wird, desto **weniger** Tage reicht der Vorrat. Zum Beispiel reicht die doppelte Menge an Streusand nur für die halbe Anzahl der Tage. Die Streumenge und die Streutage sind zueinander **indirekt proportional**.

$$1\,200\ \tfrac{\text{kg}}{\text{d}} \ldots\ldots\ldots\ 48\ \text{Tage}$$
$$1\,440\ \tfrac{\text{kg}}{\text{d}} \ldots\ldots\ldots\ x$$

Schlussrechnung:

$$1\,200\ \tfrac{\text{kg}}{\text{d}} \ldots\ldots\ldots\ 48\ \text{d}$$
(: 1 200 / · 1 200)
$$1\ \tfrac{\text{kg}}{\text{d}} \ldots\ldots\ldots\ 48\ \text{d} \cdot 1\,200$$
(· 1 440 / : 1 440)
$$1\,440\ \tfrac{\text{kg}}{\text{d}} \ldots\ldots\ x = \frac{48\ \text{d} \cdot 1\,200}{1\,440} = 40\ \text{d}$$

Proportion:

$$1\,200\ \tfrac{\text{kg}}{\text{d}} : 1\,440\ \tfrac{\text{kg}}{\text{d}} = x : 48\ \text{d}$$
$$1\,440\ \tfrac{\text{kg}}{\text{d}} \cdot x = 48\ \text{d} \cdot 1\,200\ \tfrac{\text{kg}}{\text{d}}$$
$$x = \frac{48\ \text{d} \cdot 1\,200\ \tfrac{\text{kg}}{\text{d}}}{1\,440\ \tfrac{\text{kg}}{\text{d}}} = 40\ \text{d}$$

Funktion:

$t(s) = \frac{k}{s}$ mit $k = s \cdot t = 1\,200\ \frac{\text{kg}}{\text{d}} \cdot 48\ \text{d} = 57\,600\ \text{kg}$

k ... Gesamtmenge an Streusand

$$t\left(1\,440\ \tfrac{\text{kg}}{\text{d}}\right) = \frac{57\,600\ \text{kg}}{1\,440\ \tfrac{\text{kg}}{\text{d}}} = 40\ \text{d}$$

Der Vorrat ist acht Tage früher aufgebraucht.

5.143 Ein Zusammenhang zwischen zwei Größen ist durch eine Funktion gegeben. Handelt es sich bei diesem Zusammenhang um proportionale Größen? Begründe deine Entscheidung und gib gegebenenfalls an, ob die Größen direkt oder indirekt proportional sind. CD

a) $A(r) = r^2 \cdot \pi$ ***b)*** $s(t) = v \cdot t$ ***c)*** $v(t) = \frac{s}{t}$ ***d)*** $\sigma(a) = \frac{F}{a^2}$ ***e)*** $V(h) = r^2 \cdot \pi \cdot h$

5.144 Gib an, ob es sich um direkt proportionale oder indirekt proportionale Größen handelt oder keines von beiden. Begründe jeweils deine Antwort. ACD

1) Umfang eines Kreises und dessen Radius
2) Höhe und Grundfläche eines quadratischen Prismas mit konstantem Volumen
3) Druck und Kraft, die auf eine konstante Fläche wirkt
4) Anzahl von Eiern und deren Kochzeit
5) Anzahl von Malern und die für eine Malerarbeit benötigte Zeit
6) Gesprächsdauer und Telefonkosten

5.145 Eine Ware wird in 0,5-kg-Paketen verkauft. 3 kg dieser Ware kosten 3,60 €. ABC

1) Sind Masse und Preis zueinander direkt oder indirekt proportional?
2) Wie viel kosten 4 kg dieser Ware?
3) Gib den Zusammenhang zwischen dem Preis P und der Menge x (in kg) als Formel an.
4) Erstelle eine Wertetabelle für Verkaufsmengen von 1 kg bis 4 kg mit 0,5 kg Schrittweite.
5) Stelle den Zusammenhang zwischen verkaufter Menge und Preis für Mengen von 0 kg bis 5 kg grafisch dar (1 kg ≙ 1 cm, 1,00 € ≙ 1 cm). Überprüfe das Ergebnis aus ***2)***.

5.146 Ein Schwimmbecken wird eingelassen. Das Befüllen des Schwimmbeckens dauert 30 Stunden, wenn pro Stunde 2 000 Liter zufließen. AB

1) Wie lang dauert das Befüllen bei einem Zufluss von 1 000 $\frac{\ell}{h}$?
2) Wie viel Kubikmeter Wasser fasst das Schwimmbecken?
3) Gib eine Formel für die Fülldauer t(w), abhängig vom Zufluss w (in Liter pro Stunde) an.
4) Erstelle eine Wertetabelle für t(w) mit w = 500 $\frac{\ell}{h}$, 1 000 $\frac{\ell}{h}$ ... 4 000 $\frac{\ell}{h}$ und eine Grafik.

5.147 Bei der Messung der Dehnung einer Feder wurden nebenstehende Werte ermittelt. Ist der Zusammenhang direkt proportional, indirekt proportional oder weder noch? Überlege anhand einer Grafik und überprüfe durch eine Rechnung. ABC TE

y (in mm)	3	22,5	51	99
F (in N)	2	15	34	66

Lösung:
Weil man den Eindruck hat, dass die Punkte auf einer Geraden liegen, nimmt man an, dass der Zusammenhang direkt proportional ist und

$F = k \cdot y$ bzw. $k = \frac{F}{y}$ gilt.

y	F
3	2
22,5	15
51	34
99	66

F
70
60
50
40
30
20
10
0
0 20 40 60 80 100
y

Überprüfung:
$k = \frac{2\text{ N}}{3\text{ mm}} = \frac{15\text{ N}}{22{,}5\text{ mm}} = \frac{34\text{ N}}{51\text{ mm}} \ldots$

Die Vermutung war richtig.

Hinweis: Technologieeinsatz (TE) siehe Seite 309

5.148 Beschreiben die Wertepaare direkt proportionale, indirekt proportionale Größen oder weder noch? Überlege anhand einer Grafik und überprüfe durch eine Rechnung. ABC TE

a) (0|1), (2|6), (4|12), (7|21) ***b)*** (1|2), (8|0,25), (0,1|20)

Funktionen

ABC **5.149** Ein PKW verbraucht für eine Strecke von 250 km 16 ℓ Diesel.

1) Für welche Strecke reicht der Tankinhalt von 50 ℓ Diesel bei gleich bleibendem mittleren Verbrauch?

2) Wie groß ist der mittlere Verbrauch je 100 km?

3) Stelle die gefahrene Strecke s(ℓ), abhängig vom Verbrauch ℓ (in Litern) grafisch dar. Wie kann der mittlere Verbrauch abgelesen werden?

AB **5.150** Die Funktion f(x) beschreibt einen direkt proportionalen Zusammenhang mit f(10) = 15. Ermittle den Proportionalitätsfaktor k und gib die Funktionsgleichung an. Stelle den Zusammenhang grafisch dar.

B **5.151** **1)** Gib eine möglichst umfassende Definitionsmenge für die gegebene Funktion an.

2) Erstelle eine Wertetabelle in einem sinnvoll gewählten Bereich.

3) Stelle die Funktion grafisch dar.

a) $y = \frac{1}{x}$ **b)** $y = \frac{4}{x}$ **c)** $y = \frac{5}{2x}$

AB **5.152** Ein Körper hat auf dem Mond rund $\frac{1}{6}$ des Gewichts auf der Erde, auf dem Mars das 0,38-fache des Gewichts auf der Erde.

1) Gib den Zusammenhang zwischen Gewicht auf der Erde und Gewicht auf dem Mond bzw. dem Mars als Funktionsgleichung an.

2) Stelle die Zusammenhänge für Gewichte von 0 N bis 1 000 N (Erdgewicht) in einem Diagramm grafisch dar, wähle geeignete Maßstäbe.

ABC **5.153** Um das Alter von Bäumen zu bestimmen, wird folgende „Faustregel" verwendet: Misst man den Umfang in 1,30 m Höhe in Zentimeter und dividiert ihn durch $\frac{\pi \cdot 0{,}8\ \text{cm}}{\text{Jahr}}$, so erhält man das Alter in Jahren.

1) Gib das Alter a als Funktion des Umfangs u an und stelle den Zusammenhang grafisch dar. Achte auf eine sinnvolle Definitionsmenge.

2) Beantworte die Fragen durch Berechnung und kontrolliere in der Zeichnung: Wie alt ist ein Baum mit 1,8 m Umfang? Welchen Umfang hat ein 50 Jahre alter Baum?

AB **5.154** Von Tulln verläuft entlang der Donau ein Radweg stromabwärts annähernd geradlinig und eben. Roland fährt eine Strecke von 36 km. Gib die Funktion an, die die Abhängigkeit der Fahrzeit von der Geschwindigkeit beschreibt.
Wähle eine realistische Definitionsmenge und stelle die Funktion grafisch dar.

Aufgaben 5.155 – 5.158: Gib jeweils an, welches Verhältnis vorliegt. Löse mithilfe einer Schlussrechnung.

AB **5.155** Ein Wanderer benötigt für eine 6 km lange Wanderung 1,4 Stunden. Wie lang benötigt er voraussichtlich, um 10 km zu wandern?

AB **5.156** Wie viele Umdrehungen macht das größere Zahnrad eines Getriebes mit 95 mm Durchmesser, wenn das kleinere Zahnrad mit 8 mm Durchmesser sich mit 9 500 Umdrehungen pro Minute dreht?

AB **5.157** Das hintere Kettenrad eines Fahrrads hat 13 Zähne, das vordere 38. Wie viele Umdrehungen pro Minute macht das hintere Kettenrad, wenn das vordere mit 60 Umdrehungen pro Minute gedreht wird?

AB **5.158** Bei einer mittleren Geschwindigkeit von 122 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ dauert die Zugfahrt von Salzburg nach Wien 2,6 Stunden. Um wie viel Kilometer pro Stunde muss die mittlere Geschwindigkeit erhöht werden, wenn sich die Fahrzeit auf 2,25 Stunden verkürzen soll?

Aufgaben 5.159 – 5.161: Gib jeweils an, welches Verhältnis vorliegt. Löse mithilfe einer Proportion.

5.159 Sieben Arbeiter würden 16 Tage benötigen, um die Fenster einer Wohnhausanlage auszutauschen. Wie viele Arbeiter müssen zusätzlich eingesetzt werden, wenn die Arbeit bereits nach 11 Tagen abgeschlossen sein soll? **AB**

5.160 Um das in eine Baugrube eingedrungene Wasser abzupumpen, würden vier Pumpen 11 Stunden benötigen. Wie viele Pumpen müssen zusätzlich eingesetzt werden, wenn das Wasser bereits nach 8 Stunden abgepumpt sein muss? **AB**

5.161 Um einen Lärmschutzdamm aufzuschütten, werden 3 LKW eingesetzt, die zur Durchführung der Arbeit voraussichtlich 8 Tage benötigen. In wie vielen Tagen kann die Arbeit durchgeführt werden, wenn nach 2 Tagen 2 zusätzliche LKW eingesetzt werden? **AB**

5.162 Viele Hunde werden mit Trockenfutter gefüttert. Die Futtermenge pro Tag hängt dabei vom Gewicht des Hundes ab und liegt zwischen 90 g pro Tag und 700 g pro Tag. Ein Sack mit 15 kg Trockenfutter kostet 39,90 €. **ABCD**

1) Gib die Funktion an, die der Futtermenge pro Tag die Zeitdauer (in Tagen) zuordnet, für die ein 15-kg-Sack ausreicht und stelle sie im angegebenen Bereich grafisch dar. Gib die Funktion an, die der täglichen Futtermenge die Kosten (in Euro) zuordnet. Um welche Art von Proportionalität bzw. um welchen Funktionstyp handelt es sich jeweils? Begründe deine Antwort.

2) Familie Müller hat für einige Wochen einen Gasthund, der tägliche Verbrauch an Hundefutter hat sich dadurch verdoppelt.
Wie ändern sich die täglichen Kosten, wenn sich der Verbrauch verdoppelt?
Wie ändert sich die Zeitdauer, für die ein Sack ausreicht, wenn sich der tägliche Verbrauch verdoppelt?

5.163 Für den Zusammenhang zwischen Spannung, Stromstärke und Widerstand in einem elektrischen Leiter gilt das Ohm'sche Gesetz $U = R \cdot I$. **ABC**

U ... Spannung in Volt, I ... Stromstärke in Ampere, R ... Widerstand in Ohm

a) Gib für die folgenden Zusammenhänge an, ob direkte oder indirekte Proportionalität vorliegt. Gib die Zusammenhänge als Funktionen an und stelle sie grafisch dar.

1) Spannung U, abhängig von der Stromstärke I, wenn $R = 10\ \Omega$.; $I \in [0\ A; 15\ A]$

2) Widerstand R, abhängig von der Spannung U, wenn $I = 10\ A$; $U \in [0\ V; 100\ V]$

3) Widerstand R, abhängig von der Stromstärke I, wenn $U = 230\ V$; $I \in]0\ A; 20\ A]$

b) Drücke I aus der Formel aus. Welche der Größen U bzw. R muss nun konstant und welche eine Variable sein, damit es sich um eine Reziprokfunktion, also ein indirektes Verhältnis, handelt?

5.164 In den Skizzen sind zueinander proportionale Größen dargestellt. Gib jeweils die Funktionsgleichung an. **AC**

a)

b, c, a, 1

a, c, b, 1

b)

r, 1, z, c

z, c, r, 2

Funktionen

Zusammenfassung

Eine **Funktion** $y = f(x)$ ist eine **Zuordnung**, bei der jedem Element x einer **Definitionsmenge genau ein Element** y zugeordnet wird. Die Menge aller Werte, die y dabei annimmt, nennt man **Wertemenge**.
x ... unabhängige Variable, Stelle, Argument   y ... abhängige Variable, Funktionswert
Eine Funktion kann durch eine Funktionsgleichung (Formel), eine Tabelle oder einen Funktionsgraphen angegeben werden.

Eine **lineare Funktion** wird durch eine Gleichung der Form $\mathbf{y = k \cdot x + d}$ angegeben.
d ... y-Achsenabschnitt
k ... Steigung, Differenzenquotient $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ... Differenzenquotient
Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade.
Nullstelle: x-Wert des Schnittpunkts des Funktionsgraphen mit der x-Achse ($y = 0$)

Anwendungen der linearen Funktion:

Lineare Tarife:	$\mathbf{P(x) = k \cdot x + G}$	P(x) ... Preis für x Einheiten, k ... Preis pro Einheit, G ... Grundpreis
Lineare Kostenfunktion:	$\mathbf{K(x) = k \cdot x + F}$	K(x) ... Kosten für x Stück, k ... proportionale (variable) Kosten, F ... Fixkosten
Erlösfunktion:	$\mathbf{E(x) = p \cdot x}$	E(x) ... Erlös für x Stück, p ... Preis pro Stück
Gewinnfunktion:	$\mathbf{G(x) = E(x) - K(x)}$	

Proportionalität
Verhältnisgleichung oder **Proportion**: $a : b = c : d$ $(a, b, c, d \neq 0)$
Produktgleichung: $a \cdot d = b \cdot c$ **Proportionalitätsfaktor** k: $a = k \cdot c$ und $b = k \cdot d$
Fortlaufende Proportion: $a : b : c = d : e : f$ $(a, b, c, d, e, f \neq 0)$
Arithmetisches Mittel von a, b: $\overline{m} = \frac{a + b}{2}$ **Geometrisches Mittel** von a, b: $\overline{m}_g = \sqrt{a \cdot b}$
Direkt proportionale Größen x und y: $\mathbf{y = k \cdot x}$ (lineare Funktion); „Je mehr, desto mehr."
Indirekt proportionale Größen x und y: $\mathbf{y = \frac{k}{x}}$ (reziproke Funktion); „Je mehr, desto weniger."

Weitere Aufgaben

D **5.165** Welche der Relationen sind Funktionen? Begründe deine Anworten.

a) 1)

x	y
2	4
3	6
4	8
5	10

2)

x	y
2	4
4	4
8	10
10	12

3)

x	y
2	4
2	6
3	5
4	10

b) 1) **2)** **3)**

5.166 Am Morgen enthält die Regentonne in Herrn Haikers Garten 20 Liter Wasser. Um 10:00 Uhr beginnt ein gleichmäßiger Regen, durch den der Inhalt der Tonne alle 5 Minuten um einen Liter zunimmt. Zwischen 12:30 Uhr und 14:00 Uhr regnet es gar nicht, aber dann beginnt es stärker zu regnen, sodass in jeder Minute ein halber Liter Wasser mehr in der Tonne ist.

ABC

1) Berechne die Wassermengen zu den gegebenen Uhrzeiten.

Uhrzeit	10:00	10:30	11:00	12:00	12:30	14:00	14:20	14:50	15:00	16:00
Wassermenge in Liter										

2) Stelle die Wassermenge in der Tonne in einem Diagramm dar. Trage die Uhrzeit auf der waagrechten Achse auf, beginne mit 10:00 Uhr, 1 cm ≙ 1 Stunde. Trage auf der senkrechten Achse die Wassermenge in Liter auf, 1 cm ≙ 20 Liter.

3) Um 14:54 Uhr ist die Tonne genau halb voll. Wie viel Wasser passt in die volle Tonne?

4) Um wie viel Uhr ist die Tonne voll, wenn es gleichmäßig weiterregnet?

5.167 Ergänze die fehlende Mengenangabe.

B

	Funktionsgleichung	Definitionsmenge	Wertemenge
a)	$y = 2x^2$	[0; 2]	
b)	$y = -x + 5$	{–4, –2, 0, 2, 4}	

	Funktionsgleichung	Definitionsmenge	Wertemenge
c)	$y = \frac{3}{4}x$		[0; 8]
d)	$y = 3x + 1$		{–1, 0, 1, 2, 3, 4, 5}

5.168 Ordne den Graphen die zugehörige Funktionsgleichung zu. Welche der angegebenen Funktionen sind nicht gezeichnet?

AC

$f_1(x) = 2x - 3$ $f_4(x) = \frac{2}{3}x + 1$

$f_2(x) = -\frac{1}{2}x - 3$ $f_5(x) = \frac{3}{2}x + 1$

$f_3(x) = \frac{1}{2}x - 3$ $f_6(x) = -2x - 3$

5.169 Ermittle die Steigung k der gezeichneten Funktion. Achte auf die Skalierung.

BC

a)

b)

c)

BC **5.170** Ermittle k und d aus der Grafik und gib die Gleichung der dargestellten Funktion an.

a) **b)** **c)**

AC **5.171** Gib die Gleichung der dargestellten Geraden an.

a) **b)** **c)** **d)**

B **5.172** Zeichne die Gerade mithilfe des y-Achsenabschnitts und des Steigungsdreiecks.

a) $y = -3x + 5$ **b)** $y = \frac{3}{4}x + 2$ **c)** $y = -\frac{1}{2}x - 1$ **d)** $y = -x + 1$

BC **5.173** Ermittle rechnerisch, ob der Punkt P auf, unterhalb oder oberhalb der Geraden g liegt. Prüfe durch eine Zeichnung nach.

a) $P(-2|3)$, $g: y = x - 5$

b) $P(1|3)$, $g: y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

c) $P\left(1\middle|-\frac{3}{4}\right)$, $g: y = -\frac{3}{4}x + 1$

d) $P(3|-5)$, $g: y = -2x + 1$

BCD **5.174** Der Punkt P liegt auf der Geraden g.

1) Ermittle die fehlende Koordinate.

2) Liegt P oberhalb der Geraden, wenn diese Koordinate vergrößert wird? Begründe deine Antwort.

a) $P(2|y_P)$, $g: y = 4x - 5$

b) $P(x_P|3)$, $g: y = -x + 2$

c) $P(0{,}5|y_P)$, $g: y = x + 3$

d) $P(x_P|-2{,}5)$, $g: y = \frac{1}{4}x - 1$

B **5.175** **1)** Die Gerade h_p verläuft parallel zur Geraden g durch den Punkt A. Gib ihre Gleichung an.

2) Die Gerade h_n verläuft normal zur Geraden g durch den Punkt A. Gib ihre Gleichung an.

a) $g: y = \frac{2}{5}x + 4$, $A(5|1)$ **b)** $g: y = -2x + 1$, $A(3|-6)$

BC **5.176** Ermittle die Gleichung und die Nullstelle der Geraden, die durch die Punkte A und B verläuft. Überprüfe dein Ergebnis anhand einer Zeichnung.

a) $A(-3|2)$, $B(5|-2)$ **b)** $A(6|4)$, $B(-1|2)$

B **5.177** Von einer Geraden sind die Punkte A und B gegeben. Ermittle die fehlende Koordinate des auf der Geraden liegenden Punkts P, ohne die Gleichung der Geraden aufzustellen.

a) $A(12|34)$, $B(20|48)$, $P(16|y_P)$ **b)** $A(75|40)$, $B(30|36)$, $P(x_P|15)$

5.178 Welche der angegebenen Gleichungen stellen lineare Funktionen dar? Begründe. CD

1) $f_1(x) = \frac{3x + 4}{2}$ ***2)*** $f_2(x) = x^2 - 2$ ***3)*** $y = 7$ ***4)*** $x = 3$

5.179 Ermittle das Produkt bzw. die Summe der beiden gegebenen Funktionen. Beschreibe das Ergebnis mit eigenen Worten. Stelle die Funktionen grafisch dar. ABC TE

a) $f_1(x) = \text{sgn}(x)$, $f_2(x) = x$
c) $f_1(x) = -1$, $f_2(x) = |x|$
e) $f_1(x) = -0{,}5x$, $f_2(x) = -3$
b) $f_1(x) = 0{,}8x + 2{,}5$, $f_2(x) = -3{,}2$
d) $f_1(x) = |x|$, $f_2(x) = \frac{3}{4}$
f) $f_1(x) = -4{,}5$, $f_2(x) = -2{,}5$

5.180 Bei einem Bootsverleih bezahlt man für ein Elektroboot für die ersten beiden Stunden 4,00 €, für jede weitere angefangene Stunde 2,00 €. Die maximale Verleihdauer beträgt 5 Stunden. AB

1) Gib die Funktion P(t) an, die jeder Verleihdauer t einen Preis P zuordnet.
2) Stelle die Funktion grafisch dar.

5.181 In einer Firma werden T-Shirts bedruckt. Die fixen Kosten pro Monat betragen 35 000,00 €. Die proportionalen Kosten für ein fertig bedrucktes T-Shirt belaufen sich auf 12,00 €, der Verkaufspreis (ohne MWSt) beträgt 21,00 €. ABC

1) In einem Monat werden x T-Shirts erzeugt. Gib die Funktionsgleichungen für die Gesamtkosten und für die Einnahmen an.
2) Erstelle eine Grafik, in der du die Gesamtkosten und die Einnahmen, abhängig von der Stückzahl, einzeichnest. Lies ab, bei welcher Stückzahl die Werkstatt beginnt, kostendeckend zu arbeiten.
3) Überprüfe den in ***2)*** abgelesenen Wert rechnerisch.

5.182 Ein Bootsverleih auf einer Südseeinsel bietet zwei verschiedene Tarife an. Bei Tarif 1 kosten10 Minuten inklusive Versicherung 70 Inseldollar (I$), bei Tarif 2 kosten 10 Minuten 60 I$, die Versicherung kostet einen einmaligen Betrag von 100 I$. ABC

1) Gib die beiden Kostenfunktionen an, erstelle eine Wertetabelle (mindestens 4 Werte pro Funktion) und zeichne die beiden Funktionen in einem geeigneten Maßstab.
2) Ermittle durch Ablesen aus der Zeichnung, für welche Fahrzeit die beiden Tarife gleich günstig sind bzw. welcher Tarif bei welcher Fahrzeit billiger kommt.

5.183 Die Profiltiefe von Autoreifen nimmt mit der gefahrenen Strecke kontinuierlich (das heißt gleichmäßig) ab. ABC
Frau Schmid stellt 20 000 km nach dem Kauf neuer Reifen eine Profiltiefe von 5 mm fest, nach 35 000 km beträgt die Profiltiefe noch 3,5 mm.

1) Ermittle eine Funktion, die die Abnahme der Profiltiefe beschreibt.
2) Stelle die Abnahme der Profiltiefe grafisch dar.
3) Lies ab, bei welchem Kilometerstand Frau Schmid neue Reifen kaufen sollte, wenn das bei einer Profiltiefe von 3 mm empfohlen wird.
4) Berechne, wie viel Kilometer Frau Schmid mit dieser Reifengarnitur maximal zurücklegen kann.
Hinweis: Die gesetzlich vorgeschriebene Mindestprofiltiefe für Sommerreifen beträgt 1,6 mm.

ABC **5.184** Verwende die gegebene Zeichnung.

1) Gib die Gleichung der blau gezeichneten Geraden g_1 an.

2) Ermittle die Gleichung jener Geraden g_2, die parallel zu g_1 und durch den Punkt A(2|5) verläuft.

3) Ermittle die Gleichung der Geraden g_3, die normal auf g_1 steht und durch den Punkt B(−3|6) verläuft.

4) Ermittle die Nullstellen der Geraden g_1, g_2 und g_3.

AC **5.185** Dem Vergessen ein Schnippchen schlagen! Am Beginn des 20. Jahrhunderts hat der Psychologe Hermann Ebbinghaus (1850 – 1909) das Vergessen erforscht. Ohne Wiederholung vergessen wir einen Lernstoff schnell wieder. Nach 20 Minuten wissen wir nur mehr rund 60 % des vorher Erlernten (rote Kurve). Da hilft nur rechtzeitiges Wiederholen!

1) Wie viel Prozent des Erlernten wissen wir (ohne Wiederholen) nach einer Stunde noch?

2) Nach welcher Zeit haben wir rund 30 % des Gelernten vergessen?

3) Wie groß ist der „Vergessensunterschied" zwischen einem Schüler, der rechtzeitig wiederholt und einem, der darauf verzichtet, nach einer Stunde bzw. nach zwei Stunden?

ABC **5.186** Die Firma Hotvolley erzeugt Volleybälle. Die fixen Kosten betragen je Monat 25 000,00 €, die proportionalen Kosten k je Ball betragen 7,25 €. Die monatliche Kapazität beträgt 120 000 erzeugte Bälle (das heißt, dass bei voller Ausnutzung aller Betriebsmittel höchstens 120 000 Bälle in einem Monat produziert werden können).

1) Gib die Kostenfunktion K(x) für die Produktion von x Bällen in einem Monat an.

2) Als Stückkosten D(x) bezeichnet man die durchschnittlichen Kosten je Stück bei der Produktion von x Stück. Für D(x) gilt: $D(x) = \frac{K(x)}{x}$. Wie groß sind die Stückkosten pro Ball bei 80 %iger bzw. bei voller Ausnutzung der Kapazität?

3) Bei welcher Produktionsmenge x betragen die Stückkosten je Ball 11,25 €? Zu wie viel Prozent wird dabei die Kapazität ausgenützt?

4) Die Bälle werden zu einem Preis von 12,00 € verkauft. Gib die Erlösfunktion E(x) an. Wie viele Bälle müssen verkauft werden, damit die Firma kostendeckend arbeitet, also kein Verlust auftritt? Wie hoch müsste der Verkaufspreis sein, damit die Firma bei einem Verkauf von 4 500 Stück kostendeckend arbeitet?

5) Gib die Gewinnfunktion G(x) bei einem Verkaufspreis von 12,00 € an. Welcher Gesamtgewinn wird bei Verkauf der gesamten Kapazität von 120 000 Bällen erzielt?

6) Stelle alle in ***1)*** bis ***5)*** benötigten Funktionen in einem Diagramm in geeignetem Maßstab dar. Kennzeichne alle ermittelten Werte in diesem Diagramm.

Proportionalität

5.187 Löse die gegebene Proportion nach x. B

a) $\frac{3}{7} : x = \frac{9}{4} : \frac{1}{3}$ **b)** $\frac{5}{7} : \frac{3}{2} = x : \frac{4}{7}$ **c)** $\frac{10}{4} : \frac{5}{6} = 6 : x$

5.188 ABC
1) Die Radien der Scheiben des dargestellten Riemengetriebes betragen $r_1 = 28$ mm und $r_2 = 66$ mm. Mit wie vielen Umdrehungen pro Minute dreht sich die kleine Scheibe, wenn die Drehzahl der großen Scheibe $n_2 = 140\ \text{min}^{-1}$ beträgt?
2) Welchen Weg legt der Riemen in einer Minute zurück?
3) Wie verhalten sich die Drehzahlen, wenn der Radius der großen Scheibe doppelt so groß ist, wie jener der kleinen Scheibe?
4) Gib einen Zusammenhang zwischen r_1 und r_2 und den Drehzahlen n_1 und n_2 an.

5.189 Berechne das arithmetische und das geometrische Mittel der beiden Strecken. Beschreibe mit eigenen Worten die unterschiedlichen Eigenschaften der beiden Werte. BC

a) a = 4 m, b = 3,6 km **b)** a = 2 cm, b = 1 568 m **c)** a = 100 km, b = 10 m

Aufgaben 5.190 – 5.191: Bilde fortlaufende Proportionen.

5.190 **a)** x : y = 9 : 11; y : z = 12 : 5 **b)** $m : n = 2 : \frac{4}{5}$; $m : o = \frac{3}{4} : 3$ B

5.191 **a)** r : s = 0,75 : 0,25; s : t = 0,35 : 0,65 **b)** e : f = 2,4 : 3,8; e : g = 1,2 : 4,3 B

5.192 In früheren Zeiten gab es in verschiedenen Regionen unterschiedliche Längeneinheiten, die alle mit „Fuß" bezeichnet wurden. Es verhält sich der Berliner Fuß zum Wiener Fuß wie 4 703 : 4 800, der Wiener Fuß zum Londoner Fuß wie 14 400 : 13 883, der Londoner Fuß zum Rheinländer Fuß wie 13 883 : 14 298 und der Rheinländer Fuß zum Dresdner Fuß wie 4 766 : 4 299. Rechne die gegebene Länge in Berliner Fuß um. AB

a) 32 Londoner Fuß **b)** 18 Dresdner Fuß **c)** 125 Rheinländer Fuß

5.193 Ein Verlust von 48 500,00 € ist auf die drei Eigentümer einer Firma im Verhältnis 48 : 7 : 25 aufzuteilen. Berechne die einzelnen Anteile. AB

5.194 Elektrische Widerstände werden im Handel nicht in beliebiger Größe angeboten. Die Werte der erhältlichen Widerstände sind in so genannten E-Reihen angegeben. ABD
Die Reihe E12 ist teilweise gegeben: ... 33 Ω, 39 Ω, 47 Ω, 56 Ω, ____ Ω, 82 Ω ... .
Dabei sind die Verhältnisse der Größen zweier aufeinander folgender Widerstände jeweils annähernd konstant.
1) Überprüfe die Verhältnisse für die angegebene Reihe.
2) Begründe, welcher Mittelwert verwendet werden muss, um den fehlenden Widerstandswert zu berechnen. Berechne den Wert.

5.195 Acht Straßenarbeiter bessern in sechs Tagen zu je zehn Arbeitsstunden 150 m Straße aus. Wie viele Tage brauchen 15 Arbeiter für 300 m, wenn sie täglich 8 Stunden arbeiten? AB

5.196 Ein Vorrat an Holzpellets reicht bei einem täglichen Verbrauch von 30 kg 140 Tage. ABC
1) Wie viele Tage reicht der Vorrat, wenn der tägliche Verbrauch um 5 % gesenkt wurde?
2) Gib eine Funktion an, die die Anzahl der Tage in Abhängigkeit vom Verbrauch beschreibt. Um welchen funktionalen Zusammenhang handelt es sich?
3) Stelle die Funktion für einen täglichen Verbrauch zwischen 1 kg und 40 kg grafisch dar und ermittle daraus, wie groß der tägliche Verbrauch ist, wenn man 120 Tage auskommt.

AB **5.197** In einer Fischzucht wird dem Futter eine Vitaminmischung zugesetzt. Dabei reicht der Vorrat der Mischung für 6 000 Fische 90 Tage, wenn jeder Fisch täglich 2 g davon erhält. Es werden 1 000 Tiere verkauft und der Vorrat der Vitaminmischung muss für die übrigen Fische 130 Tage lang ausreichen. Wie viel Gramm können pro Tag an jeden Fisch verfüttert werden? Gib eine Formel an, die die Futtermenge in Abhängigkeit der Fischanzahl a und der Tage d angibt.

ABC **5.198** Mit dem Tankinhalt eines PKW kann bei einem mittleren Verbrauch von 7,1 ℓ Diesel auf 100 km eine Strecke von 850 km zurückgelegt werden.

1) Für wie viel Kilometer reicht der Tankinhalt, wenn der mittlere Verbrauch durch sparsamere Fahrweise auf 5,9 ℓ pro 100 km gesenkt wird?

2) Welche Treibstoffmenge wird dadurch pro Jahr eingespart? Nimm dazu an, dass in einem Jahr 35 000 km zurückgelegt werden.

3) Gib die Funktionsgleichung für die gefahrene Strecke in Abhängigkeit von der Treibstoffmenge an. Stelle die Funktionen für den alten und neuen Verbrauch grafisch dar und beschreibe den Unterschied. Überprüfe das Ergebnis aus ***2)***.

4) Wie hoch ist die jährliche Ersparnis in Euro? Arbeite mit dem aktuellen Preis.

ABC **5.199** Die Kraft, die dich in einem durch eine Kurve fahrenden Auto nach außen „drängt", ist die Fliehkraft bzw. Zentrifugalkraft. Sie hängt vom Kurvenradius r, der bewegten Masse m und der Geschwindigkeit v ab:

$F = \frac{mv^2}{r}$ (F in Newton, m in kg, v in $\frac{m}{s}$, r in m)

1) Ein Auto mit einer Masse m (samt Insassen) fährt mit 60 $\frac{km}{h}$ durch eine Kurve mit einem Radius von 20 m. Erstelle eine Tabelle, die angibt, wie die Fliehkraft von der Masse m abhängt. Stelle den Zusammenhang grafisch dar und erkläre, um welche Art von funktionalem Zusammenhang es sich handelt.

2) Welche Fliehkräfte entstehen, wenn ein Auto mit einer Masse von 1 800 kg (samt Insassen) und einer Geschwindigkeit von 54 $\frac{km}{h}$ durch verschiedene Kurven fährt? Erstelle eine Tabelle, die angibt, wie die Fliehkraft vom Radius r abhängt. Stelle den Zusammenhang grafisch dar und erkläre, um welche Art von funktionalem Zusammenhang es sich handelt.

ABC **5.200** Legt man an einen Leiter mit dem Widerstand R eine Spannung U an und bildet einen geschlossenen Stromkreis, so fließt durch den Leiter ein bestimmter Strom I. Für den Zusammenhang zwischen diesen Größen gilt das Ohm'sche Gesetz $U = R \cdot I$.

1) Gib an, ob es sich um direkte oder indirekte Proportionalität handelt.

2) Stelle den Zusammenhang im gegebenen Bereich grafisch dar.

a) Spannung U, abhängig vom Strom I; Widerstand R = 5 Ω. $0\,A \leq I \leq 40\,A$

b) Strom I, abhängig von der Spannung U; Widerstand R = 2 Ω. $0\,V \leq U \leq 230\,V$

c) Spannung U, abhängig vom Widerstand R; Strom I = 10 A. $0\,\Omega \leq R \leq 10\,\Omega$

d) Widerstand R, abhängig von der Spannung U; Strom I = 10 A. $0\,V \leq U \leq 200\,V$

e) Strom I, abhängig vom Widerstand R; Spannung U = 100 V. $5\,\Omega \leq R \leq 25\,\Omega$

f) Widerstand R, abhängig vom Strom I; Spannung U = 100 V. $20\,A \leq I \leq 100\,A$

Wissens-Check

		gelöst
1	Ich kann erklären, was eine Funktion ist und kenne mindestens zwei Möglichkeiten eine Funktion darzustellen.	
2	Welche der folgenden Definitionsmengen ergibt für die Funktion $y = \frac{x}{2} - 3$ die Wertemenge $W_f = \{-3, -2, -1\}$? A) $D_f = \{0, 1, 2\}$ B) $D_f = \{-3, -2, -1\}$ C) $D_f = \{0, 2, 4\}$ D) $D_f = \{1, 3, 5\}$	
3	Der Graph einer linearen Funktion ist … .	
4	Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? Begründe jeweils. Die Graphen zweier linearer Funktionen sind jedenfalls parallel, A) wenn d gleich ist. B) wenn k gleich ist. C) wenn d und k gleich sind.	
5	Welche der folgenden Aussagen sind für die Geraden $y_1 = \frac{x}{4} - 1$ und $y_2 = \frac{x}{2} - 1$ richtig? Begründe. A) y_1 hat den größeren Steigungswinkel. B) y_1 und y_2 schneiden die y-Achse an derselben Stelle. C) y_1 und y_2 schneiden die x-Achse an derselben Stelle. D) Eine der beiden Geraden ist parallel zur x-Achse.	
6	Gib die Schritte an, mit denen der Schnittpunkt der linearen Funktion $y = 5x - \frac{5}{2}$ mit der x-Achse berechnet werden kann. Wie heißt die Stelle?	
7	Nenne mindestens zwei spezielle stückweise lineare Funktionen und skizziere ihre Graphen.	
8	Gib an, wie mit dem Differenzenquotienten die y-Koordinate des Punkts $P(3 \mid y_p)$ berechnet werden kann, wenn er auf der Geraden durch die Punkte $A(1 \mid 3)$ und $B(5 \mid -1)$ liegt.	
9	Nenne je ein Beispiel für die Verwendung der Formel $\bar{m} = \frac{a+b}{2}$ bzw. $m_g = \sqrt{a \cdot b}$.	
10	Beschreibe die Begriffe direkt proportional bzw. indirekt proportional durch Angabe einer Formel und indem du sie mit eigenen Worten erklärst.	

Lösung:
1) siehe Seite 175 2) C 3) eine Gerade. 4) A) falsch, da die Steigungen verschieden sein können, B) richtig, da sie gleiche Steigungen haben, C) richtig, da sie gleiche Steigungen haben 5) A) falsch, $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$, B) richtig, d = −1 für beide Funktionen, C) falsch, beide Funktionen schneiden die y-Achse an derselben Stelle und haben verschiedene Steigungen, D) falsch, beide Steigungen sind verschieden null
6) y null setzen und x berechnen ergibt $N(x_N \mid 0)$, Nullstelle 7) siehe Seite 199 8) siehe Aufgabe 5.17
9) ZB: Berechnung der mittleren Größe zweier Schülerinnen bzw. zB Berechnung der Abmessungen eines Papierformats 10) siehe Seiten 209 und 210

6 Lineare Gleichungssysteme

Eine unbekannte Zahl oder Größe kann oft mithilfe einer Gleichung ermittelt werden. In der Praxis treten jedoch häufig Probleme auf, die von mehreren Einflussgrößen abhängen. Zum Beispiel erfordert die Bestimmung der Position mittels GPS (Global Positioning System) die Berechnung von vier Unbekannten (x-, y-, z-Koordinate, Empfangszeitpunkt). Um diese zu ermitteln, benötigt man vier Gleichungen, die ein Gleichungssystem bilden. In der Industrie führen Simulationen von Vorgängen wie zum Beispiel Crash-Tests oder die Steuerung von Robotern auf Systeme mit vielen Gleichungen. Diese werden mithilfe leistungsstarker Computer gelöst. Wir beschränken uns im Folgenden auf Systeme linearer Gleichungen bzw. auf solche, die sich auf lineare Gleichungssysteme zurückführen lassen.

6.1 Eine lineare Gleichung mit zwei Variablen

ABC **6.1** Ein Schüler möchte in der Pause beim Getränkeautomaten ein Erfrischungsgetränk kaufen. Der Automat nimmt nur Münzen an und gibt kein Wechselgeld. Eine Flasche kostet 1,10 €, der Schüler hat 10-Cent- und 50-Cent-Münzen zur Verfügung. Welche Münzen kann der Schüler einwerfen? Überlege dir mehrere Möglichkeiten.

ABCD **6.2** Welche beiden Zahlen ergeben die Summe 12?

1) Überlege zunächst, welche Paare natürlicher Zahlen in Frage kommen. Trage sie in eine Tabelle ein und zeichne sie in ein Koordinatensystem (x ... 1. Zahl, y ... 2. Zahl).

2) Wie ändert sich der Graph, wenn alle reellen Zahlen erlaubt sind? Kann dann noch eine vollständige Tabelle angegeben werden?

3) Wie lautet die Gleichung, die die beiden Zahlen erfüllen müssen?

Eine Gleichung der Form $a \cdot x + b \cdot y = c$ ist eine **lineare Gleichung mit zwei Variablen**. Erfüllen zwei Zahlen x und y die Gleichung, so nennt man das Zahlenpaar $(x|y)$ eine Lösung der Gleichung. Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung mit zwei Variablen enthält alle Zahlenpaare $(x|y)$, die die Gleichung erfüllen. Es müssen also auch die Elemente der Grund- bzw. Definitionsmenge einer solchen Gleichung Zahlenpaare sein.

Sind A und B beliebige Mengen, dann bezeichnet man die Menge M der Paare $(a|b)$ mit $a \in A$ und $b \in B$ als **Produktmenge** von A und B und schreibt $M = A \times B$ [sprich: „A kreuz B"].

Dürfen die Variablen x und y zum Beispiel jeweils alle Zahlen aus $\mathbb{N}$ annehmen, so gilt $G = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$; für $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$ ergibt sich $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Die Anzahl der Lösungen einer linearen Gleichung mit zwei Variablen hängt von der gewählten Grundmenge ab.

ZB: $x + y = 3$:

$G = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \Rightarrow$ Endlich viele Lösungen: $(0|3), (1|2), (2|1), (3|0)$

$G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \Rightarrow$ Unendlich viele Lösungen: $(0|3), (-0{,}1|3{,}1), (0{,}01|2{,}99), (0{,}001|2{,}999)$ ...

Werden Zahlenpaare der Lösungsmenge als Koordinaten von Punkten aufgefasst und in ein Koordinatensystem eingetragen, so liegen diese Punkte auf einer Geraden. Diese Gerade ist durch die Gleichung $a \cdot x + b \cdot y = c$ festgelegt (vergleiche Abschnitt 5.2 Lineare Funktionen).

Eine Gleichung der Form $a \cdot x + b \cdot y = c$ ($a, b \in \mathbb{R}$ und $a, b \neq 0$) heißt **lineare Gleichung mit zwei Variablen**. Alle Zahlenpaare $(x|y)$, die die Gleichung erfüllen, bilden die Lösungsmenge. Grafisch veranschaulicht liegen diese Zahlenpaare auf einer Geraden.

6.3 In einem Fitnessstudio stehen für eine Langhantel „Gewichte" zu 2 kg und zu 5 kg zur Verfügung. Jemand möchte mit 23 kg auf jeder Seite trainieren. Wie kann er die „Gewichte" für eine Seite kombinieren? Stelle eine Gleichung auf und trage in eine Tabelle die Anzahl der benötigten 5-kg-Scheiben ein, wenn 1, 2 ... 11 Scheiben mit 2 kg verwendet werden.

ABC

Lösung:
x ... Anzahl der 2-kg-Scheiben
y ... Anzahl der 5-kg-Scheiben
$2x + 5y = 23$
$y = \frac{23 - 2x}{5}$

● Die Gleichung, die die beiden Variablen erfüllen müssen, wird aufgestellt und nach y umgeformt.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	4,2	3,8	3,4	3	2,6	2,2	1,8	1,4	1	0,6	0,2

$x = 4$ und $y = 3$ oder $x = 9$ und $y = 1$

● Diese Lösungen erhalten wir, da nur ganze Scheiben möglich sind.

Um 23 kg zu erreichen, können vier Scheiben zu 2 kg und drei Scheiben zu 5 kg oder neun Scheiben zu 2 kg und eine Scheibe zu 5 kg aufgesteckt werden.

6.4 Stelle die Lösungen der Gleichung $3x + 4y = 16$ für $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ grafisch dar.

B

Lösung:
$y = -\frac{3}{4}x + 4$

● Die Gleichung wird auf Normalform umgeformt und anschließend gezeichnet.

Alle Punkte, die auf der Geraden liegen, sind Lösungen der Gleichung: $L = \{(x|y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 3x + 4y = 16\}$

6.5 Gib fünf Zahlenpaare an, die Lösungen der Gleichung sind.

B

a) $x - y = 5$ ***b)*** $2x + 3y = 15$ ***c)*** $4x - 2y = -2$ ***d)*** $x + 2y = 8$

6.6 Stelle die Lösungen der Gleichung grafisch dar.

B

a) $2x - y = 6$; $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ***b)*** $3x + 4y = 8$; $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ***c)*** $-5x + 3y = 6$; $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

6.7 Stelle die Lösungen der Gleichung grafisch dar.

BC

a) $x + y = 4$; $G = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ***b)*** $-x + 2y = 8$; $G = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ***c)*** $2x - y = 6$; $G = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

6.8 Jemand will beim Geldautomaten 150,00 € abheben. Er möchte eine Stückelung von 10-€- und 50-€-Scheinen, wobei mindestens ein 10-€-Schein und ein 50-€-Schein dabei sein sollen. Welche Möglichkeiten der Stückelung gibt es?

ABC

6.9 In einem Baumarkt gibt es Zaunelemente mit Breiten von 50 cm und 62,5 cm. Wie viele schmale und breite Elemente müssen kombiniert werden, um einen Zaun zu errichten, der 6,50 m lang ist? Gib alle Möglichkeiten an.

ABC

6.10 Von einer linearen Gleichung mit zwei Variablen sind drei Lösungen gegeben. Stelle die Gleichung auf. Beschreibe deine Vorgehensweise.

BC

a) $(1|1), (2|2), (3|3)$ ***b)*** $(0|3), (2|2), (4|1)$ ***c)*** $(1|-2), (2|-3), (3|-4)$

6.2 Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen

6.2.1 Einleitung

ABC **6.11** In einem Schlafwagen stehen insgesamt zehn Einzel- und Doppelabteile zur Verfügung. In einem Waggon können so 16 Personen untergebracht werden. Finde heraus, wie viele Einzel- bzw. Doppelabteile sich in einem Waggon befinden.

ABC **6.12** Die Summe zweier Zahlen ist 12. Subtrahiert man vom Doppelten der ersten Zahl die zweite Zahl, so ergibt sich 3. Wie lauten die Zahlen?

1) Erstelle für jede der beiden Bedingungen eine Tabelle. Wähle für die erste Zahl jeweils 1, 2 ... 7 und überlege im Kopf die passende zweite Zahl. Vergleiche die Wertepaare.

2) Schreibe jede der beiden Bedingungen als Gleichung an und stelle deren Lösungen im selben Koordinatensystem grafisch dar. Lies das passende Zahlenpaar ab.

Werden für zwei Variablen zwei Bedingungen formuliert, so erhält man – in mathematischer Schreibweise – zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Sie bilden gemeinsam ein **Gleichungssystem**. Die Gleichungen werden oft mit I und II gekennzeichnet. Gibt es für ein lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen ein Zahlenpaar, das beide Gleichungen erfüllt, so nennt man es Lösung des Gleichungssystems.

Beim **Lösen von linearen Gleichungssystemen** können **drei Fälle** auftreten, die von den Koeffizienten abhängen. Die möglichen Lösungsfälle werden anhand von Beispielen gezeigt:

- I: $x + y = 12$ ⇒ I*: $y = -x + 12$
  II: $2x - y = 3$ ⇒ II*: $y = 2x - 3$

  Werden die Lösungen jeder Gleichung in ein Koordinatensystem eingezeichnet, so erhält man den **Schnittpunkt** S(5|7). Geometrisch interpretiert gibt dieser Schnittpunkt die Lösung an.
  Das Gleichungssystem hat **eine eindeutige Lösung**, L = {(5|7)}.

- I: $x + y = 2$ ⇒ I*: $y = -x + 2$
  II: $2x + 2y = 6$ ⇒ II*: $y = -x + 3$

  Die Steigungen der Geraden haben zwar den gleichen Wert (−1), die y-Achsenabstände sind aber unterschiedlich. Die Geraden sind daher **parallel**. Die Gleichungen widersprechen einander. Es gibt keinen Schnittpunkt, das Gleichungssystem hat **keine Lösung**, L = { }.

- I: $x + y = 2$ ⇒ I*: $y = -x + 2$
  II: $2x + 2y = 4$ ⇒ II*: $y = -x + 2$

  Gleichung II ist ein Vielfaches von Gleichung I. Die Geraden fallen zusammen und haben daher unendlich viele Punkte gemeinsam. Sie sind **ident**. Jeder Punkt der Geraden ist also eine Lösung, das Gleichungssystem hat **unendlich viele Lösungen**,
  $L = \{(x|y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x + y = 2\}$.

Allgemeine Form eines linearen Gleichungssystems mit zwei Variablen:

I: $a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y = b_1$
II: $a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y = b_2$

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ ... Koeffizienten;
b_1, b_2 ... Konstanten ($a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$)

Lösung eines linearen Gleichungssystems sind jene Zahlenpaare, die beide Gleichungen erfüllen. Es kann **keine** Lösung, **genau eine** Lösung oder **unendlich viele** Lösungen geben.

Die Indizes der Koeffizienten von a sind zum Beispiel bei a_{12} wie „a-Eins-Zwei" zu lesen. a_{12} bedeutet, dass sich dieser Koeffizient in der ersten Zeile an zweiter Stelle befindet.

6.13 ***1)*** Forme jeweils die Gleichungen des Gleichungssystems in eine Geradengleichung um. BC
2) Zeichne beide Geraden in ein Koordinatensystem ein.
3) Untersuche die gegenseitige Lage zueinander und gib die Anzahl der Lösungen an.

a) I: $4x + y = 7$
II: $3x - 2y = 8$

b) I: $3x - y = 2$
II: $-6x + 2y = 5$

c) I: $-2x + y = -2$
II: $3x - 2y = 1$

d) I: $4x - 8y = 16$
II: $-x + 2y = -4$

6.2.2 Lösungsverfahren

Wenn nicht anders angegeben, gilt im Folgenden stets $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Grafisches Lösungsverfahren

Da die Lösungen jeder Gleichung auf einer Geraden liegen, formt man jeweils auf die Normalform der Geradengleichung um und zeichnet sie in ein Koordinatensystem ein. Haben die Geraden einen Schnittpunkt, so sind die Koordinaten des Schnittpunkts die Lösung des Gleichungssystems.

6.14 Löse das gegebene Gleichungssystem grafisch. Führe die Probe durch. B

I: $-3x + 2y = -5$
II: $2x + y = 8$

Lösung:

$g_I: y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$ $\qquad$ $g_{II}: y = -2x + 8$

- Umformen der Gleichungen I und II auf die Geradengleichungen g_I und g_{II}
- Einzeichnen der Geraden in ein Koordinatensystem und markieren des Schnittpunkts

Die beiden Geraden schneiden einander im Punkt S(3|2).
Für die Lösung schreibt man: L= {(3|2)} oder x = 3, y = 2

Probe: I: LS: $-3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = -5$ $\qquad$ LS = RS
II: LS: $2 \cdot 3 + 2 = 8$ $\qquad$ LS = RS

Das grafische Lösungsverfahren ist wegen der Zeichenungenauigkeit nur bedingt einsetzbar. Daher benötigt man numerische Lösungsverfahren. Deren Ziel ist es, durch geeignetes Kombinieren der beiden Gleichungen eine Gleichung mit einer Variablen zu erhalten.

Lineare Gleichungssysteme

Gleichsetzungsverfahren (Komparationsmethode)

Beide Gleichungen werden nach derselben Variablen umgeformt und anschließend gleichgesetzt.

B **6.15** Löse das Gleichungssystem mithilfe des Gleichsetzungsverfahrens. Führe die Probe durch.

I: $5x - y = 17$
II: $4x + y = 19$

Lösung:

I*: $y = 5x - 17$
II*: $y = -4x + 19$

- Wir formen beide Gleichungen nach derselben Variablen um. Hier wählen wir zum Beispiel die Variable y.

$5x - 17 = -4x + 19$
$9x = 36$
$x = 4$

- Die beiden Rechtsterme werden gleichgesetzt. Man erhält eine lineare Gleichung mit einer Unbekannten, die wie gewohnt gelöst wird.

In II*: $y = -4 \cdot 4 + 19 = 3$
Lösung: $x = 4$, $y = 3$

- Das Ergebnis für x wird in eine Gleichung eingesetzt, die noch beide Variablen enthält.

Probe: I: LS: $5 \cdot 4 - 3 = 17$ LS = RS
II: LS: $4 \cdot 4 + 3 = 19$ LS = RS

Diese Methode eignet sich vor allem für Gleichungen in Normalform und zur Berechnung des Schnittpunkts zweier Geraden.

Einsetzungsverfahren (Substitutionsmethode)

Eine Gleichung wird nach einer Unbekannten umgeformt. Der erhaltene Term wird in die andere Gleichung anstelle dieser Unbekannten eingesetzt. Dieses Verfahren eignet sich gut, wenn eine Variable einer Gleichung den Koeffizienten 1 hat.

B **6.16** Löse das Gleichungssystem mithilfe des Einsetzungsverfahrens. Führe die Probe durch.

I: $x + 7y = 6$
II: $2x - 4y = 30$

Lösung:

I*: $x = 6 - 7y$

- Wir formen Gleichung I nach der Variablen x auf die Gleichung I* um.

In II: $2 \cdot (6 - 7y) - 4y = 30$
$12 - 14y - 4y = 30$
$-18y = 18$
$y = -1$

- In Gleichung II wird x durch den Rechtsterm von I* ersetzt (substituiert). Wir erhalten eine lineare Gleichung mit der Variablen y, deren Lösung wir berechnen.

In I*: $x = 6 - 7 \cdot (-1) = 13$
Lösung: $x = 13$, $y = -1$

- Um x zu erhalten, wird die Lösung für y in I* eingesetzt.

Probe: I: LS: $13 + 7 \cdot (-1) = 6$ LS = RS
II: LS: $2 \cdot 13 - 4 \cdot (-1) = 30$ LS = RS

Das **Substituieren** (latein: „substituere“ = ersetzen) wird auch bei vielen anderen Berechnungen verwendet, um Rechenschritte abzukürzen oder zu vereinfachen.

Additions- oder Subtraktionsverfahren (Eliminationsmethode)

Die Gleichungen werden mit geeigneten Zahlen so multipliziert, dass die Koeffizienten einer Variablen Gegenzahlen sind. Anschließend werden sie addiert. Man kann auch so multiplizieren, dass die Koeffizienten einer Variablen gleich sind und die Gleichungen anschließend subtrahieren.

6.17 Löse das Gleichungssystem mittels Additionsverfahren. Führe die Probe durch.

B

I: $4x - 3y = 2$
II: $3x + 2y = 27$

Lösung:

$I^* = 3 \cdot I: \quad 12x - 9y = 6$
$II^* = -4 \cdot II: \quad -12x - 8y = -108$ ⊕

- Es soll zB x wegfallen. Gleichung I wird mit 3 und Gleichung II mit (−4) multipliziert, sodass die Koeffizienten 12 und (−12), also Gegenzahlen sind.

$I^* + II^*: \quad 0 - 17y = -102$
$y = 6$

- Die neuen Gleichungen werden addiert.
- Nun kann y berechnet werden.

In I: $4x - 3 \cdot 6 = 2 \Rightarrow x = 5$
Lösung: $x = 5, y = 6$

- Um x zu erhalten, wird die Lösung für y zum Beispiel in Gleichung I eingesetzt.

Probe:
I: LS: $4 \cdot 5 - 3 \cdot 6 = 2$ LS = RS
II: LS: $3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 = 27$ LS = RS

2. Lösungsmöglichkeit:
$I^* = 3 \cdot I: \quad 12x - 9y = 6$
$II^* = 4 \cdot II: \quad 12x + 8y = 108$ ⊖
$I^* - II^*: \quad 0 - 17y = -102$
$y = 6$

- Gleichung II wird mit (+4) multipliziert und die Gleichungen werden subtrahiert.

Cramer'sche Regel

(Gabriel Cramer, schweizer Mathematiker, 1704 – 1752)

Die Cramer'sche Regel bietet eine Lösungsmöglichkeit mithilfe einer Formel, in die nur noch Zahlenwerte eingesetzt werden müssen.

Da sich lineare Gleichungssysteme nur durch die Werte der Koeffizienten und Konstanten voneinander unterscheiden, genügt es, diese geordnet anzugeben.

Zum Beispiel kann man statt I: $4x - 3y = 2$, II: $3x + 2y = 27$ kurz $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 27 \end{pmatrix}$ schreiben.

Ein solches rechteckiges (Zahlen-)Schema nennt man **Matrix** (Mehrzahl: Matrizen). Eine Matrix ist in Zeilen und Spalten gegliedert; die einzelnen Zahlen heißen Elemente. Matrizen werden mit Großbuchstaben (A, M ...) bezeichnet. Die Größe einer Matrix wird durch die Anzahl der Zeilen und Spalten angegeben.

ZB: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ Zeile / Spalte 3 Zeilen, 2 Spalten $\Rightarrow$ (3,2)-Matrix [sprich: „3 mal 2 Matrix"] oder (3 × 2)-Matrix [sprich: „3 kreuz 2 Matrix"]

Lineare Gleichungssysteme

Für die Elemente einer Matrix werden im Allgemeinen Kleinbuchstaben mit Indizes verwendet. Der erste Index eines Elements gibt die Zeile, der zweite die Spalte an, in der das Element steht.

Merke: **Z**eile **z**uerst, **Sp**alte **sp**äter

Allgemein schreibt man für eine (2,2)-Matrix: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Hat eine Matrix gleich viele Zeilen wie Spalten, so wird sie als quadratische Matrix bezeichnet. Für jede quadratische Matrix lässt sich ein für viele Berechnungen benötigter Wert ermitteln. Die Funktion, die jeder quadratischen Matrix diesen Wert zuordnet, heißt **Determinante**.

Ein rechteckiges Zahlenschema, das in Zeilen und Spalten angeordnet ist, heißt **Matrix**.

Einer (2,2)-Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ wird der Wert $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ zugeordnet. Er heißt **Determinante** von A.

Schreibweisen: $\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Merke: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ „Produkt der Elemente der Hauptdiagonale minus Produkt der Elemente der Nebendiagonale“

Nebendiagonale Hauptdiagonale

B **6.18** Berechne die Determinante der Matrix. ***a)*** $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ ***b)*** $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) $\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 2 \cdot 7 = 20 - 14 = 6$

b) $\det(B) = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - (-3) \cdot 6 = 8 + 18 = 26$

Ein Gleichungssystem ist durch Koeffizienten und Konstanten bestimmt:

I: $a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y = b_1$
II: $a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y = b_2$

Diese Zahlen können mithilfe einer Matrix angegeben werden.

Diese Matrix heißt **erweiterte Matrix**: $A_{erw} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix}$

Die Koeffizienten der Variablen bilden die **Koeffizientenmatrix**: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Nun können wir den Vorgang beim Lösen eines Gleichungssystems mithilfe der Matrizenschreibweise und mit Determinanten angeben.

Löst man ein lineares Gleichungssystem mit dem Additionsverfahren allgemein nach x, so erhält man die Lösung $x = \frac{b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$.

- Im Nenner steht die Determinante der Koeffizientenmatrix.
- Im Zähler steht die Determinante der Matrix $A_x = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}$. Anstelle der Koeffizienten von x stehen hier die Konstanten b_1 und b_2.
- Bezeichnen wir die Determinante der Koeffizientenmatrix mit D = det(A) und jene von A_x mit $D_x = \det(A_x)$, so erhalten wir: $x = \frac{D_x}{D}$
  Die Determinante von D darf dabei nicht den Wert 0 haben.
- Führt man die gleiche Überlegung für y durch, so werden die Koeffizienten von y in der Koeffizientenmatrix durch b_1 und b_2 ersetzt. Man erhält:
  $A_y = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$, $D_y = \det(A_y)$ und $y = \frac{D_y}{D}$

Ein lineares Gleichungssystem ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die Determinante D der Koeffizientenmatrix verschieden von null ist. In diesem Fall kann die Lösung mit der **Cramer'schen Regel** berechnet werden:

$$\begin{array}{l} \text{I: } a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y = b_1 \\ \underline{\text{II: } a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y = b_2} \end{array} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}$$

mit $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ und $D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

6.19 Gegeben ist folgendes Gleichungssystem: BD

$$\begin{array}{l} \text{I: } 4x - 3y = 8 \\ \underline{\text{II: } 5x + 6y = 12} \end{array}$$

1) Bestimme A_{erw}, A, A_x und A_y.
2) Begründe, warum das Gleichungssystem lösbar ist.
3) Berechne x und y.

Lösung:

1) $A_{erw} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 8 \\ 5 & 6 & 12 \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad A_x = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad A_y = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$

2) $D = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 39$ Da $D \neq 0$ ist, gibt es eine eindeutige Lösung.

3) $D_x = \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} = 84$ $\quad D_y = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 8$

$x = \frac{D_x}{D} = \frac{84}{39} = \frac{28}{13}$ $\quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{8}{39}$ $\quad x = \frac{28}{13}$, $y = \frac{8}{39}$

TE

Technologieeinsatz: Grafisches Lösungsverfahren

GeoGebra

Excel, TI-Nspire: www.verlaghpt.at

BC TE

6.20 Löse das lineare Gleichungssystem grafisch und überprüfe die Lösung durch eine händische Rechnung. Vergleiche die Ergebnisse.

I: $y = 0{,}5x - 2$
II: $y = -0{,}25x + 3$

Lösung:

- Definieren der Gleichungen als Funktionen: **f(x) = 0.5x – 2** **g(x) = –0.25x + 3**
- Ermitteln des Schnittpunkts A durch Eingabe von **Schneide[f,g]** in die Eingabezeile.
- Der Schnittpunkt lautet: A(6,67|1,33)

Überprüfung:

$0{,}5x - 2 = -0{,}25x + 3 \Rightarrow 0{,}75x = 5$

- Gleichsetzungsverfahren

$\frac{3}{4}x = 5 \Rightarrow x = 5 \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$,

$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{3} - 2 = \frac{10}{3} - \frac{6}{3} = \frac{4}{3}$

Das Gleichungssystem hat die Lösung $\left(\frac{20}{3}\middle|\frac{4}{3}\right)$.

Die beiden Lösungen stimmen überein, wobei das Computerprogramm gerundete Werte angibt.

TE

Technologieeinsatz: Rechnerisches Lösen

TI-Nspire

Man erreicht die benötigte Anwendung über menu, **3: Algebra, 7: Gleichungssystem lösen, 2: System linearer Gleichungen lösen**. Es öffnet sich ein Eingabefeld, in dem die gewünschte Anzahl der Gleichungen und die verwendeten Variablen – durch Beistriche getrennt – eingegeben werden können.

Nach Eingabe der Gleichungen in die vorgegebene Maske und durch Betätigen der Enter-Taste wird das Gleichungssystem gelöst.

Untersuchung der Lösbarkeit von Gleichungssystemen

Wir betrachten folgendes Gleichungssystem: $\begin{array}{l} \text{I: } 2x + y = 6 \\ \text{II: } 4x + 2y = 4 \end{array}$

Multipliziert man Gleichung I mit 2, so erhält man die gleichen Koeffizienten wie in Gleichung II, aber verschiedene Konstanten. Die Gleichungen widersprechen einander. Beim Lösen mit dem Additionsverfahren ergibt sich die Gleichung 0 = 8. Das ist eine falsche Aussage, daher gilt: $L = \{\ \}$.

Die Berechnung der Determinanten ergibt D = 0, aber $D_x \neq 0$ und $D_y \neq 0$.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 0,\ \ D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 8,\ \ D_y = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -16$$

Nun ändern wir eine Konstante des obigen Gleichungssystems: $\begin{array}{l} \text{I: } 2x + y = 2 \\ \text{II: } 4x + 2y = 4 \end{array}$

Da Gleichung II nun ein Vielfaches von Gleichung I ist, führt dieses Verfahren auf die Gleichung 0 = 0. Das ist für jedes x bzw. jedes y eine wahre Aussage. Die Lösungsmenge besteht daher – wie bei einer Gleichung mit zwei Variablen – aus unendlich vielen Zahlenpaaren, die Gleichung I und auch Gleichung II erfüllen: $L = \{(x|y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 2x + y = 2\}$. Wir berechnen nun die Determinanten D, D_x und D_y:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 0,\ \ D_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0,\ \ D_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Da die Elemente der zweiten Zeile ein Vielfaches der Elemente der ersten Zeile sind, sind alle Determinanten gleich null, $D = D_x = D_y = 0$.
Daraus erkennt man, dass es nur dann eine eindeutige Lösung gibt, wenn $D \neq 0$ ist.

Beim **Lösen eines Gleichungssystems** unterscheidet man drei Fälle:		
Das Gleichungssystem hat **genau eine** Lösung.	Das Gleichungssystem hat **keine** Lösung.	Das Gleichungssystem hat **unendlich viele** Lösungen.
Die Gleichungen sind voneinander unabhängig. Entstandene Gleichung: zB $a \cdot x = b$	Die Gleichungen widersprechen einander. Entstandene Gleichung: $0 = a$	Eine Gleichung ist ein Vielfaches der anderen. Entstandene Gleichung: $0 = 0$
$D \neq 0$, D_x, D_y beliebig	$D = 0$, $D_x \neq 0$, $D_y \neq 0$	$D = 0$, $D_x = D_y = 0$

6.21 Löse grafisch. **B**

a) I: $y = -x + 1$, II: $y = 2x + 7$
b) I: $y = \frac{1}{4}x - 1$, II: $y = x + 2$
c) I: $2x = 3$, II: $-4x + 3y = 6$

6.22 Gib an, wie man das folgende Gleichungssystem verändern müsste, damit es **1)** keine, **2)** unendlich viele Lösungen hat. **BC**

a) I: $3x + 2y = 5$, II: $x - 2y = 5$
b) I: $6x - 4y = 12$, II: $-3x + y = 1$
c) I: $x + y = 3$, II: $x - y = 2$

6.23 Löse mit dem Gleichsetzungsverfahren. **B**

a) I: $x - y = -4$, II: $2x + y = 4$
b) I: $-8x + 4y = 12$, II: $9x - 3y = \frac{33}{2}$
c) I: $4x - 2y = 36$, II: $x + 3y = 23$

B **6.24** Löse mit dem Einsetzungsverfahren.

a) I: $-2x + y = -8$; II: $3x - 3y = 9$ **b)** I: $3a - 2b = -3$; II: $a + 3b = 21$ **c)** I: $4x - 2y = 0$; II: $-5x + 3y = 2$

B **6.25** Löse mit dem Additionsverfahren.

a) I: $-x + y = -1$; II: $x + 2y = 7$ **b)** I: $3x + 2y = 11$; II: $2x - y = -2$ **c)** I: $6r + 2s = 10$; II: $2r + s = 3$

B **6.26** Löse mit der Eliminationsmethode.

a) I: $5a - 6b = 17$; II: $-2a + 4b = -2$ **b)** I: $-10x + 8y = -10$; II: $15x + 6y = 6$ **c)** I: $4x + 3y = 12$; II: $12x - 5y = -6$

BD **6.27** Löse das Gleichungssystem. Gib an, ob es keine Lösung, eine Lösung oder unendlich viele Lösungen hat. Entscheide dies, bevor du das Gleichungssystem löst, und begründe deine Vermutung.

1) I: $3x + 2y = 7$; II: $\frac{1}{2}x - 3y = \frac{1}{2}$ **2)** I: $2x + y = 0$; II: $4x + 2y = 3$ **3)** I: $3x - 5y = 12$; II: $x - \frac{5}{3}y = 4$

Cramer'sche Regel

A **6.28** Bestimme die Größe der Matrix und gib die gesuchten Elemente an.

a) $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 & 21 \\ 13 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, $a_{13} = ?$, $a_{24} = ?$ **b)** $A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 0 & 6 \\ 5 & -1 & 12 & 9 \\ 9 & 13 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $a_{23} = ?$, $a_{33} = ?$

B **6.29** Berechne die Determinante.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -2 & 13 \end{pmatrix}$ **d)** $D = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

BD **6.30** Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem.

1) Bestimme die erweiterte Matrix A_{erw}.

2) Berechne D, D_x und D_y. Was kannst du über die Lösung sagen?

3) Löse, wenn möglich, das Gleichungssystem mithilfe der Cramer'schen Regel.

a) I: $5x - 2y = -1$; II: $-4x + 3y = 5$ **b)** I: $3x - 4y = 6$; II: $x - \frac{4}{3}y = 2$ **c)** I: $x + 6y = 3$; II: $-\frac{7}{3}x - 4y = 4$

B **6.31** Bestimme die Lösung des durch die erweiterte Matrix gegebenen Gleichungssystems.

a) $A_{erw} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 5 \\ -3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ **b)** $A_{erw} = \begin{pmatrix} 2{,}5 & -1 & 0 \\ 3 & 1{,}2 & 4 \end{pmatrix}$ **c)** $A_{erw} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ \frac{2}{3} & -\frac{5}{2} & -3 \end{pmatrix}$

Vermischte Aufgaben

BD **6.32** Gib an, welches Lösungsverfahren das günstigste ist, und erkläre mit eigenen Worten warum. Löse das Gleichungssystem danach.

a) I: $y = -2x + 4$; II: $2y = 3x + 1$ **c)** I: $u : v = 3 : 1$; II: $-2u + 5v = -\frac{1}{2}$ **e)** I: $3a + b = 0$; II: $7a - 2b = -13$

b) I: $-\frac{3}{4}x + y = 1$; II: $6x = 8$ **d)** I: $2y - 2 - x = 0$; II: $x = y + 1$ **f)** I: $t_2 = t_1 - 10$; II: $10t_2 = 12t_1$

6.33 Gegeben sind die Geraden g und h. Trage in die Tabelle ein, welche Werte die Koeffizienten c und d in der Geradengleichung von h annehmen müssen, um die jeweils angegebene Bedingung zu erfüllen. ABC

g: $\frac{3x}{4} + \frac{y}{3} = 2$
h: $3x + c \cdot y = d$

Bedingung	c	d
$g \cap h = S$, das heißt g und h schneiden einander		
$g \cap h = \{\ \}$, das heißt g und h sind parallel zueinander		
$g \cap h = g = h$, das heißt g und h sind ident		
$g \perp h$, das heißt g steht normal auf h		

Aufgaben 6.34 – 6.38: Bringe die Gleichungen jeweils auf die Form $a \cdot x + b \cdot y = c$ und löse anschließend die Gleichungssysteme. Wähle jeweils die Methode selbst.

6.34 B
a) I: $5x - (2y + 36) = 12x + 4y - 10$
II: $8x + 20 = -6x - (7y - 33)$
b) I: $3x + 11y - 61 = 17x - (5y - 9)$
II: $4x - (2y + 2) = -6x + 2y$

6.35 B
a) I: $3(2x - 4) + 4(y + 4) = 20x - 7(3y + 2)$
II: $15x - 3(5y - 3) = 8(2x + 3) - 10y$
b) I: $25x - 5(7y + 12) = 4(2x - 7) + 14y$
II: $-(3x + 3) + 22y = 6(8x + 3) - 2(9y + 5)$

6.36 B
I: $(x + 2)^2 + 4y^2 = (x - 3)(x + 3) + (2y - 3)^2$
II: $9x^2 - (y + 4)(2y - 3) = (3x - 4)^2 - 2y^2$

6.37 B
a) I: $\frac{x}{4} - \frac{y}{3} = \frac{1}{6}$
II: $\frac{x}{5} + \frac{3y}{2} = \frac{19}{10}$
b) I: $\frac{x + 2}{7} + \frac{3y}{2} = 7$
II: $\frac{2x}{5} - \frac{y + 5}{9} = 1$
c) I: $\frac{5x - y}{2} - 2 = 0$
II: $-\frac{4x}{3} + \frac{y + 3}{2} = \frac{2}{3}$

6.38 B
a) I: $\frac{2x + 5}{3} - \frac{y - 4}{4} = \frac{3y - 3}{2}$
II: $\frac{y + 5}{7} + \frac{x}{3} = \frac{2x + y}{7} + \frac{2}{3}$
b) I: $\frac{2x + 4}{5} - 3y = 1 - \frac{x + 3y}{3}$
II: $\frac{3}{4} + \frac{3x - 10y + 7}{3} = \frac{3x + 2y}{4}$

6.39 Löse das Gleichungssystem. B

I: $\frac{2}{x} - \frac{3}{y} = 0$
II: $\frac{3}{x} + \frac{3}{y} = \frac{5}{4}$

Lösung:

$x \neq 0$ und $y \neq 0$
$D = \{(x|y) \mid (x|y) \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \times \mathbb{R}\backslash\{0\}\}$

- Bestimmen der Definitionsmenge
- Die Multiplikation mit dem gemeinsamen Nenner ist nicht zielführend, da sie auf der rechten Seite zu dem nichtlinearen Ausdruck $x \cdot y$ führt. Wir ersetzen daher die Bruchterme durch die Hilfsvariablen u und v.

$u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{y}$

I: $2u - 3v = 0$
II: $3u + 3v = \frac{5}{4}$

- Durch diese Substitution erhalten wir ein lineares Gleichungssystem.

I + II: $5u = \frac{5}{4} \Rightarrow u = \frac{1}{4}$

In I: $2 \cdot \frac{1}{4} - 3v = 0 \Rightarrow v = \frac{1}{6}$

$u = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 4$

$v = \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{1}{y} \Rightarrow y = 6$

- Nun wird rücksubstituiert.

Lineare Gleichungssysteme

Aufgaben 6.40 – 6.41: Bestimme jeweils zuerst die Definitionsmenge und löse die Gleichungssysteme durch geeignete Substitution. Gib die Lösungsmengen an.

B **6.40** **a)** I: $-\frac{4}{x} - \frac{2}{y} = -2$
II: $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = -1$

b) I: $\frac{1}{f} + \frac{1}{g} = \frac{5}{6}$
II: $\frac{3}{f} - \frac{1}{g} = \frac{7}{6}$

c) I: $\frac{2}{x} - \frac{8}{y} = 0$
II: $\frac{3}{x} + \frac{6}{y} = 1$

B **6.41** **a)** I: $\frac{3}{x+2} + \frac{5}{y-3} = \frac{37}{20}$
II: $\frac{6}{x+2} + \frac{2}{y-3} = \frac{17}{10}$

b) I: $\frac{4}{3-p} - \frac{1}{5+q} = 0$
II: $\frac{2}{3-p} + \frac{2}{5+q} = \frac{5}{2}$

c) I: $\frac{1}{2a+b} + \frac{2}{a-3b} = \frac{1}{5}$
II: $\frac{3}{2a+b} - \frac{4}{a-3b} = -\frac{7}{5}$

BCD **6.42** Welche Zahlen können für a und b eingesetzt werden, sodass das Gleichungssystem keine Lösung bzw. unendlich viele Lösungen hat? Begründe deine Auswahl.

a) I: $2x + ay = 3$
II: $6x - 3y = b$

b) I: $5x - 3y = 1$
II: $bx + 2y = a$

c) I: $ax - 2y = -1$
II: $3x + 4y = b$

BD **6.43** Von einem Gleichungssystem sind die Koeffizientenmatrix sowie zwei mögliche Konstantenspalten der erweiterten Matrix gegeben. Ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar? Begründe deine Antwort. Falls es nicht eindeutig lösbar ist, gib an, mit welcher der beiden Konstantenspalten das Gleichungssystem keine Lösung und mit welcher es unendlich viele Lösungen hat.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1{,}5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ **c)** $A = \begin{pmatrix} -2 & 0{,}5 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Aufgaben 6.44 – 6.45: Löse folgende Gleichungssysteme nach x und y. Gib jeweils an, was für die übrigen Variablen gelten muss.

B **6.44** **a)** I: $rx + y = rs$
II: $sx - ry = s^2$

b) I: $bx - ay = 2ab$
II: $(a + b)x - 3ay = 3a^2$

c) I: $2x + ay = 8a + 4b$
II: $x - 3y = 3a + 2b - 6$

B **6.45** **a)** I: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{a-b}{ab}$
II: $bx - ay = a + b$

b) I: $\frac{x}{ab} - \frac{y}{a} = \frac{1-a}{a}$
II: $2x + \frac{y}{b} = \frac{2b^2 + a}{b}$

c) I: $\frac{x}{a+b} + y = 2a$
II: $x - (a - b)y = 0$

BD **6.46** Chiara und Robin erhalten bei einer Mathematikhausübung unterschiedliche Ergebnisse. Chiara hat folgendermaßen gerechnet:

I: $4x + 3y = 5 \quad |\cdot(-3)$
II: $3x - 5y = 11 \quad |\cdot 4$
$\Rightarrow$ I*: $-12x - 9y = 5$
II*: $12x - 20y = 11$
$\Rightarrow$ I* + II*: $-29y = 16$
$y = -\frac{16}{29}, \; x = \frac{167}{64}$

Robins Berechnung lautet:

I: $4x + 3y = 5 \quad |\cdot 5$
II: $3x - 5y = 11 \quad |\cdot 3$
$\Rightarrow$ I*: $20x + 15y = 25$
II*: $9x - 15y = 33$
$\Rightarrow$ I* + II*: $29x = 58$
$x = 2, \; y = -1$

Prüfe beide Rechnungen nach und gib an, wer richtig gerechnet hat. Begründe, welcher Fehler gemacht wurde.

BD **6.47** Beweise die Formel für die Cramer'sche Regel durch Lösen des Gleichungssystems mithilfe der Eliminationsmethode nach x und y.

I: $a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y = b_1$
II: $a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y = b_2$

Textaufgaben mit Zahlen und Ziffern

6.48 Die Differenz zweier Zahlen ist vier. Addiert man zum Doppelten der ersten Zahl das Dreifache der zweiten Zahl, so ist die Summe 93. Wie lauten die Zahlen? AB

6.49 Das Dreifache der Differenz zweier Zahlen ist 7,2. Viertelt man die Summe dieser Zahlen, erhält man 1,8. Zur Ermittlung der beiden Zahlen werden Lösungsansätze vorgeschlagen. Begründe, welche dieser Ansätze richtig bzw. falsch sind. ACD

A) I: $3x - 3y = 7{,}2$ II: $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1{,}8$

B) I: $x - y = 7{,}2 \cdot 3$ II: $x + y = \frac{1{,}8}{4}$

C) I: $\frac{x - y}{3} = 7{,}2$ II: $4 \cdot (x + y) = 1{,}8$

D) I: $3 \cdot (x - y) = 7{,}2$ II: $\frac{x + y}{4} = 1{,}8$

6.50 Beim Fußball-WM-Finale 2006 fielen mit dem Elfmeterschießen 10 Tore. Italien gewann gegen Frankreich mit zwei Toren Differenz. Wie viele Tore schoss jede Mannschaft? AB

6.51 Eine Mutter sagt zu ihrer Tochter: „Ich bin 21 Jahre älter als du und in drei Jahren werde ich doppelt so alt wie du dann sein." Wie alt ist die Mutter, wie alt die Tochter? AB

6.52 Die Ziffernsumme einer zweistelligen Zahl ist 5. Vertauscht man Einer- und Zehnerziffer, so ist die neue Zahl um neun kleiner als die ursprüngliche Zahl. Wie lautet die Zahl? AB

Lösung:

	Zehnerziffer	Einerziffer	Wert
Ursprüngliche Zahl	x	y	10x + y
Vertauschte Ziffern	y	x	10y + x

I: $x + y = 5$
II: $10x + y = 10y + x + 9$

I: $x + y = 5$
II*: $9x - 9y = 9$

$9 \cdot \text{I} + \text{II*}: 18x = 54 \Rightarrow x = 3$
In I: $3 + y = 5 \Rightarrow y = 2$

Die ursprüngliche Zahl lautet 32.

6.53 Bei einer zweistelligen Zahl ist die Einerziffer doppelt so groß wie die Zehnerziffer. Vertauscht man die beiden Ziffern, so ist die neue Zahl um 27 größer als die gegebene Zahl. Wie lautet die Zahl? AB

6.54 Erfinde eine ähnliche Aufgabe wie Aufgabe 6.51 für Familienmitglieder oder Freunde. Präsentiere diese Aufgabe in der Klasse und lasse deine Mitschüler das Alter dieser Personen ermitteln. ABD

Geometrische Aufgaben

6.55 In einem gleichschenkligen Dreieck ist jeder Schenkel doppelt so lang wie die Basis. Der Umfang beträgt 35 cm. Berechne die Längen der Schenkel und der Basis. AB

6.56 Der Umfang eines Rechtecks beträgt 72 cm. Verlängert man ein Seitenpaar um 4 cm, so entsteht ein Quadrat. Gib die Längen der Rechteckseiten an. AB

6.57 Der Umfang eines Rechtecks beträgt 70 cm. Verlängert man die kürzeren Seiten um 3 cm und die längeren um 2 cm, so vergrößert sich der Flächeninhalt um 96 cm^2. Gib die Abmessungen des ursprünglichen Rechtecks an. AB

6.58 Die beiden spitzen Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck verhalten sich wie 3 : 2. Wie groß sind die Winkel? AB

Mischungsaufgaben

AB **6.59** Um eine 32 %ige Salzlösung zu erhalten, werden 60 kg und 40 kg von zwei verschiedenen Salzlösungen gemischt. Für eine 20 %ige Salzlösung werden 40 kg der ersten Salzlösung mit 30 kg Wasser versetzt. Ermittle den Prozentgehalt der Salzlösungen.

Lösung:

	Masse	Salzanteil	Salzmasse
Salzlösung 1	60 kg	x %	$\frac{x}{100} \cdot 60$ kg
Salzlösung 2	40 kg	y %	$\frac{y}{100} \cdot 40$ kg
Mischung 1	100 kg	32 %	$\frac{32}{100} \cdot 100$ kg

	Masse	Salzanteil	Salzmasse
Salzlösung 1	40 kg	x %	$\frac{x}{100} \cdot 40$ kg
Wasser	30 kg	0 %	0 kg
Mischung 2	70 kg	20 %	$\frac{20}{100} \cdot 70$ kg

I: $\frac{x}{100} \cdot 60\text{ kg} + \frac{y}{100} \cdot 40\text{ kg} = 32\text{ kg}$ $\quad | \cdot 100 \quad |: \text{kg}$

II: $\frac{x}{100} \cdot 40\text{ kg} + 0\text{ kg} = 14\text{ kg}$ $\quad | \cdot 100 \quad |: \text{kg}$

● Die Mischung enthält die Summe der einzelnen Salzmassen.

I: $60x + 40y = 3\,200$

II: $40x = 1\,400$

$x = 35,\ y = 27{,}5$ Die erste Salzlösung ist 35 %ig, die zweite 27,5 %ig.

Merke: Massen dürfen addiert werden, Prozentsätze nicht!

AB **6.60** Jemand mischt je 500 g von zwei verschiedenen Zuckerlösungen und erhält eine 70 %ige Mischung. Danach werden 250 g der ersten Lösung und 750 g der zweiten Lösung gemischt und man erhält eine 65 %ige Zuckerlösung. Ermittle den Prozentgehalt der ursprünglichen Lösungen.

AB **6.61** Messing entsteht aus einer Legierung aus Kupfer und Zink. Für eine Legierung werden 1 kg einer bestimmten Messingsorte mit 4 kg einer zweiten Sorte gemischt und man erhält 29,8 % Zinkanteil. Wird die Masse der ersten Sorte verdoppelt und jene der zweiten halbiert, so ergibt diese Mischung 20,5 % Zinkanteil. Welchen Zinkgehalt haben die Messingsorten?

AB **6.62** Weißgold ist eine Legierung aus Gold, Palladium und weiteren Metallen. Der Goldanteil wird in Promille angegeben. Weißgold 585 enthält 585 ‰ reines Gold. Eine Goldschmiedin mischt für ein Schmuckstück Weißgold 585 mit Weißgold 750 und erhält 15 g Weißgold mit 631,2 ‰ Goldgehalt. Wie viel Gramm verwendet sie von jeder Sorte?

AB **6.63** Für einen Ring wird ein flacher, quaderförmiger Streifen ($V = 300\text{ mm}^3$) aus Rotgold gebogen und zusammengelötet. Rotgold besteht aus Gold ($\rho = 19{,}3\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$) und Kupfer ($\rho = 8{,}9\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$).

1) Wie viel Gold und Kupfer wurden gemischt, wenn der Ring eine Masse von 4 g hat?

2) Welchen Goldgehalt hat der Ring?

ABC **6.64** Eine Wand soll in einem hellen Grünton gestrichen werden. Dazu mischt man weiße und grüne Farbe im Volumenverhältnis 5 : 3. Die Wand hat eine Fläche von 30 m² und man benötigt 200 Milliliter Farbe pro Quadratmeter. Bettina kauft drei Liter grüne Farbe. Reicht der Inhalt aus?

6.65 Nitinol („**NI**ckel **TI**tanium **N**aval **O**rdnance **L**aboratory") ist eine Mischung aus 55 % Nickel und 45 % Titanium.

1) Es sollen 22 kg Nitinol hergestellt werden. Dafür stehen Nickel-Titanium-Legierungen mit 15 % bzw. 74 % Nickelgehalt zur Verfügung. Berechne, wie viel kg jeder Sorte verwendet werden müssen.

2) Erstelle ein Referat über die Bedeutung dieses Werkstoffs.

ABD

Bewegungsaufgaben

6.66 Ein Autofahrer fährt um 8:00 Uhr mit einer mittleren Geschwindigkeit von 90 $\frac{km}{h}$ von Graz nach Linz, das 220 km entfernt ist. Um 8:15 Uhr fährt eine Motorradfahrerin ebenfalls von Graz nach Linz, ihre mittlere Geschwindigkeit beträgt 110 $\frac{km}{h}$. Kann sie den Autofahrer noch vor Linz einholen? Wenn ja, gib die Uhrzeit und die Entfernung von Graz an. Dokumentiere den Lösungsweg und fertige ein Weg-Zeit-Diagramm an.

ABC

Lösung:

	Auto	**Motorrad**
Geschwindigkeit	$90\,\frac{km}{h}$	$110\,\frac{km}{h}$
Zeit	t_1	t_2
Weg	$s_1 = 90\,\frac{km}{h} \cdot t_1$	$s_2 = 110\,\frac{km}{h} \cdot t_2$

Die Motorradfahrerin benötigt die Zeit t_2 bis zum Treffpunkt und fährt um 15 Minuten später weg:

I: $t_2 = t_1 - 0{,}25\ h$

Beim Überholvorgang haben beide den gleichen Weg zurückgelegt: $s_1 = s_2$

II: $90\,\frac{km}{h} \cdot t_1 = 110\,\frac{km}{h} \cdot t_2$

I in II: $90\,\frac{km}{h} \cdot t_1 = 110\,\frac{km}{h} \cdot (t_1 - 0{,}25\ h)$ — Einsetzungsverfahren; ausmultiplizieren und durch die Einheit $\frac{km}{h}$ dividieren.

$90\,t_1 = 110\,t_1 - 27{,}5\ h$

$20\,t_1 = 27{,}5\ h \Rightarrow t_1 = 1{,}375\ h$

$s_1 = 90\,\frac{km}{h} \cdot t_1 = 90\,\frac{km}{h} \cdot 1{,}375\ h = 123{,}75\ km$ — Berechnung des zurückgelegten Wegs

$1{,}375\ h = 1\ h\ 22\ min\ 30\ s \Rightarrow$ Überholvorgang um ca. 9:22 Uhr

Weg-Zeit-Diagramm:

Auto: $s(t) = 90\,\frac{km}{h} \cdot t$

Motorrad: $s(t) = 110\,\frac{km}{h} \cdot (t - 0{,}25\ h)$

Der Autofahrer wird um ca. 9:22 Uhr nach einer Fahrtstrecke von 123,75 km eingeholt. Auch aus der Zeichnung geht hervor, dass dies noch vor Linz passiert.

6.67 Eine Schwimmerin schwimmt in einem Fluss. Mit der Strömung erreicht sie eine mittlere Geschwindigkeit von 1,2 $\frac{m}{s}$, gegen die Strömung erreicht sie 0,2 $\frac{m}{s}$. Mit welcher mittleren Geschwindigkeit schwimmt sie? Wie groß ist die Strömungsgeschwindigkeit?

AB

Aufgaben 6.68 – 6.69: Dokumentiere den Rechenweg und fertige Weg-Zeit-Diagramme an.

ABC TE **6.68** Die Bahnhöfe A, B und C liegen auf einer Zugstrecke, wobei B zwischen A und C liegt. Ein Inter-City-Zug fährt um 10:03 Uhr von A in Richtung C ab. 53 Minuten später fährt ein Regionalzug auf einem parallelen Gleis vom 124 km entfernten Bahnhof B ebenfalls in Richtung C ab. Der Inter-City-Zug erreicht eine um 26 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ höhere mittlere Geschwindigkeit und holt den Regionalzug um 13:14 Uhr ein.

1) Mit welchen mittleren Geschwindigkeiten fahren die beiden Züge?
2) Wie weit von Bahnhof B entfernt findet der Überholvorgang statt?

ABC TE **6.69** Zwei PKW fahren einander auf der Strecke München – Wien (Entfernung 435 km) entgegen. Fahren sie gleichzeitig los, so treffen sie einander nach 2 Stunden und 48 Minuten. Wenn die Fahrerin aus München 34 Minuten später losfährt und ihre Geschwindigkeit um 16 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ erhöht, trifft sie nach 2 Stunden und 14 Minuten den Autofahrer aus Wien.

1) Welche mittleren Geschwindigkeiten erreichen die beiden PKW?
2) In welcher Entfernung von Wien ist ihr Treffpunkt?

Leistungsaufgaben

ABC **6.70** Klaus und Franz streichen einen Raum in ihrer gemeinsamen Wohnung. Die erste Stunde arbeitet Franz allein, danach arbeiten beide noch drei Stunden gemeinsam, um den Raum fertig zu stellen. Beim zweiten Anstrich arbeiten beide zwei Stunden gemeinsam und streichen $\frac{7}{12}$ des Raums. Berechne, wie lang jeder allein für den ganzen Raum gebraucht hätte. Erstelle dazu eine Tabelle mit den Angaben. Welche Annahmen müssen vorher getroffen werden, damit diese Aufgabe lösbar ist?

Lösung:
Annahmen: – Beide streichen den Raum mit einer konstanten Geschwindigkeit.
– Der zweite Anstrich dauert für jeden gleich lang wie der erste.

x ... Arbeitszeit von Klaus, y ... Arbeitszeit von Franz

	Arbeitsfortschritt pro Stunde	Fläche beim 1. Anstrich	Fläche beim 2. Anstrich
Klaus	$\frac{A}{x}$	$3\,h\cdot\frac{A}{x}$	$2\,h\cdot\frac{A}{x}$
Franz	$\frac{A}{y}$	$4\,h\cdot\frac{A}{y}$	$2\,h\cdot\frac{A}{y}$

Gleichungssystem:

$$\text{I: } 3\frac{A}{x} + 4\frac{A}{y} = A \quad |:A$$
$$\text{II: } 2\frac{A}{x} + 2\frac{A}{y} = \frac{7}{12}A \quad |:A$$

● Ersetzen von $\frac{1}{x}$ durch u und $\frac{1}{y}$ durch v

$$\left.\begin{array}{l}\text{I: } 3u + 4v = 1\\ \text{II: } 2u + 2v = \frac{7}{12}\end{array}\right\}$$

$$\text{I} - 2\cdot\text{II: } -u = -\frac{1}{6} \Rightarrow x = 6\,h,\quad v = \frac{1}{8} \Rightarrow y = 8\,h$$

Klaus hätte allein sechs Stunden gebraucht, Franz acht Stunden.

AB **6.71** Zwei Fliesenleger verlegen in einem Haus Fliesen in vier gleich großen Zimmern mit je 24 m^2. In Zimmer 1 beginnt Fliesenleger A 1 Stunde 45 Minuten vor Fliesenleger B. Nach 4,5 Stunden gemeinsamer Arbeit sind sie fertig. In Zimmer 2 arbeitet Fliesenleger B 1,2 Stunden allein und 4 Stunden gemeinsam mit Fliesenleger A, wobei sie nur 20 m^2 schaffen.

1) Wie lang würden die Fliesenleger allein für ein Zimmer benötigen?
2) Wie viel Stunden benötigen sie gemeinsam für die restliche Fläche aller Zimmer?

6.72 Ein Swimmingpool wird zu Sommerbeginn durch zwei Schläuche befüllt. Dabei wird mit dem ersten Schlauch begonnen und nach drei Stunden zusätzlich der zweite verwendet. Danach dauert es noch weitere fünf Stunden, bis der Pool voll ist. Im Herbst wird das Wasser durch zwei Abflüsse abgelassen, wobei die Abflüsse die gleiche Kapazität wie die Zuflüsse haben und im Pool um 10 % weniger Wasser enthalten ist. Das Ablassen dauert sechs Stunden. Wie lang würde das Entleeren durch jeden Abfluss allein dauern? **AB**

Verschiedenes

6.73 In einer Zeitung steht folgende Fußballtabelle. Leider hat ein Druckfehler einen Fleck hinterlassen. Vervollständige die Tabelle.
Hinweis: Niederlage (N) – 0 Punkte, Sieg (S) – 3 Punkte, Unentschieden (U) – 1 Punkt **AB**

Mannschaft	Spiele	S	U	N	Punkte
FC Grün	8			1	15
FC Violett	7			3	10
SC Post	8			2	8

6.74 Ein Gastwirt bestellt 90 Liter Traubensaft in zwei verschiedenen Flaschengrößen zu 0,75 ℓ bzw. 1 ℓ Inhalt. Insgesamt bekommt er 100 Flaschen geliefert. Wie viele Flaschen von jeder Größe bekommt der Wirt? **AB**

6.75 Eine Vertreterin mietet für einen Tag ein Auto, wobei sich die Miete aus einer Tagesgebühr inklusive 400 km und einem Kilometer-Tarif für jeden weiteren Kilometer zusammensetzt. Sie fährt 500 km und bezahlt 115,00 €. Eine Woche später mietet sie denselben Wagen noch einmal für einen Tag und bezahlt für 440 km 91,00 €. Wie hoch ist die Tagesgebühr und wie hoch der Kilometer-Tarif? **AB**

6.76 Herr Redl hat Gäste und bestellt bei einem Cateringservice drei Schnitzel und vier Portionen Erdäpfelsalat. Er bezahlt dafür insgesamt 21,60 €. Eine Woche später ordert er beim selben Cateringservice fünf Schnitzel und drei Portionen Erdäpfelsalat. Die Rechnung beträgt um 10,00 € mehr als beim letzten Mal. **ABD**

1) Berechne, wie viel ein Schnitzel und eine Portion Erdäpfelsalat kosten.

2) Ist die Aufgabe eindeutig lösbar, wenn Herr Redl bei der zweiten Bestellung sechs Schnitzel und acht Portionen Salat bestellt und dafür 43,20 € bezahlt? Begründe deine Antwort.

6.77 Der indische Mathematiker Bhaskara II. (1114 – 1185) schrieb in einem seiner Werke, der Vija Ganita, folgende Aufgabe nieder: **ABCD**

„Jemand sagt zu seinem Freund: ‚Gib mir 100 Rupien und ich bin doppelt so reich wie du!'. Dieser antwortet: ‚Wenn du mir 10 gibst, bin ich sechsmal so reich wie du!'. Sag mir, wie groß ihre Vermögen waren."

1) Bildet Kleingruppen und löst diese Aufgabe gemeinsam.

2) Sucht nach weiteren Aufgaben zu linearen Gleichungssystemen aus vergangenen Zeiten. Übersetzt die Texte in die „heutige Sprache" und arbeitet die Lösungen aus. Präsentiert eure Arbeit der ganzen Klasse in Form eines Referats.

6.3 Gleichungssysteme mit drei oder mehreren Variablen

Mithilfe der im vorangegangenen Abschnitt behandelten Methoden lässt sich ein Gleichungssystem mit drei oder mehr Variablen auf ein Gleichungssystem mit zwei Variablen reduzieren.

B **6.78** Versuche, das gegebene Gleichungssystem mit drei Unbekannten zu lösen. Drücke dazu zum Beispiel aus Gleichung III z durch y aus und setze diesen Term in die Gleichungen I und II anstelle von z ein.

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & 2x + y - 2z = -1 \\ \text{II:} & 3x - 2y + z = 7 \\ \text{III:} & 3y - z = 0 \end{array}$$

Die eindeutige Lösung eines Gleichungssystems mit drei Variablen ist ein **Zahlentripel** $(x|y|z)$, das alle Gleichungen erfüllt. In Abschnitt 5.2 wurde gezeigt, dass die Gleichung $a \cdot x + b \cdot y = c$ eine Gerade in der Ebene beschreibt. Analog legt die Gleichung $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$ eine Ebene im dreidimensionalen Raum fest. Drei Ebenen können so liegen, dass sie einen gemeinsamen Punkt haben. Die Koordinaten dieses Schnittpunkts sind ein Zahlentripel, das der eindeutigen Lösung eines linearen Gleichungssystems mit drei Unbekannten entspricht.

Lösen mittels Reduktion auf ein Gleichungssystem von zwei Gleichungen mit zwei Variablen

B **6.79** Ermittle die Lösung des Gleichungssystems.

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & 3x - 2y + 5z = 7 \\ \text{II:} & x - 2y + 3z = -3 \\ \text{III:} & -6x + 3y + 10z = 1 \end{array}$$

Lösung:

Methode 1: Reduktion mithilfe des Einsetzungsverfahrens

$\text{II*}: x = 2y - 3z - 3$
$\text{I*}: 3 \cdot (2y - 3z - 3) - 2y + 5z = 7$
$\text{III*}: -6 \cdot (2y - 3z - 3) + 3y + 10z = 1$

- Gleichung II wird nach x umgeformt und dieser Term wird in die Gleichungen I und III anstelle von x eingesetzt.

$\text{I*}: 4y - 4z = 16$
$\text{III*}: -9y + 28z = -17$

$7 \cdot \text{I*} + \text{III*}: 19y = 95$
$y = 5$

- Wir erhalten ein Gleichungssystem von zwei Gleichungen (I* und III*) mit zwei Unbekannten, das zum Beispiel mithilfe des Additionsverfahrens gelöst werden kann.

$\text{I*}: 4 \cdot 5 - 4z = 16 \Rightarrow z = 1$
$\text{II*}: x = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 - 3 = 4$

- Um x zu ermitteln, werden die Lösungen für y und z in II* eingesetzt.

Methode 2: Reduktion mithilfe der Eliminationsmethode

$\text{IV} = \text{I} - \text{II}: 2x + 2z = 10$
$\text{V} = 3 \cdot \text{I} + 2 \cdot \text{III}: -3x + 35z = 23$

- Wir eliminieren y durch Kombination der Gleichungen I und II bzw. I und III. Wir erhalten zwei Gleichungen, in denen kein y vorkommt.

$3 \cdot \text{IV} + 2 \cdot \text{V}: 76z = 76$
$z = 1$

- Aus dem erhaltenen Gleichungssystem wird x eliminiert und nach z gelöst.

$\text{IV}: 2x + 2 \cdot 1 = 10 \Rightarrow x = 4$
$\text{I}: 3 \cdot 4 - 2y + 5 \cdot 1 = 7 \Rightarrow y = 5$

- Um x zu berechnen, wird die Lösung für z in Gleichung IV eingesetzt.
- Nun werden die Lösungen für x und z in I eingesetzt und y berechnet.

Lösung: $x = 4, y = 5, z = 1$

Probe:
I: LS: $3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 + 5 \cdot 1 = 7$ LS = RS
II: LS: $4 - 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = -3$ LS = RS
III: LS: $-6 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 10 \cdot 1 = 1$ LS = RS

Cramer'sche Regel

Die Cramer'sche Regel kann auch bei Gleichungssystemen mit drei Variablen verwendet werden. Die benötigten Matrizen werden – sinngemäß – wie bei einem Gleichungssystem mit zwei Variablen behandelt. Wir benötigen jedoch vorher eine Methode zur Berechnung der Determinante einer (3,3)-Matrix.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$$

Als Merkhilfe wird die **Regel von Sarrus** (Pierre Frédéric Sarrus, französischer Mathematiker, 1798 – 1861) verwendet:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

(− − − oben; + + + unten)

Die ersten beiden Spalten der Matrix werden rechts noch einmal angeschrieben. Die Produkte der Elemente in den Diagonalen von links oben nach rechts unten werden addiert. Die Produkte der Elemente der Diagonalen von rechts oben nach links unten werden subtrahiert.

Cramer'sche Regel für ein System von drei Gleichungen mit drei Variablen:
Ein Gleichungssystem ist genau dann eindeutig lösbar, wenn $D \neq 0$ ist. Dann gilt:
$x = \frac{D_x}{D} \quad y = \frac{D_y}{D} \quad z = \frac{D_z}{D}$

Der Beweis dieses Satzes ist für drei Variablen viel aufwändiger als der Beweis für zwei Variablen, basiert jedoch auf den gleichen Überlegungen.

6.80 Berechne die Determinante der gegebenen Matrix. $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ **B**

Lösung:

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{matrix} = 4\cdot 1\cdot 2 + (-3)\cdot(-2)\cdot 5 + 0\cdot 2\cdot 3 - 5\cdot 1\cdot 0 - 3\cdot(-2)\cdot 4 - 2\cdot 2\cdot(-3) = 74$$

6.81 Löse das Gleichungssystem mithilfe der Cramer'schen Regel. **B**

I: $2x + 3y - z = -3$
II: $-5x + 7y + 4z = 25$
III: $x - 2y + 3z = 2$

Lösung:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -5 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 112 \neq 0,$$ somit gibt es eine eindeutige Lösung.

$$D_x = \begin{vmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 25 & 7 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -224, \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -5 & 25 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 112, \quad D_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -5 & 7 & 25 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 224$$

$x = \frac{-224}{112} = -2, \quad y = \frac{112}{112} = 1, \quad z = \frac{224}{112} = 2$

Das Gleichungssystem hat die Lösung $(-2|1|2)$.

Lineare Gleichungssysteme

Gauß'sches Eliminationsverfahren

Dieses Verfahren ist eine spezielle Art des Additionsverfahrens. Es lässt sich – im Gegensatz zu den bisher besprochenen Methoden – auch für Gleichungssysteme mit mehr als drei Variablen anwenden, ohne unübersichtlich zu werden. Dabei wird das Gleichungssystem durch geeignetes Eliminieren auf Dreiecksform gebracht.

B **6.82** Löse das Gleichungssystem mithilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens.

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & a - 3b + 4c - d = -1 \\ \text{II:} & 3a - 2b - 2c + 4d = 4 \\ \text{III:} & -2a + 4b + c + 2d = -4 \\ \text{IV:} & -a + 2b + 7c - 5d = 10 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{lll} \text{I:} & a - 3b + 4c - d = -1 & \\ \text{II:} & 7b - 14c + 7d = 7 & (\text{II} - 3 \cdot \text{I}) \\ \text{III:} & -2b + 9c = -6 & (\text{III} + 2 \cdot \text{I}) \\ \text{IV:} & -b + 11c - 6d = 9 & (\text{IV} + \text{I}) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{I:} & a - 3b + 4c - d = -1 & \\ \text{II:} & b - 2c + d = 1 & \\ \text{III:} & 5c + 2d = -4 & (\text{III} + 2 \cdot \text{II}) \\ \text{IV:} & 9c - 5d = 10 & (\text{IV} + \text{II}) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{I:} & a - 3b + 4c - d = -1 & \\ \text{II:} & b - 2c + d = 1 & \\ \text{III:} & 5c + 2d = -4 & \\ \text{IV:} & 43d = -86 & (9 \cdot \text{III} - 5 \cdot \text{IV}) \end{array}$$

Aus IV: $d = -2$

In III: $5c + 2 \cdot (-2) = -4 \Rightarrow c = 0$

In II: $b - 2 \cdot 0 + (-2) = 1 \Rightarrow b = 3$

In I: $a - 3 \cdot 3 + 4 \cdot 0 - (-2) = -1 \Rightarrow a = 6$

- Die erste Gleichung wird unverändert abgeschrieben. Zu den Gleichungen **II**, **III** und **IV** werden passende Vielfache von **I** addiert, sodass jeweils die Variable a wegfällt.
- Bevor wir Gleichung **II** aufschreiben, dividieren wir durch 7 ⇒ **II**. Nun wird die Variable b in allen Gleichungen unterhalb von **II** durch Addition geeigneter Vielfacher von **II** eliminiert.
- Gleichung **III** wird abgeschrieben und c in **IV** eliminiert.
- Das System hat Dreiecksform und die Lösung für d kann einfach berechnet werden.
- Nun wird von unten nach oben aufgelöst: Einsetzen des Ergebnisses für d in die vorletzte Zeile (**III**) ergibt die Lösung für c. Einsetzen der Lösung von c und d in **II** ergibt b, usw.

Die Gleichungen und die Reihenfolge der Variablen dürfen auch vertauscht werden, sodass die erste Gleichung (wenn möglich) mit dem Koeffizienten 1 beginnt. Achte darauf, dass gleiche Variablen untereinander stehen.

Lösbarkeit von Gleichungssystemen

Ein lineares Gleichungssystem kann keine Lösung, eine Lösung oder unendlich viele Lösungen haben. Es ist eindeutig lösbar, wenn genau so viele voneinander unabhängige und widerspruchsfreie Gleichungen wie Variablen gegeben sind. Gleichungen sind **linear unabhängig** voneinander, wenn keine Gleichung ein Vielfaches einer anderen Gleichung oder eine Kombination der anderen Gleichung ist. Sonst nennt man sie **linear abhängig** voneinander. Mithilfe der Werte der Determinanten kann auf die Anzahl der Lösungen geschlossen werden. Dies gilt auch für größere Systeme.

Lineare Gleichungssysteme sind dann eindeutig lösbar, wenn die Determinante der quadratischen Koeffizientenmatrix von 0 verschieden ist, also $D \neq 0$ gilt.

Bei einem linearen Gleichungssystem mit drei Unbekannten hängt die Anzahl der Lösungen (geometrisch gesehen) von der Lage der drei Ebenen zueinander ab.

Eindeutige Lösung	Keine Lösung	Unendlich viele Lösungen
$D \neq 0$	$D = 0$, mindestens eine von D_x, D_y, $D_z \neq 0$	$D = D_x = D_y = D_z = 0$

Technologieeinsatz: Cramer'sche Regel

TI-Nspire

Die Eingabe einer Matrix im **Calculator** kann mithilfe der Tastenkombination ctrl menu 8 über **Mathematische Vorlagen** erfolgen, indem man das Matrix-Symbol wählt. Es öffnet sich ein Eingabefeld, in dem die gewünschte Anzahl der Zeilen und der Spalten eingegeben werden kann. Die Elemente der Matrix können anschließend in die Vorlage eingesetzt werden.

Eine Matrix kann auch mithilfe von eckigen Klammern ctrl (eingegeben werden. Jede Zeile muss innerhalb der Hauptklammern in eckigen Klammern eingeschlossen sein, die Trennung der Spaltenelemente erfolgt innerhalb der Zeile durch einen Beistrich.

a:=[[-1,2,0][3,1,-1]]

Excel: www.verlaghpt.at

Die Determinante einer quadratischen Matrix erhält man mit dem Befehl **det(**.

6.83 Löse das folgende Gleichungssystem mit Technologieeinsatz:

I: $3x + 4y - 2z = 15$
II: $4x - y + 3z = 28{,}7$
III: $5x + 2y - 6z = 10{,}2$

B

Lösung:

- Eingabe der Koeffizientenmatrix **a**, sowie der Matrizen **ax**, **ay** und **az**

$a := \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -6 \end{bmatrix}$, $ax := \begin{bmatrix} 15 & 4 & -2 \\ 28.7 & -1 & 3 \\ 10.2 & 2 & -6 \end{bmatrix}$, $ay := \begin{bmatrix} 3 & 15 & -2 \\ 4 & 28.7 & 3 \\ 5 & 10.2 & -6 \end{bmatrix}$, $az := \begin{bmatrix} 3 & 4 & 15 \\ 4 & -1 & 28.7 \\ 5 & 2 & 10.2 \end{bmatrix}$

- Ermitteln der Unbekannten mithilfe der Cramer'schen Regel

$x := \frac{\det(ax)}{\det(a)}$ 5.2
$y := \frac{\det(ay)}{\det(a)}$ 1.4
$z := \frac{\det(az)}{\det(a)}$ 3.1

Lösung: $x = 5{,}2$; $y = 1{,}4$; $z = 3{,}1$

Lineare Gleichungssysteme

Aufgaben 6.84 – 6.87: Löse die Gleichungssysteme.

B **6.84**

a) $\begin{array}{ll} \text{I:} & 2x + 3y - z = -3 \\ \text{II:} & -5x + 7y + 4z = 25 \\ \text{III:} & x - 2y + 3z = 2 \end{array}$ **b)** $\begin{array}{ll} \text{I:} & 4x + 2y - z = 1 \\ \text{II:} & 5x - 3y + 2z = -12 \\ \text{III:} & -2x + y - 3z = 2 \end{array}$ **c)** $\begin{array}{ll} \text{I:} & 2a - 3b - c = 10 \\ \text{II:} & -3a - 4b + 2c = -4 \\ \text{III:} & 5a + 2b - 3c = 8 \end{array}$

B **6.85**

a) $\begin{array}{ll} \text{I:} & -5x + y - 2z = -29 \\ \text{II:} & x + 4y + 3z = 3 \\ \text{III:} & 2x - 3y + z = 26 \end{array}$ **b)** $\begin{array}{ll} \text{I:} & 3I_1 + I_2 - I_3 = 8 \\ \text{II:} & 5I_1 - 4I_2 + 5I_3 = -18 \\ \text{III:} & -I_1 + 6I_2 - 4I_3 = 23 \end{array}$ **c)** $\begin{array}{ll} \text{I:} & 2x + y - 3z = 5 \\ \text{II:} & -5x + 3y + 2z = 14 \\ \text{III:} & -30x - 4y + 23z = 18 \end{array}$

B **6.86**

a) $\begin{array}{ll} \text{I:} & -3u + 3v - 2w = -9 \\ \text{II:} & 6u - v + 5w = 23 \\ \text{III:} & 2u - 6v - 3w = 2 \end{array}$ **b)** $\begin{array}{ll} \text{I:} & x - 2y + 4z = -15 \\ \text{II:} & -5x + 3y + 6z = 7 \\ \text{III:} & x - 5y - 2z = -27 \end{array}$ **c)** $\begin{array}{ll} \text{I:} & r + 2q = 10 \\ \text{II:} & -2r + p - q = -11 \\ \text{III:} & 3r - 2p - 3q = 0 \end{array}$

B **6.87**

a) $\begin{array}{ll} \text{I:} & 3x + 2y - z = -4 \\ \text{II:} & y + z = 1 \\ \text{III:} & -4x - y + 2z = 4 \end{array}$ **b)** $\begin{array}{ll} \text{I:} & a + 2b - 3c = -3 \\ \text{II:} & 4a + 2c = 10 \\ \text{III:} & 3b + 5c = 2 \end{array}$ **c)** $\begin{array}{ll} \text{I:} & y - 2z = 6 \\ \text{II:} & -x - 2y + z = -3 \\ \text{III:} & 4x - y = -14 \end{array}$

B **6.88** Bestimme die erweiterte Matrix A_{erw} und die Matrizen A_x, A_y und A_z.

a) $\begin{array}{ll} \text{I:} & 3x + 7y - z = 12 \\ \text{II:} & -5y + 2z = -4 \\ \text{III:} & -2x - 6z = 18 \end{array}$ **b)** $\begin{array}{ll} \text{I:} & -8x - 3y + 13 = 0 \\ \text{II:} & -x + 6y - 7z = -2 \\ \text{III:} & y + 4z = -14 \end{array}$ **c)** $\begin{array}{ll} \text{I:} & 2x + y = 10 - 3z \\ \text{II:} & -y = x + 2z - 4 \\ \text{III:} & 3x + 5z = 0 \end{array}$

B **6.89** Berechne die Determinante der gegebenen Matrix.

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 1 & -8 & 2 \\ 3 & 4 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -2 & 1 \end{pmatrix}$ **d)** $D = \begin{pmatrix} 2{,}2 & -2 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \\ 0{,}25 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

B **6.90** Von einem linearen Gleichungssystem mit drei Unbekannten ist die erweiterte Matrix gegeben. Berechne die Lösung mithilfe der Cramer'schen Regel.

a) $\begin{pmatrix} -5 & 4 & -2 & 1 \\ 10 & 6 & -1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -2 & 12 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 & 9 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & 2 & 11 \end{pmatrix}$

B **6.91** Löse das Gleichungssystem mit Technologieeinsatz (Cramer'sche Regel).

a) $\begin{array}{ll} \text{I:} & 25x + 17y - 8z = 114 \\ \text{II:} & -12x - 16y + 13z = 58 \\ \text{III:} & 41x - 23y + 2z = -4 \end{array}$ **b)** $\begin{array}{ll} \text{I:} & 18{,}2a - 14{,}6b + 0{,}8c = 0{,}12 \\ \text{II:} & 23{,}8a + 8{,}8b - 12c = -4{,}8 \\ \text{III:} & 0{,}76a - 2{,}5b - 7{,}9c = -12{,}43 \end{array}$

Aufgaben 6.92 – 6.93: Löse jeweils mithilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens.

B **6.92**

a) $\begin{array}{ll} \text{I:} & x - 3y + 4z = 7 \\ \text{II:} & -2x + 4y - z = 5 \\ \text{III:} & 4x + 2y + 3z = 3 \end{array}$ **b)** $\begin{array}{ll} \text{I:} & 2a - b + 5c = 5 \\ \text{II:} & a + 3b - 4c = 2 \\ \text{III:} & -5a - 2b + c = -17 \end{array}$

B **6.93**

a) $\begin{array}{ll} \text{I:} & a + 2b - 5c + d = 7 \\ \text{II:} & -a - b + 3c - 2d = -5 \\ \text{III:} & 4a - 3b + c + 3d = -5 \\ \text{IV:} & -3a + 4b - 2c + d = 10 \end{array}$ **b)** $\begin{array}{ll} \text{I:} & -3a - b + 2c - 4d = -1 \\ \text{II:} & 2a + 2b - c + 3d = -3 \\ \text{III:} & a - 2b + 4c - d = 12 \\ \text{IV:} & 5a + 3b + c - 2d = 2 \end{array}$

Aufgaben 6.94 – 6.96: Löse die Gleichungssysteme. Wähle jeweils die Methode selbst und dokumentiere deine Vorgehensweise.

6.94 BC

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & a + 2c = 2 \\ \text{II:} & 2b - c + d = 1 \\ \text{III:} & 2a - 3b = 7 \\ \text{IV:} & -4c + 3d = 9 \end{array}$$

Lösung:
Kommen bei einem Gleichungssystem nicht alle Variablen in jeder Gleichung vor (die Koeffizientenmatrix ist „schwach besetzt"), so können für das Lösen das Einsetzungs- und das Additionsverfahren kombiniert werden.

Aus I: I*: $a = 2 - 2c$
Aus II: II*: $d = 1 - 2b + c$
III: $2 \cdot (2 - 2c) - 3b = 7$
IV: $-4c + 3 \cdot (1 - 2b + c) = 9$

III: $-3b - 4c = 3$
IV: $-6b - c = 6$

IV − 2 · III: $7c = 0 \Rightarrow c = 0$
$b = -1,\ a = 2,\ d = 3$

I* und II* werden in die Gleichungen III und IV eingesetzt.
Das Gleichungssystem kann dann zum Beispiel mit dem Additionsverfahren gelöst werden.
Die Lösung für c wird in III eingesetzt, es ergibt sich die Lösung für b.
b und c werden in I* und II* eingesetzt. Damit können a und d berechnet werden.

6.95 BC

a) $\begin{array}{ll} \text{I:} & x + y = -1 \\ \text{II:} & 2x - z = -5 \\ \text{III:} & y - 2z = 4 \end{array}$

b) $\begin{array}{ll} \text{I:} & -3m - 2n = -9 \\ \text{II:} & k + m - 4n = -6 \\ \text{III:} & -2l - m = 3 \\ \text{IV:} & 2k + 3l = 4 \end{array}$

c) $\begin{array}{ll} \text{I:} & w + x + z = 7 \\ \text{II:} & 2y + 5z = 3 \\ \text{III:} & 3w - 4z = 2 \\ \text{IV:} & w - 2y - 3z = 1 \end{array}$

d) $\begin{array}{ll} \text{I:} & 2a - c + 2d = 9 \\ \text{II:} & 3b + 2e = 11 \\ \text{III:} & -2c - 5d = 1 \\ \text{IV:} & 2a + e = 2 \\ \text{V:} & -b + 5d = 0 \end{array}$

6.96 BC

a) $\begin{array}{ll} \text{I:} & x : y = 2 : 1 \\ \text{II:} & y : z = 3 : 4 \\ \text{III:} & x - 2y + z = 2 \end{array}$

b) $\begin{array}{ll} \text{I:} & x + 2z = 10 \\ \text{II:} & y : z = 3 : 2 \\ \text{III:} & 2x - y + 3z = 18 \end{array}$

c) $\begin{array}{ll} \text{I:} & a : b : c = 7 : 5 : 10 \\ \text{II:} & a + b + c = 110 \end{array}$
Hinweis: Teile die Proportion.

Aufgaben 6.97 – 6.98: Bestimme jeweils die Definitionsmenge und löse die Gleichungssysteme durch Substitution.

6.97 B

a) $\begin{array}{ll} \text{I:} & \frac{2}{x} - \frac{6}{y} + \frac{1}{z} = 0 \\ \text{II:} & -\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = -\frac{17}{6} \\ \text{III:} & \frac{3}{x} - \frac{3}{y} + \frac{2}{z} = \frac{5}{2} \end{array}$

b) $\begin{array}{ll} \text{I:} & \frac{1}{a} + \frac{4}{b} - \frac{2}{c} = -\frac{1}{2} \\ \text{II:} & \frac{3}{a} + \frac{2}{b} - \frac{6}{c} = -4 \\ \text{III:} & -\frac{7}{a} - \frac{16}{b} + \frac{8}{c} = -\frac{3}{2} \end{array}$

6.98 B

a) $\begin{array}{ll} \text{I:} & \frac{2}{x+1} - \frac{3}{z+2} = 0 \\ \text{II:} & \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+2} - \frac{1}{z+2} = \frac{5}{12} \\ \text{III:} & \frac{3}{y+2} - \frac{6}{z+2} = -\frac{5}{4} \end{array}$

b) $\begin{array}{ll} \text{I:} & \frac{6}{x} + 2y - \frac{1}{z-1} = 5 \\ \text{II:} & \frac{2}{x} - y + \frac{2}{z-1} = \frac{2}{3} \\ \text{III:} & \frac{3}{x} + 4y - \frac{5}{z-1} = 4 \end{array}$

c) $\begin{array}{ll} \text{I:} & \frac{1}{x+3} + \frac{3}{y} = 2 \\ \text{II:} & \frac{4}{y} + \frac{2}{z+1} = 5 \\ \text{III:} & \frac{2}{x+3} - \frac{1}{z+1} = -\frac{3}{2} \end{array}$

6.99 BC
Von einem Gleichungssystem mit drei Variablen ist die Koeffizientenmatrix gegeben. Bestimme a so, dass es keine eindeutige Lösung gibt.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & a & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 3 & a & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ -3 & 4 & -1 \\ a & 8 & -1 \end{pmatrix}$

Lineare Gleichungssysteme

Textaufgaben

AB **6.100** Der Winkel α eines Dreiecks ist doppelt so groß wie der Winkel β. Der Winkel γ ist um 20° kleiner als β. Wie groß sind die Winkel?

AB **6.101** Der Umfang eines Dreiecks beträgt 140 cm. Die Längen der Seiten a und b verhalten sich wie 5 : 3 und die Seite c ist doppelt so lang wie b. Wie lang sind die Seiten?

AB **6.102** Bei einem Turnier erhalten die Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die die drei ersten Plätze einnehmen, Geldpreise. Der erste und der zweite Preis machen insgesamt 16 000,00 € aus, der zweite und der dritte insgesamt 8 000,00 €, der erste und der dritte insgesamt 12 000,00 €. Wie hoch ist der Gewinn für den ersten, zweiten und dritten Platz?

AB **6.103** Drei Bagger B1, B2 und B3 werden eingesetzt, um drei gleich große Baugruben auszuheben. Bagger B1 und Bagger B2 brauchen 4 Tage, um die erste Baugrube auszuheben. Bei der zweiten Baugrube wird Bagger B2 zwei Tage allein und weitere vier Tage gemeinsam mit Bagger B3 eingesetzt, um die Baugrube auszuheben. Bei der dritten Baugrube beginnen B1 und B2, nach zwei Tagen werden sie durch B3 ersetzt und dieser hat nach vier weiteren Tagen die Aushubarbeiten beendet.
1) Wie lang benötigt jeder Bagger für das Ausheben einer Baugrube?
2) Wie lang würden alle drei gemeinsam für eine Baugrube brauchen?

AB **6.104** Eine Firma verkauft Badehosen B, Sonnenhüte S und Ventilatoren V. Nebenstehende Tabelle zeigt die Verkaufszahlen und Einnahmen von drei Monaten.
Wie viel kostet jedes Produkt?

	B	S	V	Einnahmen
Mai	50	21	2	1 876,90 €
Juni	26	0	40	4 714,00 €
Juli	0	35	17	2 064,50 €

ABC **6.105** Berechne die Stromstärken im gegebenen Schaltkreis für $U_{01} = 50$ V, $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 15\,\Omega$, $R_3 = 20\,\Omega$ und $R_4 = 18\,\Omega$. Dokumentiere deine Vorgehensweise.

U_{01} I_1 (1) I_3 I_2 R_1 (2) R_2 (3) R_3 R_4

Lösung:
Bezeichnungen: ○ Knoten ... Verzweigungen
Masche ... geschlossener Stromkreis

1. Kirchhoff'sches Gesetz (Knotenregel):
In jedem Knotenpunkt ist die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme. $\Rightarrow$ (1): $I_2 = I_1 + I_3$

2. Kirchhoff'sches Gesetz (Maschenregel):
In jedem Stromkreis ist die Summe aller Spannungen null. Gibt es eine Quellspannung, so ist sie gleich der Summe der Spannungsabfälle – Vorzeichen laut Zählrichtung.
$U = I \cdot R \Rightarrow$ (2): $U_{01} = I_1 \cdot R_1 + I_1 \cdot R_4 + I_2 \cdot R_2$ (3): $0 = I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3$

I: $0 = I_1 - I_2 + I_3$
II: $50\text{ V} = 10\,\Omega \cdot I_1 + 18\,\Omega \cdot I_1 + 15\,\Omega \cdot I_2$ $|:\Omega$
III: $0 = 15\,\Omega \cdot I_2 + 20\,\Omega \cdot I_3$ $|:\Omega$

I: $I_1 - I_2 + I_3 = 0$
II: $28\,I_1 + 15\,I_2 = 50$ A
III: $15\,I_2 + 20\,I_3 = 0$

II – 28 I: $43\,I_2 - 28\,I_3 = 50$ A
III: $3\,I_2 + 4\,I_3 = 0$

$64\,I_2 = 50$ A $\Rightarrow$ $I_2 \approx 0{,}78$ A
$I_1 \approx 1{,}37$ A; $I_2 \approx 0{,}78$ A; $I_3 \approx -0{,}59$ A

6.106 Berechne die Stromstärken im Schaltkreis. Erkläre, wie man die Gleichungen erhält. ABD

a) $U_{01} = 120$ V, $R_1 = 25\ \Omega$, $R_2 = 60\ \Omega$, $R_3 = 45\ \Omega$ ***b)*** $U_{01} = 12$ V, $R_1 = 4\ \Omega$, $R_2 = 8\ \Omega$, $R_3 = 5\ \Omega$

a)
I: $I_1 = I_2 + I_3$
II: $0 = I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2$
III: $-U_{01} = -I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3$

b)
I: $I_2 = I_1 + I_3$
II: $U_{01} = I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2$
III: $0 = -I_2 \cdot R_2 - I_3 \cdot R_3$

6.107 Stelle die Gleichungen der Schaltkreise auf und berechne danach die Stromstärken. AB

a) $U_{01} = 24$ V, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 6\ \Omega$, $R_3 = 12\ \Omega$, $R_4 = 5\ \Omega$

b) $U_{01} = 230$ V, $U_{02} = 115$ V, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 40\ \Omega$, $R_3 = 120\ \Omega$, $R_4 = 45\ \Omega$, $R_5 = 40\ \Omega$

Zusammenfassung

Eine Gleichung der Form **a · x + b · y = c** heißt **lineare Gleichung mit zwei Variablen**.

Ein System aus zwei (oder mehr) linearen Gleichungen mit zwei (oder mehr) Variablen heißt **lineares Gleichungssystem** mit zwei (oder mehr) Variablen.

Allgemeine Form:
I: $a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y = b_1$
II: $a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y = b_2$

bzw.

I: $a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + a_{13} \cdot z = b_1$
II: $a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + a_{23} \cdot z = b_2$
III: $a_{31} \cdot x + a_{32} \cdot y + a_{33} \cdot z = b_3$

Ein rechteckiges Schema mit Zeilen und Spalten heißt **Matrix**.
Jeder quadratischen Matrix wird ein eindeutiger Wert, die **Determinante** det(A), zugeordnet.

Determinante einer (2,2)-Matrix: $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Determinante einer (3,3)-Matrix: Regel von Sarrus

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

(Diagonalen von links oben nach rechts unten: + + +; von links unten nach rechts oben: − − −)

Lösungsverfahren:
Grafisches Lösungsverfahren, Gleichsetzungs-, Einsetzungs-, (Gauß'sches) Eliminationsverfahren, Cramer'sche Regel $\left(D \neq 0:\ x = \frac{D_x}{D},\quad y = \frac{D_y}{D},\quad \left(z = \frac{D_z}{D}\right)\right)$

Lineare Gleichungssysteme können keine Lösung, eine eindeutige Lösung oder unendlich viele Lösungen haben. Dies erkennt man an den Werten der Determinanten.

Lineare Gleichungssysteme

Weitere Aufgaben

BC **6.108** Bestimme die Lösungen grafisch.

1) $2x - y = 4$, $G = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ **2)** $2x - y = 4$, $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ **3)** $2x - y = 4$, $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

BC **6.109** Löse grafisch und überprüfe mit dem Gleichsetzungsverfahren.

a) $\begin{array}{ll} \text{I:} & 2y = -5 \\ \text{II:} & 3x + y = 0{,}5 \end{array}$ **b)** $\begin{array}{ll} \text{I:} & -x + y = 2 \\ \text{II:} & x - 3y = 6 \end{array}$ **c)** $\begin{array}{ll} \text{I:} & \frac{3}{2}x + y = 1 \\ \text{II:} & x + \frac{2}{3}y = 2 \end{array}$

B **6.110** Löse mit dem Einsetzungsverfahren oder mit der Eliminationsmethode.

a) $\begin{array}{ll} \text{I:} & a : b = 2 : 5 \\ \text{II:} & 3a - b = 6 \end{array}$ **b)** $\begin{array}{ll} \text{I:} & -2{,}5x + 4y = 1 \\ \text{II:} & x - 1{,}4y = 0{,}4 \end{array}$ **c)** $\begin{array}{ll} \text{I:} & 12x - 7y = 47 \\ \text{II:} & -5x - 13y = 60 \end{array}$ **d)** $\begin{array}{ll} \text{I:} & 2x = -6 \\ \text{II:} & 4x + 7y = 30 \end{array}$

B **6.111** Berechne die Determinante.

a) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 12 & 5 & -2 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ **b)** $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ **c)** $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 \\ 5 & \frac{2}{3} & 4 \end{pmatrix}$ **d)** $K = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$

BD **6.112** Von einem Gleichungssystem ist die Koeffizientenmatrix gegeben. Ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar? Begründe deine Antwort.

a) $A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & 4 \\ \frac{1}{2} & -5 \end{pmatrix}$ **b)** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ \frac{1}{8} & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ **c)** $A = \begin{pmatrix} 2{,}5 & -1{,}2 \\ 5 & 2{,}4 \end{pmatrix}$ **d)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ \frac{1}{4} & 2 & -1 \\ -2 & 8 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Aufgaben 6.113 – 6.114: Von Gleichungssystemen sind die erweiterten Matrizen gegeben. Berechne die gesuchten Variablen mithilfe der Cramer'schen Regel.

BC **6.113** **a)** $A_{erw} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$, $x = ?$ **b)** $A_{erw} = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 0 \\ -4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, $y = ?$

BC **6.114** **a)** $A_{erw} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & -6 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $z = ?$ **b)** $A_{erw} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 5 \\ -5 & 0 & 2 & \frac{11}{2} \\ 0 & 4 & -3 & -10 \end{pmatrix}$, $y = ?$

Aufgaben 6.115 – 6.116: Löse die Gleichungssysteme. Wähle jeweils die Methode selbst.

B **6.115** **a)** $\begin{array}{ll} \text{I:} & 2{,}2x - 1{,}8y = 6{,}374 \\ \text{II:} & 1{,}4x + 3{,}1y = -4{,}647 \end{array}$ **c)** $\begin{array}{ll} \text{I:} & 2x - \frac{2}{y} = -2 \\ \text{II:} & -5x + \frac{3}{y} = 4 \end{array}$ **e)** $\begin{array}{ll} \text{I:} & -\frac{3}{a} + \frac{4}{b} = 7 \\ \text{II:} & \frac{5}{a} - \frac{2}{b} = -\frac{11}{3} \end{array}$

b) $\begin{array}{ll} \text{I:} & -\frac{2x - y}{4} - \frac{x - 2y}{3} = -\frac{10}{3} \\ \text{II:} & \frac{x - y}{4} + \frac{2x + 3y}{3} = 1 \end{array}$ **d)** $\begin{array}{ll} \text{I:} & (r + 2)^2 - 4s = (r - 3) \cdot (r + 4) + 2 \cdot (r + s) \\ \text{II:} & -3 \cdot (r - s) + 5r = 4 \cdot (r + 8) - 9s \end{array}$

B **6.116** **a)** $\begin{array}{ll} \text{I:} & -3a + 2b - c = 4 \\ \text{II:} & 2a - 3b + 4c = -\frac{39}{4} \\ \text{III:} & a + 6b - 2c = 5 \end{array}$ **c)** $\begin{array}{ll} \text{I:} & F_1 + F_2 - F_3 = 35 \\ \text{II:} & 2F_1 - 3F_2 + F_3 = -25 \\ \text{III:} & -3F_1 + 5F_2 - 2F_3 = 35 \end{array}$ **e)** $\begin{array}{ll} \text{I:} & -\frac{2}{x} + y - \frac{3}{z + 2} = -1 \\ \text{II:} & \frac{4}{x} - 2y - \frac{2}{z + 2} = -\frac{2}{3} \\ \text{III:} & -\frac{1}{x} - 3y - \frac{6}{z + 2} = 3 \end{array}$

b) $\begin{array}{ll} \text{I:} & u + 2v - 4w = -6 \\ \text{II:} & -3u + 3v + w = 2 \\ \text{III:} & 8u - 2v - 10w = 14 \end{array}$ **d)** $\begin{array}{ll} \text{I:} & -5x + y - 2z = -7 \\ \text{II:} & 3x - 2y + 3z = 14 \\ \text{III:} & 12x - y + 3z = 7 \end{array}$ **f)** $\begin{array}{ll} \text{I:} & (a - b) : (a + b) : c = 2 : 6 : 5 \\ \text{II:} & 2a + 3b - c = 9 \end{array}$

Textaufgaben

6.117 Mischt man 12 %igen Ethanol mit Wasser, so erhält man 14 Liter 8 %igen Ethanol. Wie viel Ethanol und Wasser wurden gemischt? AB

6.118 Eine Mutter kauft zu Schulbeginn für ihre Kinder Blöcke und Hefte ein. Sie bezahlt 14,20 €. Wie viele Blöcke und Hefte hat sie gekauft, wenn ein Block 1,40 € und ein Heft 50 Cent kostet? Gib alle Möglichkeiten an. Überlege und begründe, welche Möglichkeit deiner Meinung nach am ehesten der Realität entspricht. ABD

6.119 Ein IC (Intercity-Zug) und ein EC (Eurocity-Zug) fahren vom selben Bahnhof in dieselbe Richtung ab. Der IC fährt um 8:20 Uhr ab, der EC um 8:35 Uhr. Da der EC im Mittel um 30 $\frac{km}{h}$ schneller fährt, wird er den IC überholen. Dies soll um 9:10 Uhr in einem Bahnhof geschehen. AB

1) Wie schnell fahren die Züge im Mittel?
2) Wie weit ist der Bahnhof, in dem der EC überholt, vom Abfahrtsbahnhof entfernt?

6.120 Eine Baufirma besitzt unter anderem drei Kipper K1, K2 und K3 mit unterschiedlichen Nutzlasten. Fährt K1 dreimal und K2 zweimal, so können 45 Tonnen transportiert werden. Mit einer Fahrt von K1 und vier Fahrten von K3 können 83 Tonnen verladen werden. Werden zwei Fahrten mit K1, drei mit K2 und eine mit K3 durchgeführt, so beträgt die Gesamtlast 69 Tonnen. Wie groß sind die Nutzlasten jedes Kippers? AB

6.121 Ein Aquarium wird frisch befüllt. Dazu wird 46 Minuten lang kaltes Wasser eingelassen, danach noch 8 Minuten lang kaltes und warmes Wasser gleichzeitig aus zwei verschiedenen Zuflüssen. Nach einer Woche wird das Wasser aufgefrischt. Dazu werden 35 % des Wassers ausgelassen und zwölf Minuten mit Warm- und Kaltwasser gleichzeitig frisch befüllt. AB

1) Wie lang dauert das Befüllen, wenn nur Kalt- bzw. nur Warmwasser eingefüllt wird?
2) Wie viel Liter fasst das Aquarium, wenn die Durchflussmenge des Kaltwassers 0,125 Liter pro Sekunde beträgt?

6.122 Ein Dreieck hat einen Umfang von 36 cm. Die Seitenlängen b und c verhalten sich wie 4 : 5. Wird die Seite a um 3 cm verlängert, so ist sie gleich lang wie b. ABC

1) Wie lang sind die Seiten des ursprünglichen Dreiecks?
2) Welches Dreieck ist entstanden?

6.123 Eine Fußgängerin und ein Radfahrer gehen bzw. fahren einander auf einer Strecke von 10 km entgegen. Der Radfahrer fährt 20 Minuten, nachdem sich die Fußgängerin mit einer mittleren Geschwindigkeit von 5 $\frac{km}{h}$ auf den Weg gemacht hat, mit einer mittleren Geschwindigkeit von 20 $\frac{km}{h}$ ab. AB

1) Berechne, wann und wo sie einander treffen.
2) Zeichne das Weg-Zeit-Diagramm der Fußgängerin und das des Radfahrers in ein Koordinatensystem. Beachte, dass sie einander entgegenfahren, also eine der beiden Geschwindigkeiten negativ anzusehen ist.

AB **6.124** Für Zweitaktmotoren von Mopeds müssen Benzin-Öl-Gemische von 50 : 1 bzw. 25 : 1 getankt werden. Zwei Freunde betanken ihre Mopeds, Thomas tankt 10 Liter des 50 : 1-Gemischs und bezahlt 15,98 €, Stefan bezahlt für 8 Liter des 25 : 1-Gemischs 14,08 €.
1) Wie viel Liter Benzin bzw. Öl tankt jeder?
2) Wie teuer ist ein Liter Benzin bzw. ein Liter Öl?

AB **6.125** Für die Neuanschaffung einer Maschine wird ein Kredit in der Höhe von 200 000,00 € aufgenommen. Der Betrag wird auf zwei Banken aufgeteilt, wobei Bank A Kreditzinsen von 6 % und Bank B 8 % verlangen. Die Jahreszinsen betragen 13 600,00 € bei jährlicher Abrechnung und ohne Berücksichtigung bereits zurückgezahlter Beträge. Wie viel Geld wurde bei Bank A bzw. bei Bank B ausgeliehen?

Aufgaben aus Naturwissenschaft und Technik

AB **6.126** Bei einer Serienschaltung verhalten sich die beiden Widerstände R_1 und R_2 wie 1 : 4. Der Gesamtwiderstand R beträgt 25 Ω. Wie groß sind die Widerstände? Hinweis: $R = R_1 + R_2$

AB **6.127** Eine Mutter und ihr Sohn sitzen auf einer Wippschaukel. Die Mutter hat um 25 kg mehr Masse als ihr Sohn. Durch Änderung der Sitzposition können sie die Schaukel im Gleichgewicht halten. Berechne die Masse der Mutter und die des Sohns.

M
S
2 m
3 m

B **6.128** Berechne die Auflagerkräfte F_A und F_B zuerst allgemein, dann mit den gegebenen Werten.
$F_1 = 40$ N, $F_2 = 80$ N, $\ell_1 = 1$ m, $\ell_2 = 2$ m, $\ell = 4$ m

F_1
F_2
F_A
ℓ_1
ℓ_2
ℓ
F_B

Hinweis: Verwende die Gleichgewichtsbedingungen:

I: $\Sigma M_a = 0: -F_1 \cdot \ell_1 - F_2 \cdot (\ell_1 + \ell_2) + F_B \cdot \ell = 0$ Summe der Momente im Auflager A ist null. Moment = Kraft · Abstand, positiv bei Drehung gegen den Uhrzeigersinn.

II: $\Sigma F_y = 0: F_A - F_1 - F_2 + F_B = 0$ Summe der Kräfte in y-Richtung ist null.

AB **6.129** Berechne die Auflagerkräfte. Verwende den Hinweis aus 6.128.

a) $F = 10$ kN
$\ell_1 = 2$ m
$\ell = 3$ m

b) $F = 400$ N
$\ell_1 = 2{,}5$ m
$\ell = 4$ m

F
F_A
ℓ_1
ℓ
F_B

c) $F_1 = 3$ kN
$F_2 = 3\,500$ N
$F_3 = 500$ N
$\ell_1 = \ell_2 = 1$ m
$\ell_3 = 1{,}5$ m
$\ell = 5$ m

F_1
F_2
F_3
F_A
ℓ_1
ℓ_2
ℓ_3
ℓ
F_B

Wissens-Check

		gelöst
1	Wie viele Lösungen hat eine lineare Gleichung mit zwei Variablen mit der Grundmenge $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$?	
2	Ich kann Verfahren zum Lösen von linearen Gleichungssystemen aufzählen.	
3	Ich kann die Lösung eines linearen Gleichungssystems grafisch darstellen.	
4	Entscheide: Liegen die zugehörigen Geraden eines linearen Gleichungssystems parallel zueinander, so gibt es A) unendlich viele Lösungen. B) keine Lösung.	
5	Welches der Lösungsverfahren ist für die folgenden Gleichungssysteme wahrscheinlich am besten geeignet? Begründe deine Antwort. A) I: $y = 3x - 1$ II: $2x - y = 4$ B) I: $3a + 2b = 5$ II: $a - 2b = 3$ C) I: $y = 0{,}5x + 2$ II: $y = 0{,}75x - 8$	
6	Welches der unten stehenden linearen Gleichungssysteme ist nach allen Variablen eindeutig lösbar? Warum sind es die anderen nicht? A) I: $3x - 8y + 2z = 4$ II: $2x + 3y - 7z = -1$ B) I: $2a + 3b - 2c = 13$ III: $-a + b + 3c = 19$ II: $4a - 5b + c = 8$ C) I: $4d + 2e - 3f = -6$ II: $8d + 4e - 6f = -12$ III: $3e + 7f = 9$	
7	Ich weiß, was eine Matrix ist und wie man eine Determinante berechnet.	
8	Gib an, welche der folgenden Aussagen richtig sind und erkläre, warum die anderen falsch sind. A) Die Lösungen einer linearen Gleichung in zwei Variablen lassen sich bei einer Grundmenge von $G = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ als Gerade in einem Koordinatensystem darstellen. B) Bei der Eliminationsmethode müssen die Koeffizienten einer Variablen gleich oder gegengleich sein. C) Beim Berechnen der Determinante einer Matrix werden die Produkte der Elemente der Hauptdiagonale zu denen der Elemente der Nebendiagonale addiert. D) Beim Gleichsetzungsverfahren kann man eine Variable weglassen. E) Um ein lineares Gleichungssystem eindeutig lösen zu können, muss die Determinante der Koeffizientenmatrix von Null verschieden sein. F) Bei Mischungsaufgaben ist es nicht erlaubt, die Prozentsätze zu addieren bzw. zu subtrahieren.	

Lösung:
1) unendlich viele 2) Grafisch; Gleichsetzungs-, Einsetzungs-, Eliminationsverfahren; Cramer'sche Regel; Gauß'sches Eliminationsverfahren 3) siehe Seiten 224 – 225 4) B 5) siehe Seiten 225ff.
6) B ist eindeutig lösbar; A nicht, weil eine Gleichung fehlt; C nicht, weil Gleichung II ein Vielfaches von Gleichung I ist
7) siehe Seiten 227 – 229 8) A) Falsch, weil dafür die Grundmenge $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sein muss. B) Richtig.
C) Falsch, weil subtrahiert werden muss. D) Falsch, weil das Weglassen einer Variablen zu keinem Lösungspaar führt.
E) Richtig. F) Richtig.

7 Trigonometrie

Bei vielen naturwissenschaftlichen Berechnungen lassen sich auftretende geometrische Zusammenhänge auf rechtwinklige Dreiecke zurückführen. Auch bei der Planung von Gebäuden oder der Geländevermessung kann man auf diese Weise arbeiten. Mithilfe von geeigneten Skizzen kann man solche Gegebenheiten in Form von rechtwinkligen Dreiecken darstellen und zum Beispiel Steigungswinkel ermitteln. Die **Trigonometrie** („Dreiecksmessung") befasst sich mit den Zusammenhängen zwischen Winkeln und Seiten von Dreiecken. In diesem Band beschränken wir uns auf die Anwendungen in rechtwinkligen Dreiecken.

7.1 Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck

BCD **7.1** Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck mit $\alpha = 35°$ in beliebiger Größe.

1) Miss die längere Kathete und die Hypotenuse ab, berechne das Verhältnis $\frac{\text{längere Kathete}}{\text{Hypotenuse}}$. Vergleiche dein Ergebnis mit den Ergebnissen deiner Mitschülerinnen und Mitschüler.

2) Miss auch die kürzere Kathete, berechne das Verhältnis $\frac{\text{kürzere Kathete}}{\text{Hypotenuse}}$ und vergleicht.

3) Formuliere mit eigenen Worten, was der Vergleich jeweils zeigt.

Wir betrachten die Seiten des in Abb. 7.1 dargestellten rechtwinkligen Dreiecks in Bezug auf ihre jeweiligen Lagen zu den Winkeln α und β:

Abb. 7.1

- Die Kathete a liegt **gegen**über von α. Sie wird als **Gegenkathete** von α bezeichnet.
- Die Kathete b liegt am Winkel α **an** und wird als **Ankathete** von α bezeichnet.
- Analog ist für den Winkel β die Seite b die Gegenkathete und a die Ankathete.
- Dem rechten Winkel gegenüber liegt die längste Seite c, die **Hypotenuse**.

Abb. 7.2

Wir betrachten allgemein die **ähnlichen Dreiecke** ABC und $A_1B_1C_1$ mit dem Winkel $\alpha = \alpha_1$ in Abb. 7.2. Mithilfe des **Strahlensatzes** erkennt man folgende Beziehungen:

$\frac{a}{c} = \frac{a_1}{c_1} = \frac{\text{Gegenkathete von }\alpha}{\text{Hypotenuse}}$, $\frac{b}{c} = \frac{b_1}{c_1} = \frac{\text{Ankathete von }\alpha}{\text{Hypotenuse}}$

und $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{\text{Gegenkathete von }\alpha}{\text{Ankathete von }\alpha}$

Diese Verhältnisse ändern sich nicht, wenn sich die Größe der Dreiecke ändert. Sie sind ausschließlich von der Größe des Winkels abhängig.

Es werden folgende Bezeichnungen und Abkürzungen verwendet:

$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von }\alpha}{\text{Hypotenuse}}$ sprich: „**Sinus** von alpha"

$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von }\alpha}{\text{Hypotenuse}}$ „**Cosinus** von alpha"

$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von }\alpha}{\text{Ankathete von }\alpha}$ „**Tangens** von alpha"

Die Werte $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ und $\tan(\alpha)$ ergeben sich durch Division zweier Längen. Sie sind daher dimensionslose Verhältniszahlen, also Zahlen ohne Einheiten.

Manchmal wird für das Verhältnis $\frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$ die Bezeichnung $\cot(\alpha)$ [sprich: „Cotangens von alpha“] verwendet. Da dieses Verhältnis der Kehrwert des Verhältnisses $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$ ist, kann es auch einfach als Kehrwert des Tangens, also $\frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$, berechnet werden.

Die oben festgelegten Seitenverhältnisse legen für jeden Winkel α genau einen Wert fest. Es handelt sich dabei um Funktionen, die als **Sinusfunktion**, **Cosinusfunktion** und **Tangensfunktion** bezeichnet werden. Man nennt diese Funktionen **Winkelfunktionen**, **Kreisfunktionen** oder **trigonometrische Funktionen**. Häufig wird anstelle der für Funktionen exakten Schreibweise $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ bzw. $\tan(\alpha)$ vereinfachend $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ bzw. $\tan\alpha$ geschrieben.

Die Größen der Winkel im rechtwinkligen Dreieck liegen zwischen 0° und 90°. Die oben angeführten Festlegungen gelten für Winkel aus diesem Bereich. Erst in Band 2 werden wir die Winkelfunktionen auch für beliebige Winkel definieren.

Berechnung des Winkels aus dem Seitenverhältnis

Jedem Winkel α kann genau ein Seitenverhältnis $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$, also genau ein Wert $\sin(\alpha)$ zugeordnet werden: $\alpha \mapsto \sin(\alpha)$. Natürlich kann umgekehrt der Wert x des Seitenverhältnisses $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ vorgegeben sein und diesem wird eindeutig ein spitzer Winkel α zugeordnet.
Auch diese Zuordnung ist eine Funktion, die **Arcussinusfunktion**. Sie ist die Umkehrung der Sinusfunktion und wir schreiben $\alpha = \arcsin(x)$.

Analog gibt es zu den Zuordnungen $\alpha \mapsto \cos(\alpha)$ bzw. $\alpha \mapsto \tan(\alpha)$ eine Umkehrung:

$\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \mapsto \alpha$ … **Arcuscosinusfunktion**; $x = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$, $\alpha = \arccos(x)$

$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \mapsto \alpha$ … **Arcustangensfunktion**; $x = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$, $\alpha = \arctan(x)$

Ist zum Beispiel der Wert von $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{4\text{ cm}}{8\text{ cm}} = 0{,}5$, so beträgt der Winkel $\alpha = 30°$ und wir schreiben $\arcsin(0{,}5) = 30°$.

Da bei den Seitenverhältnissen $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ bzw. $\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ stets der Nenner größer als der Zähler ist, liegen deren Werte zwischen 0 und 1. Zum Beispiel ist daher $\arcsin(2)$ nicht sinnvoll.

Die **Arcusfunktionen** sind die Umkehrungen der Winkelfunktionen.

Die Berechnung der Winkelfunktionswerte bzw. der Winkel führen wir mit dem Taschenrechner durch. Die meisten Taschenrechner haben eigene Tasten für Sinus, Cosinus und Tangens. Für den Cotangens gibt es meist keine eigene Taste. Die Arcusfunktionen sind meistens mit $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ und $\tan^{-1}$ beschriftet. Beachte, dass der Exponent (–1) hier nicht den Kehrwert des Funktionswerts angibt, sondern für die Umkehrung der Zuordnungsrichtung steht.

ZB TI-30: sin(30°): [sin] [3] [0] [)] [=]; arcsin(0,5): [2nd] [sin] [0] [·] [5] [)] [=]

Winkel können im Gradmaß, im Bogenmaß oder in Gon angegeben sein. Beachte daher beim Berechnen, dass am Taschenrechner das richtige Winkelmaß eingestellt ist.

Trigonometrie

Eine händische Berechnung ist mit Mitteln der höheren Mathematik zwar möglich, aber aufwändig. Selbst vor der Entwicklung des Taschenrechners wurden die Werte aus Tabellen entnommen und nicht händisch berechnet.

Beachte, dass, wie zum Beispiel bei der Wurzelberechnung, die meisten der erhaltenen Werte nur Näherungswerte sind, da reelle Zahlen im Allgemeinen nur mit begrenzter Genauigkeit angegeben werden können.

Aufgaben 7.2 – 7.3: Gib die entsprechenden Seitenverhältnisse an.

C **7.2** Verwende Abb. 7.3.
a) $\sin(\beta)$ **b)** $\cos(\alpha)$ **c)** $\tan(\alpha)$ **d)** $\tan(\beta)$ **e)** $\cos(\beta)$ **f)** $\sin(\alpha)$

A
α
c
b
β
B
a
C

Abb. 7.3

C **7.3** Verwende Abb. 7.4.
a) $\sin(\varepsilon)$ **b)** $\cos(\varepsilon)$ **c)** $\tan(\psi)$ **d)** $\tan(\varepsilon)$ **e)** $\cos(\psi)$ **f)** $\sin(\psi)$

C **7.4** Überlege, welche Winkelfunktionen durch das jeweilige Verhältnis beschrieben werden. Gib alle an, falls mehrere möglich sind.
a) Verwende Abb. 7.3. **1)** $\frac{b}{c}$ **2)** $\frac{a}{b}$ **3)** $\frac{a}{c}$ **4)** $\frac{b}{a}$
b) Verwende Abb. 7.4. **1)** $\frac{y}{x}$ **2)** $\frac{x}{z}$ **3)** $\frac{y}{z}$ **4)** $\frac{x}{y}$

y
x
ε
ψ
z

Abb. 7.4

AC **7.5** Verwende Abb. 7.5 und beantworte die Fragen.
1) Welche Strecke ist die Gegenkathete zum Winkel α?
2) Welche Strecke ist die Ankathete des Winkels γ_1?
3) c_1 ist die Ankathete welchen Winkels?
4) h ist die Ankathete welchen Winkels?
5) Mit der Gegenkathete c_1 und der Ankathete h kann der Tangens welchen Winkels berechnet werden?
6) Mit der Ankathete c_2 und der Hypotenuse b kann welche Winkelfunktion welchen Winkels berechnet werden?

c_2
α
b
c_1
h
γ_2
γ_1
β
a

Abb. 7.5

C **7.6** Verwende Abb. 7.5 und gib das Seitenverhältnis an.
a) $\sin(\beta)$ **c)** $\tan(\alpha)$ **e)** $\sin(\gamma_2)$ **g)** $\tan(\gamma_1)$
b) $\cos(\gamma_1)$ **d)** $\tan(\gamma_2)$ **f)** $\cos(\gamma_2)$ **h)** $\cos(\beta)$

C **7.7** Verwende Abb. 7.5 und gib den fehlenden Winkel an.
a) $\frac{h}{a} = \cos\ ?$ **b)** $\frac{h}{b} = \sin\ ?$ **c)** $\frac{c_2}{b} = \cos\ ?$ **d)** $\frac{c_1}{h} = \tan\ ?$ **e)** $\frac{c_2}{h} = \tan\ ?$

C **7.8** Klaus hat bei seiner Hausübung ein rechtwinkliges Dreieck irrtümlich falsch beschriftet (siehe Abb. 7.6). Wie lauten nun die gesuchten Seitenverhältnisse?
1) $\sin(\alpha)$ **2)** $\cos(\beta)$ **3)** $\tan(\alpha)$ **4)** $\sin(\beta)$

A
α
a
c
β
B
b
C

Abb. 7.6

B **7.9** Berechne mit dem Taschenrechner.
TE
a) $\sin(22°)$ **b)** $\tan(82{,}5°)$ **c)** $\cos(0{,}000\,2°)$ **d)** $\tan(45°)$ **e)** $\sin(30°)$

B **7.10** Rechne das gegebene Winkelmaß in Grad um und ermittle den Funktionswert.
TE
a) $\sin(39°12'23'')$ **b)** $\tan(79°29'1'')$ **c)** $\sin(33°21'')$ **d)** $\cos(56°52'41'')$ **e)** $\cos(8°4'2'')$

7.11 Der Winkel ist im Bogenmaß gegeben. Ermittle den Funktionswert. B TE

a) $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ **b)** $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ **c)** $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ **d)** $\sin(0{,}436)$ **e)** $\tan(1{,}309)$

7.12 Ermittle mit dem Taschenrechner die Größe des Winkels in Grad. B TE

a) $\sin(\alpha) = 0{,}5$ **c)** $\cos(\delta) = 0{,}42$ **e)** $\tan(\varphi) = 1$

b) $\sin(\beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **d)** $\cos(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ **f)** $\tan(\alpha) = \frac{1}{3}$

7.13 Zeige mithilfe von Verhältnissen, dass $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ gilt. D

7.14 **1)** Überlege und erkläre, ob das Verhältnis $\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ bzw. $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ alle Werte aus den reellen Zahlen annehmen kann. CD

2) Gib an, ob die Ermittlung der Größen der Winkel möglich ist.

A) $\cos(\alpha) = \frac{4}{5}$ B) $\sin(\beta) = \frac{8}{7}$ C) $\cos(\gamma) = 1{,}5$ D) $\sin(\delta) = 0{,}3$

7.15 Die Werte der Winkelfunktionen können für 30°, 45° und 60° aus speziellen rechtwinkligen Dreiecken genau ermittelt werden. BC

1) Welche besonderen Eigenschaften haben die in den Abbildungen 7.7 bzw. 7.8 skizzierten Dreiecke jeweils?

2) Gib an, wie die in der Tabelle eingetragenen Werte mithilfe der skizzierten Dreiecke ermittelt wurden.

3) Berechne die fehlenden Werte.

Verwende für diese Aufgabe keinen Taschenrechner.

30° a a 60° $h = \frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}$ $\frac{a}{2}$ $\frac{a}{2}$

Abb. 7.7

	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$\alpha = 30°$		$\frac{\frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	
$\alpha = 45°$	$\frac{a}{a\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$		
$\alpha = 60°$			

a a 45° 45° $a\cdot\sqrt{2}$

Abb. 7.8

7.16 Abb. 7.9 zeigt einen Einheitskreis im ersten Quadranten (vergleiche Abschnitt 4, Seite 165). Übertrage die Zeichnung in dein Heft. Wähle dabei für den Radius des Viertelkreises r = 1 Einheit = 4 cm und für den Winkel $\varphi = 30°$. BCD

1) Miss die Strecken OQ, PQ und RT ab und gib sie in Einheiten an.

2) Ermittle mithilfe deines Taschenrechners $\sin(\varphi)$, $\cos(\varphi)$ und $\tan(\varphi)$ und vergleiche die Ergebnisse mit den gemessenen Werten aus **1)**. Was fällt dir auf?

3) Überlege, mit welchen Funktionsnamen man die Strecken OQ, PQ und RT beschriften könnte.

4) Gib an, wie sich die Strecken OQ, PQ und RT verändern, wenn der Winkel φ immer größer wird. Welche maximalen Werte können sie erreichen?

5) Die Punkte O, Q und P bilden ein rechtwinkliges Dreieck. Finde mithilfe des Satzes von Pythagoras einen Zusammenhang zwischen $\sin(\varphi)$ und $\cos(\varphi)$.

y r = 1E R P φ x O Q T

Abb. 7.9

7.2 Berechnungen mit rechtwinkligen Dreiecken

7.2.1 Dreiecksberechnungen

Mithilfe der im letzten Abschnitt erarbeiteten Zusammenhänge und Formeln können von jedem rechtwinkligen Dreieck alle fehlenden Größen berechnet werden. Außerdem sind viele Figuren in rechtwinklige Dreiecke zerlegbar. Auch viele nichtgeometrische Aufgaben sind auf die Berechnung rechtwinkliger Dreiecke zurückzuführen und daher mithilfe der Trigonometrie lösbar.

BCD **7.17** Von einem rechtwinkligen Dreieck sind die Länge der Seite c = 5,70 cm und die Größe des Winkels α = 56,4° gegeben. Berechne die Längen der Seiten a und b und die Größe des Winkels β. Überlege eine Vorgehensweise und dokumentiere deine Rechenschritte.

Lösung:

Die Kathete a liegt dem Winkel α gegenüber, ist also dessen Gegenkathete. Da α gegeben ist, kann man a mithilfe der Sinusfunktion berechnen:

$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \cdot \sin(\alpha)$

$a = 5{,}7\text{ cm} \cdot \sin(56{,}4°) = 4{,}747\ldots\text{ cm} \approx 4{,}75\text{ cm}$

Die Kathete b liegt am Winkel α an, ist also dessen Ankathete. Da α gegeben ist, kann man b mithilfe der Cosinusfunktion berechnen:

$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot \cos(\alpha)$

$b = 5{,}7\text{ cm} \cdot \cos(56{,}4°) = 3{,}154\ldots\text{ cm} \approx 3{,}15\text{ cm}$

Die Winkelsumme in einem Dreieck beträgt 180°. Man erhält β durch Subtrahieren der bekannten Winkel α und 90° von 180°:

$\beta = 180° - (90° + \alpha) = 90° - \alpha = 90° - 56{,}4° = 33{,}6°$

Aufgaben 7.18 – 7.20: Fertige – falls nötig – jeweils eine Skizze an und dokumentiere deine Rechenschritte.

BC **7.18** Von einem rechtwinkligen Dreieck sind die Länge einer Seite und die Größe eines Winkels gegeben. Berechne die Längen der beiden anderen Seiten und die Größe des fehlenden Winkels.

a) c = 12 cm, α = 17° **b)** a = 37 mm, α = 33° **c)** b = 111 m, α = 29,9°

BC **7.19** Von einem rechtwinkligen Dreieck sind zwei Bestimmungsstücke gegeben. Berechne die fehlenden Seitenlängen bzw. die Größen der fehlenden Winkel.

a) w = 5,67 m, ρ = 38° **c)** u = 45,98 dm, x = 65,67 dm
b) x = 1,1 cm, ω = 72,2° **d)** w = 0,07 m, u = 0,06 m

BC **7.20** Von einem rechtwinkligen Dreieck sind die Länge einer der beiden Hypotenusenabschnitte p oder q und ein weiteres Bestimmungsstück gegeben. Berechne die Länge der Seite a bzw. b bzw. die Höhe h_c und die Größen der Winkel α und β.

a) p = 18 cm, h_c = 24 cm **b)** q = 6,4 m, h_c = 4,8 m **c)** p = 25 dm, a = 65 dm

7.21 Von einem gleichschenkligen Dreieck sind zwei Bestimmungsstücke gegeben. Berechne die Längen der fehlenden Seiten, die Höhen, die Größen der fehlenden Winkel und den Flächeninhalt. Fertige eine Skizze an und dokumentiere deine Rechenschritte. **BC**

a) $a = 334$ mm, $c = 72$ mm **c)** $h_c = 5{,}2$ cm, $\gamma = 64°$ **e)** $h_a = 4$ dm, $c = 5{,}6$ dm
b) $c = 39$ cm, $\alpha = 35°$ **d)** $a = 2{,}4$ m, $c = 1{,}9$ m **f)** $h_c = 56{,}73$ cm, $a = 75{,}7$ cm

7.22 **1)** Gib ohne zu rechnen an, ob die Lösungen zu den folgenden Aufgaben bei Berechnungen in einem rechtwinkligen Dreieck stimmen können. **BCD**
2) Begründe deine Antwort. Überprüfe deine Vermutung durch eine Rechnung.

a) Gegeben: $a = 3$ cm, $b = 4$ cm
Gesucht: α, β, c
Lösung: $\alpha = 48{,}59°$; $\beta = 53{,}13°$; $c = 6$ cm

b) Gegeben: $b = 5$ m, $\beta = 22{,}62°$
Gesucht: c, a, β
Lösung: $c = 5{,}42$ m; $a = 12$ m; $\alpha = 67{,}38°$

7.2.2 Berechnungen in ebenen Figuren

Viele ebene Figuren lassen sich in rechtwinklige Dreiecke zerlegen, sodass fehlende Größen berechnet werden können.

7.23 Von einem gleichschenkligen Trapez kennt man die Größe des Winkels $\alpha = 64{,}2°$, die Länge der Seite $d = 4{,}1$ m und der Seite $c = 2{,}3$ m. Berechne die Höhe h, die Länge der Seite a und die Größe des Winkels δ. **AB**

Lösung:

$\sin(\alpha) = \frac{h}{d} \Rightarrow h = d \cdot \sin\alpha$

$h = 4{,}1\text{ m} \cdot \sin(64{,}2°) = 3{,}691\ldots\text{ m} \approx 3{,}69\text{ m}$

$\cos(\alpha) = \frac{x}{d} \Rightarrow x = d \cdot \cos(\alpha)$

$x = 4{,}1\text{ m} \cdot \cos(64{,}2°) = 1{,}784\ldots\text{ m}$

$a = c + 2 \cdot x = 2{,}3\text{ m} + 2 \cdot 1{,}784\ldots\text{ m} = 5{,}868\ldots\text{ m} \approx 5{,}87\text{ m}$

$\alpha + \delta = 180° \Rightarrow \delta = 180° - \alpha \Rightarrow \delta = 180° - 64{,}2° = 115{,}8°$

- Das Trapez wird in zwei rechtwinklige Dreiecke und ein Rechteck zerlegt. h und a werden berechnet.
- δ ist ein Parallelwinkel zu α.

Aufgaben 7.24 – 7.26: Fertige jeweils eine Skizze an.

7.24 Von einem Rechteck kennt man die Länge d der Diagonalen und die Größe des Winkels φ, unter dem sie einander schneiden. Berechne die Länge und die Breite des Rechtecks. **AB**

a) $d = 64$ mm, $\varphi = 22°$ **b)** $d = 3{,}66$ m, $\varphi = 82°$ **c)** $d = 0{,}3$ dm, $\varphi = 45°$

7.25 Die Längen der Diagonalen e und f einer Raute sind gegeben. Berechne die Länge der Seite a und die Größen der Winkel α und β. **AB**

a) $e = 36$ mm, $f = 19$ mm **b)** $e = 7{,}1$ cm, $f = 65$ mm **c)** $e = 24$ cm, $f = 3{,}5$ dm

7.26 Von einem Deltoid sind drei Bestimmungsstücke gegeben. Berechne die Seitenlängen, die Längen der Diagonalen sowie die Größen der Winkel. **AB**

a) $a = 13$ mm, $b = 19$ mm, $\alpha = 56°$ **c)** $f = 66$ mm, $\alpha = 126°$, $\beta = 72°$
b) $b = 4{,}5$ cm, $e = 5{,}3$ cm, $f = 3{,}6$ cm **d)** $a = 1{,}5$ m, $e = 2{,}7$ m, $f = 3{,}4$ m

B **7.27** Berechne die Längen der Diagonalen eines Parallelogramms mit folgenden Bestimmungsstücken. Fertige zuerst eine Skizze an.

a) $a = 44$ mm, $b = 26$ mm, $\alpha = 62°$ ***c)*** $a = 8{,}5$ m, $b = 6{,}3$ m, $\alpha = 48{,}8°$
b) $a = 45{,}7$ cm, $b = 3{,}85$ dm, $\beta = 114°$ ***d)*** $a = 14$ dm, $b = 36{,}4$ dm, $\beta = 145°$

B **7.28** Von einem Trapez kennt man die Längen zweier Seiten und die Größen zweier Winkel. Berechne die Längen der beiden fehlenden Seiten, die Größen der fehlenden Winkel, die Höhe sowie den Flächeninhalt. Fertige zuerst eine Skizze an.

a) $a = 53$ m, $b = 25$ m, $\alpha = 67°$, $\beta = 38°$ ***b)*** $d = 312$ m, $c = 244$ m, $\alpha = 72{,}5°$, $\gamma = 61{,}2°$

B **7.29** Berechne die Länge der Diagonale eines regelmäßigen Fünfecks (Abb 7.10), wenn die Seitenlänge $a = 42$ mm ist.

Abb. 7.10

B **7.30** Der Umkreisradius eines regelmäßigen Achtecks beträgt $r = 24$ m. Berechne die Seitenlänge.

B **7.31** Der Umkreisradius eines gleichseitigen Dreiecks beträgt $r = 14{,}5$ cm. Berechne den Inkreisradius und die Seitenlänge des Dreiecks.

B **7.32** Berechne den Flächeninhalt eines Kreisabschnitts, wenn der Radius $r = 4{,}2$ cm und $\alpha = 122°$ gegeben sind.

BCD **7.33** Ein Punkt P hat vom Mittelpunkt M eines Kreises mit dem Radius $r = 6$ m den Abstand p.

1) Berechne die Größe des Winkels α, unter dem die beiden aus P an den Kreis gelegten Tangenten einander schneiden, wenn $p = 10$ m ist.
2) Gib an, welche Werte für α möglich sind. Welcher Fall tritt ein, wenn $\alpha = 180°$ ist? Unterstütze deine Erklärung mit einer Zeichnung.

ABCD **7.34** Zwei Kreise mit den Radien $r_1 = 5$ cm und $r_2 = 8$ cm schneiden einander in zwei Punkten. Sie haben eine gemeinsame Sehne mit der Länge $s = 6$ cm.

1) Fertige eine Skizze an und berechne die Größe des Winkels α unter dem die Kreise einander schneiden. (Das ist der Winkel, den die Tangenten miteinander einschließen.)
2) Überlege und erkläre, welcher Fall eintritt, wenn der Winkel $\alpha = 90°$ beträgt. Unterstütze deine Argumentation mit einer Zeichnung.

B **7.35** Im Inneren eines kreisbogenförmigen Brückenträgers einer Eisenbrücke soll ein Kabel verlegt werden. Berechne die Mindestlänge des Kabels, wenn die Brücke die angegebenen Abmessungen hat.

B **7.36** Berechne die Länge einer gespannten Fahrradkette, wenn das hintere Zahnrad den Durchmesser $d_1 = 8$ cm, das vordere Zahnrad den Durchmesser $d_2 = 17$ cm und die Mittelpunkte der beiden Zahnräder den Abstand $a = 42$ cm haben.

7.2.3 Steigung und Steigungswinkel

Im Straßenverkehr und in Geländeprofilen werden Steigungen oft in Prozent oder als Verhältnis zweier Zahlen angegeben. Dabei wird eine vertikale Länge ins Verhältnis zu der zugehörigen horizontalen Länge gesetzt. Auf Seite 183 wurde die Angabe einer Steigung in Prozent bereits erklärt. Bei einer Steigung von beispielsweise 15 % gilt, dass zum Beispiel bei 100 m in waagrechter Entfernung 15 m in senkrechter Richtung zurückgelegt werden.

Für k = 15 % kann man daher schreiben: $k = \frac{15\text{ m}}{100\text{ m}} = 15 : 100 = 0{,}15$

k = 15 %
15 m
100 m

h
φ
a

Die **Steigung** ist das Verhältnis $\frac{h}{a}$ der Höhe h zur Strecke a in horizontaler Richtung.

Der **Steigungswinkel** oder **Neigungswinkel** φ ist der Winkel, den eine Gerade oder Ebene mit der Horizontalen einschließt.

Es gilt: $\tan(\varphi) = \frac{h}{a}$ bzw. $\varphi = \arctan\left(\frac{h}{a}\right)$

7.37 Eine geradlinige Straße hat eine konstante Steigung von 15 %. **AB**

1) Gib die Steigung als Verhältnis an.
2) Wie groß ist der Neigungswinkel φ, unter dem die Fahrbahn gegenüber der Horizontalen geneigt ist?
3) Welchen Höhenunterschied h überwindet ein Fahrzeug, wenn es 1,5 km fährt?
4) Welche Strecke a legt es in horizontaler Richtung zurück, wenn es 840 m fährt?

1,5 km
h
φ
a

Lösung:

1) Steigung 15 % bedeutet: $\frac{h}{a} = 0{,}15$ bzw. h : a = 0,15 : 1 = 15 : 100

2) $\tan(\varphi) = \frac{h}{a} = 0{,}15 \Rightarrow \varphi = \arctan(0{,}15) \Rightarrow \varphi = 8{,}530...° \approx 8{,}53°$

3) $\sin(\varphi) = \frac{h}{1{,}5\text{ km}} \Rightarrow h = 1{,}5\text{ km} \cdot \sin(\varphi)$

$h = 1{,}5\text{ km} \cdot \sin(8{,}530...°) = 0{,}222\,5...\text{ km} \approx 0{,}223\text{ km} = 223\text{ m}$

4) $\cos(\varphi) = \frac{a}{840\text{ m}} \Rightarrow a = 840\text{ m} \cdot \cos(\varphi) \Rightarrow$

$a = 840\text{ m} \cdot \cos(8{,}530...°) = 830{,}706...\text{ m} \approx 831\text{ m}$

7.38 Bei der Fernsehübertragung des Riesentorlaufs der Herren bei der alpinen Schi-WM 2011 in Garmisch und Partenkirchen erwähnte der Kommentator, dass die Steigung am Streckenteil „Freier Fall" der Kandahar-Strecke 92 % beträgt. Jasmin und Cem haben das Rennen gesehen und unterhalten sich am nächsten Tag in der Pause darüber. Jasmin ist beeindruckt davon, dass sich die Rennläufer in den senkrechten Hang stürzen mussten. Cem hingegen meint, dass ein Gefälle von 92 % keinesfalls einem Winkel von mehr als 90° entsprechen kann. **ABCD**

1) Diskutiere mit deiner Sitznachbarin bzw. deinem Sitznachbarn, wer von den beiden Recht haben kann. Überprüft eure Vermutungen mithilfe einer Rechnung.
2) Welchem Winkel entspricht ein Anstieg von 100 %, welchem ein Anstieg von 200 %?
3) Überlege, ob es möglich ist, einen Steigungswinkel von 90° in Prozent anzugeben.

BD **7.39** Eine Steigung von 100 % entspricht einem Steigungswinkel von 45°. Yvonne schließt daraus, dass einer Steigung von 10 % ein Winkel von 4,5° entsprechen muss. Überlege und argumentiere, ob der Schluss von Yvonne zulässig ist oder nicht.

ABCD **7.40** Im Winter kommt es auf manchen Streckenabschnitten auf Österreichs Straßen immer wieder zu massiven Verkehrsproblemen.
1) Recherchiere im Internet die maximalen Steigungen des „Knoten Steinhäusl" auf der Wiener Außenringautobahn A21 sowie der Passstraße auf die „Turracher Höhe" im Grenzgebiet zwischen Steiermark und Kärnten.
2) Berechne jeweils den Steigungswinkel.
3) Diskutiert in der Klasse, warum es gerade auf diesen Straßen im Winter zu Problemen kommt, und überlegt, wie man dies vermeiden könnte.

B **7.41** Berechne die Größe des Steigungswinkels für eine Straße mit der angegebenen Steigung.
a) 5 % **b)** 7,5 % **c)** 12 % **d)** 16 %

BCD **7.42** **1)** Berechne die Größe des Steigungswinkels einer Geraden mit $k = 1$ bzw. $k = 2$.
2) Berechne die Größe der Steigung für $\alpha = 10°$ und $\alpha = 20°$.
3) Vergleiche die Ergebnisse. Was fällt dir auf?

AB **7.43** Berechne die Größe des Steigungswinkels und die Steigung in Prozent für eine Bahnstrecke mit der gegebenen Steigung.
a) Steigung $k = 1 : 220$ **b)** Steigung $k = 1 : 500$

Aufgaben 7.44 – 7.46: Fertige jeweils eine geeignete Skizze an und formuliere eine Antwort.

AB **7.44** Ein Snowboarder fährt ein unter 20° abfallendes Rail hinunter. Berechne die Länge des Rails, wenn der Endpunkt um h tiefer ist als der Anfangspunkt.
a) $h = 2$ m **b)** $h = 4,5$ m **c)** $h = 7,5$ m

AB **7.45** Im Wasserkraftwerk Malta in Kärnten wird das Wasser durch einen Druckstollen und mit einer Druckleitung von der Staumauer zum Turbinenhaus geleitet. Welcher Höhenunterschied wird mit der Druckleitung überwunden, wenn sie 1,85 km lang ist und das mittlere Gefälle der Leitung 74,5 % beträgt?

AB **7.46** Neben einer Treppe, mit der ein Höhenunterschied von 60 cm überwunden wird, soll eine Rampe errichtet werden.
1) Wie lang muss sie mindestens sein, wenn die Steigung höchstens 6 % betragen darf?
2) Welche Steigung wird die Rampe haben, wenn aus Platzgründen der maximal mögliche Horizontalabstand 12 m beträgt?

AB **7.47** Die Steigung einer in einem Wohnhaus zu errichtenden Treppe soll 58 % betragen, die Stufenhöhe 17 cm.
1) Berechne die Größe des Steigungswinkels φ der Treppe.
2) Berechne die Stufentiefe.
3) Welcher Horizontalabstand wird benötigt, wenn die Treppe einen Höhenunterschied von 2,9 m überwinden soll?

Stufenhöhe
Stufentiefe
φ
Horizontalabstand
Höhenunterschied

7.48 Die Talstation der Zau[:ber:]g Kabinenbahn am Semmering liegt auf 995 m Seehöhe, die Bergstation auf 1 350 m. Auf einer Wanderkarte im Maßstab 1 : 50 000 beträgt der Abstand zwischen Tal- und Bergstation 1,65 cm. AB

1) Berechne den Neigungswinkel, die Steigung in Prozent und die Länge der Seilbahn.

2) Berechne, wie viel Minuten eine Fahrt von der Berg- zur Talstation dauert, wenn die mittlere Geschwindigkeit der Kabinenbahn 20 $\frac{km}{h}$ beträgt.

7.2.4 Flächenprojektionssatz

Eine rechteckige Fläche A ist gegenüber einer Ebene ε unter dem Winkel φ geneigt. Wird A im rechten Winkel zu ε auf ε projiziert, so ergibt sich die Fläche A′. Zwischen den Flächeninhalten von A und A′ besteht folgender Zusammenhang:

Da A und A′ Rechtecke sind, gilt für die Flächeninhalte $A = a \cdot b$ und $A' = a' \cdot b$. Für die Seitenlängen a von A und a′ von A′ gilt:

$\cos(\varphi) = \frac{a'}{a} \Rightarrow a' = a \cdot \cos(\varphi)$

Damit ergibt sich für den Flächeninhalt:

$A' = a' \cdot b = a \cdot \cos(\varphi) \cdot b = a \cdot b \cdot \cos(\varphi) = A \cdot \cos(\varphi)$

Man erhält den Flächeninhalt A′ der projizierten Fläche durch Multiplikation des Flächeninhalts A der unter dem Winkel φ geneigten Fläche mit dem Faktor $\cos(\varphi)$. Dieser Zusammenhang gilt für beliebige Flächen konstanter Neigung und heißt **Flächenprojektionssatz**.

$A' = A \cdot \cos(\varphi)$

7.49 Der Grundriss eines Hauses hat einen Flächeninhalt von 123 m^2. Berechne den Gesamtinhalt der Dachfläche, wenn sie unter einem Winkel von 56° geneigt sind. AB

7.50 Ein Haus hat einen rechteckigen Grundriss und ist 10 m lang und 7 m breit. Berechne die Größe des Dachs, wenn die Dachflächen unter 42° geneigt sind. AB

7.51 Der Flächeninhalt eines unter 25° geneigten Pultdachs einer Garage beträgt 27 m^2. Berechne die Größe des Grundrisses der Garage. AB

7.52 Das in Abb. 7.11 dargestellte Walmdach hat eine Höhe von 5 m. AB

1) Berechne die Größen der Neigungswinkel der Dachflächen.

2) Berechne die Größe der gesamten Dachfläche.

Abb. 7.11
Maße in Meter

7.53 Bei einer Grillparty wird eine 8 m^2 große, rechteckige Zeltplane mit einer Länge von 4 m unter einem Winkel von $\alpha = 65°$ zur ebenen Gartenfläche aufgestellt, um Schatten zu spenden. Am Beginn des Festes treffen die Sonnenstrahlen im rechten Winkel auf die Plane auf. Fertige eine Skizze an und berechne den Inhalt der Schattenfläche. AB

7.54 Ein Turm mit kreisförmiger Grundfläche hat ein kegelförmiges Dach. ABD

1) Fertige eine Skizze an und zeige, dass man die Dachfläche auch bei kegelförmigen Dächern mit dem Flächenprojektionssatz berechnen kann.

2) Berechne, unter welchem Winkel das Dach geneigt ist, wenn die Dachfläche 112 m^2 und die Grundfläche 56 m^2 beträgt.

7.2.5 Vermessungsaufgaben

Ein Winkel mit einem horizontalen und einem schräg nach oben verlaufenden Schenkel heißt **Höhenwinkel**. Ein Winkel mit einem horizontalen und einem schräg nach unten verlaufenden Schenkel heißt **Tiefenwinkel**.

Höhenwinkel
Tiefenwinkel

Der Winkel, unter dem eine Strecke von einem Punkt A aus erscheint, heißt **Sehwinkel**.

A Sehwinkel

Der Neigungswinkel der Sonnenstrahlen zur Horizontalen heißt **Sonnenhöhe**.

AB **7.55** Auf einem in horizontaler Richtung 400 m entfernten Büroturm ist ein Handymast angebracht. Das untere Ende des Masts erscheint vom Boden aus unter einem Höhenwinkel von $\alpha = 16{,}7°$ und die Spitze unter dem Höhenwinkel $\beta = 18{,}0°$. Wie hoch ist der Mast?

h_1 h α β 400

Lösung:

$\tan(\alpha) = \frac{h}{400\text{ m}} \Rightarrow h = 400\text{ m} \cdot \tan(\alpha)$

$\Rightarrow h = 400\text{ m} \cdot \tan(16{,}7°) = 120{,}005...\text{ m}$

$\tan(\beta) = \frac{h + h_1}{400\text{ m}} \Rightarrow h + h_1 = 400\text{ m} \cdot \tan(\beta) \Rightarrow h + h_1 = 400\text{ m} \cdot \tan(18°) = 129{,}967...\text{ m}$

$h_1 = 129{,}967...\text{ m} - 120{,}005...\text{ m} = 9{,}962...\text{ m} \approx 10\text{ m}$

Der Mast ist ca. 10 m hoch.

AB **7.56** Wie hoch ist ein Gebäude, das bei einer Sonnenhöhe von 36° einen 130 m langen Schatten wirft?

ABC **7.57** **1)** Recherchiere, welchen Wert die Sonnenhöhe in Wien zur Wintersonnenwende zu Mittag hat.

2) Berechne, wie lang zu diesem Zeitpunkt der Schatten des 202 m hohen Milleniumtowers ist.

AB **7.58** Der Südturm des Wiener Stephansdoms ist 136 m hoch.

a) Am 21. Juni zu Mittag (Sommersonnenwende) wirft der Turm einen 63 m langen Schatten. Wie groß ist die Sonnenhöhe zu diesem Zeitpunkt?

b) Am 21. Dezember zu Mittag (Wintersonnenwende) wirft der Turm einen 410 m langen Schatten. Wie groß ist die Sonnenhöhe zu diesem Zeitpunkt?

AB **7.59** An einem Haus, das auf einem horizontalen Platz steht, ist in 5,20 m Höhe die Verankerung für eine Fahnenstange angebracht. Ein Beobachter mit 1,72 m Aughöhe (senkrechter Abstand der Augen über dem Platz) sieht die Verankerung unter einem Höhenwinkel von 23°. Wie weit ist er vom Haus entfernt?

AB **7.60** Von einem 7 m hohen Aussichtsturm am Ufer eines Sees (Höhe gemessen von der Oberfläche des Sees) sieht man bei einer Aughöhe von 1,7 m ein Ruderboot unter einem Tiefenwinkel von 4,7°. Wie weit ist das Boot vom Ufer entfernt?

7.61 Vom höchsten Punkt eines Bergs mit 452 m Seehöhe sieht man das untere Ende eines Gipfelkreuzes eines Bergs mit 1 350 m Seehöhe unter einem Höhenwinkel von 24,1°. Berechne die Höhe des Gipfelkreuzes, wenn man das obere Ende unter einem Höhenwinkel von 24,2° sieht. Vernachlässige die Aughöhe. **AB**

7.62 Herr van der Zijden macht Urlaub in Wien. Er steht a = 90 m vom Wiener Riesenrad entfernt und sieht die Achse des Rads unter einem Höhenwinkel von $\alpha = 24{,}33°$. Er schwenkt seinen Blick um $\beta = 16{,}87°$ nach oben und sieht den höchsten Punkt des Rads. **ABCD**

1) Gib an, welche der beiden Skizzen A) oder B) zu dieser Situation passt und begründe, warum die andere nicht passt.

2) Berechne aus den gegebenen Werten den Durchmesser des Riesenrads. Rechne zuerst allgemein und setze dann erst die Zahlenwerte ein (Aughöhe: 1,7 m).

A) α β a

B) β α a

7.63 Ein Wetterballon steigt senkrecht auf. In 2 km Entfernung vom Startplatz befindet sich ein Beobachtungspunkt auf gleicher Meereshöhe. Von dort aus erscheint der Wetterballon 10 Minuten nach dem Start unter einem Höhenwinkel von 14° und 15 Minuten nach dem Start unter einem Höhenwinkel von 22°. **AB**

1) Welche Höhe hat der Ballon zum ersten Kontrollzeitpunkt nach 10 Minuten erreicht, welche Höhe zum zweiten nach 15 Minuten?

2) Mit welcher mittleren Geschwindigkeit ist der Ballon bis zum ersten Kontrollzeitpunkt gestiegen?

3) Um wie viel Prozent hat sich die mittlere Geschwindigkeit nach dem ersten Kontrollzeitpunkt geändert?

7.64 Auf dem Lärmschutzdamm einer Autobahn, der in einem Winkel von $\alpha = 10{,}81°$ zur Horizontalen geneigt ist, steht ein Handymast. Fallen die Sonnenstrahlen in einem Winkel $\varphi = 55{,}00°$ zur Horizontalen ein, so fällt ein Schatten der Länge s = 16 m hangabwärts auf den Damm. Fertige zuerst eine aussagekräftige Skizze an und entwickle dann eine Vorgehensweise zur Ermittlung der Höhe des Handymasts. Berechne anschließend die Höhe. **ABCD**

7.65 Familie Fellner macht Urlaub an einem Bergsee. Von der 25 m über dem See gelegenen Dachterrasse des Hotels aus können sie den Fußpunkt des Gipfelkreuzes am gegenüberliegenden Berg mithilfe eines schwenkbaren Fernrohrs unter einem Höhenwinkel von 11,45° anvisieren. Unter einem Tiefenwinkel von 12,59° sehen sie das Spiegelbild des Kreuzes im See. **ABCD**

1) Fertige eine möglichst aussagekräftige Skizze an.

2) Am Gipfelkreuz ist die Meereshöhe des Bergs auf einer Plakette mit 2 026 m angegeben. Auf welcher Meereshöhe liegt der Bergsee an dem Familie Fellner Urlaub macht?

3) Entwickle eine allgemeine Formel zur Berechnung des Höhenunterschieds zwischen dem See und dem Berg und gib sie an.

AB **7.66** Ein 12 m hoher Turm steht in der Mitte eines quadratischen Platzes. Vom Turm aus sieht eine Beobachterin (Aughöhe 1,67 m) alle Ecken des Platzes unter dem gleichen Tiefenwinkel von 11°. Berechne die Seitenlänge des Platzes.

ABC **7.67** Auf dem Grazer Schlossberg steht 123 Höhenmeter über der Grazer Altstadt der 28 m hohe Uhrturm. Von der Spitze des Turms aus sieht man das Rathaus unter einem Tiefenwinkel von $\alpha = 12{,}46°$. Dreht man sich um 90° nach Osten, so sieht man die Universität Graz unter einem Tiefenwinkel von $\beta = 6{,}67°$.

1) Fertige eine räumliche Skizze der Situation an. Nimm dabei an, dass sich das Rathaus und die Universität in der gleichen Horizontalebene wie die Altstadt befinden.

2) Berechne die Entfernung zwischen dem Rathaus und der Universität. Überlege zuerst eine Vorgehensweise und dokumentiere deine Rechenschritte.

ABC **7.68** Die Abbildung zeigt die Schlossbrücke in St. Petersburg über die „Große Newa". Die Brückenarme über dem 52 m breiten Mittelteil können nachts in einem Winkel von bis zu 45° hochgeklappt werden, um Schiffen die Durchfahrt zur Ostsee zu ermöglichen. Die Gelenke der Brücke liegen rund 10 m über der Wasseroberfläche.

1) Ein Frachter ist mit quaderförmigen Containern beladen, die auf einer Breite von 20 m auf dem Schiff angeordnet sind. Der Frachter ragt mit den Containern 17 m über die Wasseroberfläche hinaus. Ist es möglich, die Brücke zu passieren, wenn beide Brückenarme im größtmöglichen Winkel geöffnet sind?

2) Bis zu welcher Höhe, von der Wasseroberfläche aus gemessen, wäre es für das Schiff theoretisch möglich, die Brücke zu passieren?

AB **7.69** Um die Höhe des Mt. Everest zu vermessen, wurden in einem ebenen Gelände auf 2 500 m Seehöhe von zwei Messpunkten A und B die Höhenwinkel zum Gipfel des Bergs gemessen. Die Messpunkte wurden so gewählt, dass sie mit dem Gipfel in einer Vertikalebene lagen und voneinander 1 300 m entfernt waren. Berechne die Höhe, wenn in A der Winkel $\alpha = 6°2'28{,}73''$ und in B der Winkel $\beta = 5°54'50{,}81''$ gemessen wurden. Hinweis: Verwende zur Lösung ein lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen.

ABC **7.70** Lukas erhält den Auftrag, die Breite b einer stark befahrenen Straße zu bestimmen. Dazu erhält er ein Gerät, mit dem man Winkel in einer Horizontalebene messen kann. An beiden Seiten der Straße stehen Beleuchtungsmasten A und B einander direkt gegenüber. Fertige eine Skizze an, die diese Situation von oben zeigt und vervollständige sie so, dass Lukas die Breite der Straße bestimmen kann. Erfinde sinnvolle Winkelwerte und Abstände so, dass die Aufgabe eindeutig lösbar und das Ergebnis realistisch ist.

7.2.6 Anwendungen aus Naturwissenschaft und Technik

Kräfte und Geschwindigkeiten werden oft durch Pfeile dargestellt, deren Länge der Größe der Kraft bzw. Geschwindigkeit entspricht. Die Berechnungen beim Zusammensetzen oder Zerlegen von Kräften bzw. Geschwindigkeiten lassen sich auf das Arbeiten mit Dreiecken zurückführen.

7.71 Ein Wagerl mit dem Gewicht $F_G = 800$ N steht auf einer unter $\alpha = 30°$ geneigten Rampe. Mit welcher Hangabtriebskraft F_H wird das Wagerl längs der Rampe hinuntergezogen und mit welcher Normalkraft F_N drückt es gegen die Rampe? AB

Lösung:

$\sin(\alpha) = \frac{F_H}{F_G} \Rightarrow F_H = F_G \cdot \sin(\alpha)$

$F_H = 800 \text{ N} \cdot \sin 30° = 400 \text{ N}$

$\cos(\alpha) = \frac{F_N}{F_G} \Rightarrow F_N = F_G \cdot \cos(\alpha)$

$F_N = 800 \text{ N} \cdot \cos(30°) = 692{,}820... \text{ N}$

Hangabtriebskraft $F_H = 400$ N, Normalkraft $F_N = 693$ N

- Die Hangabtriebskraft F_H wirkt parallel zur Rampe, die Normalkraft F_N wirkt im rechten Winkel zur Rampe. Die Winkel α' und α sind Normalwinkel und daher gleich groß.

7.72 Mit welcher Hangabtriebskraft F_H wird der Wagen eines Schrägaufzugs längs des Gleises hinuntergezogen und mit welcher Normalkraft F_N wird er gegen das Gleis gedrückt, wenn der Wagen das Gewicht F_G und das Gleis den Steigungswinkel α hat? AB

a) $F_G = 7$ kN, $\alpha = 45°$ ***b)*** $F_G = 20$ kN, $\alpha = 15°$ ***c)*** $F_G = 120$ kN, $\alpha = 29{,}5°$

7.73 Zwei Kräfte F_1 und F_2 stehen im rechten Winkel zueinander. Berechne die resultierende Kraft F_R und die Größe des Winkels α_1 zwischen F_1 und F_R bzw. α_2 zwischen F_2 und F_R. B

a) $F_1 = 20$ N, $F_2 = 50$ N ***b)*** $F_1 = 134$ N, $F_2 = 67$ N ***c)*** $F_1 = 0{,}56$ N, $F_2 = 1{,}27$ N

7.74 Eine Kraft F soll in zwei Richtungen zerlegt werden, die zueinander im rechten Winkel stehen. Berechne die in den beiden Richtungen auftretenden Kräfte, wenn F mit einer der beiden Richtungen den Winkel α einschließt. AB

a) $F = 100$ N, $\alpha = 28°$ ***b)*** $F = 23{,}4$ kN, $\alpha = 17{,}2°$ ***c)*** $F = 423$ N, $\alpha = 42°$

7.75 Auf einen Holzbalken wirkt eine Kraft F unter einem Winkel α. F kann in eine Kraft F_N normal zum Balken und in eine Kraft F_L in Richtung des Balkens zerlegt werden. Berechne die beiden Kräfte. AB

a) $F = 7{,}2$ kN, $\alpha = 75°$ ***c)*** $F = 2{,}8$ kN, $\alpha = 0°$ ***e)*** $F = 80$ N, $\alpha = 45°$
b) $F = 3{,}4$ kN, $\alpha = 90°$ ***d)*** $F = 870$ N, $\alpha = 89°$ ***f)*** $F = 1$ kN, $\alpha = 68{,}7°$

7.76 Eine Straßenlampe mit dem Gewicht F_G ist an Seilen genau in der Mitte zwischen zwei Häusern aufgehängt. Berechne die Kräfte, die in den Seilen auftreten, wenn die Seile mit der Horizontalen den Winkel α einschließen. AB

a) $F_G = 22$ N, $\alpha = 5°$ ***b)*** $F_G = 150$ N, $\alpha = 12°$ ***c)*** $F_G = 65$ N, $\alpha = 21°$

7.77 Ein Flugzeug fliegt mit einer Geschwindigkeit von 400 $\frac{km}{h}$ in Kompassrichtung Osten. Es wird vom Nordwind mit 50 $\frac{km}{h}$ abgetrieben. In welche Richtung und mit welcher Geschwindigkeit über Grund fliegt das Flugzeug tatsächlich? AB

AB 7.78 In welche Kompassrichtung und mit welcher Geschwindigkeit muss ein Pilot das Flugzeug steuern, damit es bei 60 $\frac{km}{h}$ starkem Westwind mit einer Geschwindigkeit von 520 $\frac{km}{h}$ den genau in südlicher Richtung liegenden Zielflughafen ansteuert?

60 $\frac{km}{h}$
520 $\frac{km}{h}$

AB 7.79 Ein Fass mit m = 160 kg Masse soll eine Rampe mit dem Neigungswinkel α = 21° hinaufgerollt werden. Welche Kraft ist dazu mindestens notwendig? Mit welcher Kraft drückt das Fass gegen die Rampe? Hinweis: $F_G = m \cdot g$ mit $g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$

α
F_G

AB 7.80 An einem horizontalen Stab, der an einer senkrechten Mauer angebracht ist, hängt ein Schild mit F_G = 75 N. Damit im Stab keine Biegekräfte auftreten, ist zusätzlich ein Zugseil angebracht.

a) Welche Kräfte treten im Zugseil und im Stab auf, wenn das Zugseil und der Stab einen Winkel von α = 47° einschließen?

b) Wie groß muss der Winkel mindestens sein, wenn die maximal zulässige Kraft im Zugseil 350 N beträgt?

Seil
α
Stab
F_G

AB 7.81 Die Fließgeschwindigkeit eines Flusses beträgt 6 $\frac{m}{s}$. In welche Richtung und mit welcher Geschwindigkeit muss eine Fähre gesteuert werden, wenn sie den Fluss im rechten Winkel zur Fließrichtung des Flusses und mit einer Geschwindigkeit von 1,3 $\frac{m}{s}$ überqueren soll?

AB 7.82 Laura möchte einen 150 m breiten Fluss überqueren. Sie schwimmt mit 0,5 $\frac{m}{s}$ normal zur Fließrichtung.

1) In welche Richtung und mit welcher Geschwindigkeit bewegt sie sich tatsächlich, wenn die Fließgeschwindigkeit des Flusses 3 $\frac{m}{s}$ beträgt?

2) Wie viel Meter stromabwärts erreicht sie das andere Ufer?

AB 7.83 Ein Lichtstrahl wird beim Übergang von Luft in Wasser zum Lot hin gebrochen. Das Brechungsgesetz $\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$ gibt den Zusammenhang zwischen den Winkeln α und β an. Berechne den Brechungswinkel β bei gegebenem Winkel α, wenn $\frac{n_2}{n_1} = \frac{4}{3}$ ist.

a) α = 20° **b)** α = 65° **c)** α = 0° **d)** α = 45° **e)** α = 90°

α n_1
β n_2

n_1, n_2 ... Brechzahlen

ABD 7.84 Das Seil eines Schrägaufzugs kann maximal mit einer Zugkraft von 251 kN belastet werden.

1) Welche Masse darf der beladene Wagen maximal haben, wenn der Neigungswinkel des Gleises 32,7° beträgt und eine 9-fache Sicherheit zu berücksichtigen ist? (Das heißt, die Hangabtriebskraft darf höchstens $\frac{1}{9}$ der maximalen Zugkraft betragen.)

2) Wie viele Personen mit durchschnittlich 75 kg können befördert werden, wenn die Eigenmasse des Wagens 3 000 kg beträgt? Hinweis: $F_G = m \cdot g$ mit $g = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$.

AB 7.85 Ein Gegenstand fällt senkrecht vom Dach eines geneigten Gebäudes herab und trifft nach 3,1 Sekunden 2,5 m vom Gebäude entfernt am Dach des niedrigeren Nachbargebäudes auf. Berechne unter welchem Winkel das Gebäude geneigt ist. Verwende zur Berechnung $s = \frac{g}{2} \cdot t^2$, wobei s (in Meter) der beim freien Fall nach der Zeit t (in Sekunden) zurückgelegte Weg ist.

Falllinie

7.2.7 Anwendungen in der Geografie und in der Astronomie

In den folgenden Aufgaben wird für Erde, Mond und Sonne ideale Kugelgestalt angenommen und die atmosphärischen Strahlenbrechungen werden vernachlässigt.

7.86 Ein Wetterballon befindet sich in 20 km Höhe über der Erdoberfläche. Berechne den Radius der Erde, wenn sie vom Ballon aus unter dem Sehwinkel $\alpha = 170{,}932°$ erscheint. AB

Lösung:

$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{r}{r+h} \Rightarrow r = (r+h) \cdot \sin\left(\frac{170{,}932°}{2}\right)$

$r = (r + 20\text{ km}) \cdot 0{,}996...$

$r = 0{,}996... \cdot r + 19{,}937...\text{ km}$

$0{,}003... \cdot r = 19{,}937...\text{ km} \Rightarrow r = 6\,371{,}000...\text{ km} \approx 6\,371\text{ km}$

7.87 Berechne, wie weit eine Raumfähre von der Erdoberfläche entfernt ist, wenn der Erdradius 6 371 km beträgt und die Erde unter folgendem Sehwinkel erscheint. AB

a) $\alpha = 15°$ ***b)*** $\alpha = 60°$ ***c)*** $\alpha = 150°$

7.88 Ein Beobachter auf der Erde sieht den Mond unter einem Sehwinkel von $\alpha = 31'5''$. Wie groß ist die Entfernung vom Beobachter zum Mittelpunkt des Monds, wenn der Monddurchmesser 3 476 km beträgt? AB

Aufgaben 7.89 – 7.93: Verwende für den Erdradius r = 6 371 km.

7.89 Der Durchmesser der Sonne beträgt $1{,}39 \cdot 10^6$ km. Berechne den Abstand des Erdmittelpunkts vom Sonnenmittelpunkt, wenn die Sonne von einem Punkt der Erdoberfläche unter einem Sehwinkel von 0,515° erscheint. AB

7.90 Graz hat die nördliche Breite $\varphi \approx 47°$. AB

1) Berechne den Radius und den Umfang des zugehörigen Breitenkreises.

2) Welchen Abstand hat Graz vom Äquator?

7.91 Berechne die geografischen Breiten des Breitenkreises, dessen Radius ***a)*** die Hälfte, ***b)*** ein Viertel des Erdradius beträgt. Gib je zwei Orte an, die auf diesen Breitenkreisen liegen. AB

7.92 Der h = 3 674 m hohe Großvenediger heißt so, weil man von seinem Gipfel bis nach Venedig sehen können soll. Zeige, dass dies theoretisch möglich ist, wenn Venedig vom Großvenediger b = 184 km entfernt ist. ABD

7.93 Peter steht in Neusiedl am Strand des Neusiedler Sees und blickt über den See (Aughöhe 170 cm). Sein Freund Michael steht zur gleichen Zeit am Strand in Mörbisch und seine Freundin Nina in Podersdorf, beide sind 175 cm groß. Mörbisch ist 21 km und Podersdorf 7,4 km Luftlinie von Neusiedl entfernt. Kann Peter mit einem guten Fernglas Michael und Nina oder nur Nina sehen? Begründe deine Antwort. ABD

Trigonometrie

Zusammenfassung

Im rechtwinkligen Dreieck gilt:

Gegenkathete von α: Seite, die dem Winkel α **gegen**überliegt
Ankathete von α: Seite, die am Winkel α **an**liegt
Hypotenuse: Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt

Winkelfunktionen

$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$ $\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$ $\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$

Steigungswinkel oder **Neigungswinkel** φ: Winkel einer Geraden oder einer Ebene mit der Horizontalen; $k = \tan(\varphi)$ bzw. $\varphi = \arctan(k)$

Flächenprojektionssatz: $A' = A \cdot \cos(\varphi)$
A ... Flächeninhalt einer unter dem Winkel φ geneigten beliebigen Fläche
A' ... Flächeninhalt der Normalprojektion dieser Fläche

Weitere Aufgaben

Winkelberechnungen

C **7.94** Ergänze den fehlenden Winkel bzw. gib das Seitenverhältnis an.
a) $\frac{c_2}{b} = \sin\,?$ **b)** $\frac{c_1}{a} = \cos\,?$ **c)** $\tan\beta$ **d)** $\sin\gamma_1$

B **7.95** Berechne.
a) $\cos(13{,}45°)$ **b)** $\tan(62°12'34'')$ **c)** $\sin(0{,}45°)$ **d)** $\cos(44°)$

B **7.96** Berechne die Größe des Winkels in Grad.
a) $\cos(\gamma) = 0{,}33$ **b)** $\tan(\varphi) = 3{,}5$ **c)** $\sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ **d)** $\cos(\varepsilon) = \frac{1}{4}$

Ebene Figuren

B **7.97** Von einem rechtwinkligen Dreieck sind die Höhe h_c und die Länge einer Seite oder die Größe eines Winkel gegeben. Berechne die Längen der fehlenden Seiten und die Größen der fehlenden Winkel.

a) $h_c = 91$ mm, $\alpha = 22°$
b) $h_c = 3{,}62$ m, $\alpha = 57{,}5°$
c) $h_c = 239$ km, $\beta = 38{,}8°$
d) $h_c = 0{,}56$ cm, $\beta = 66{,}7°$
e) $h_c = 71$ m, $a = 84$ m
f) $h_c = 459{,}1$ dm, $a = 804$ dm
g) $h_c = 2{,}9$ m, $b = 5{,}6$ m
h) $h_c = 88{,}2$ mm, $b = 99{,}13$ mm

B **7.98** Von einem Rechteck kennt man die Länge der Seite a und die Größe des Winkels φ, den eine Diagonale mit der Seite a einschließt. Berechne die Länge der Diagonale und die Länge der Seite b des Rechtecks.
a) $a = 45$ cm, $\varphi = 33°$ **b)** $a = 422$ mm, $\varphi = 8°$ **c)** $a = 8$ m, $\varphi = 45°$

B **7.99** Berechne den Umkreisradius eines regelmäßigen Zehnecks, wenn der Inkreisradius $r = 66$ mm ist.

B **7.100** Berechne die Längen der Diagonalen sowie den Flächeninhalt der angegebenen Vierecke, wenn $a = 5{,}2$ cm, $b = 2{,}8$ cm und $\alpha = 64°$ gilt.
a) Parallelogramm **b)** gleichschenkliges Trapez **c)** Deltoid

Textaufgaben

7.101 Eine Rutsche in einem Aquapark hat die Höhe h und den Steigungswinkel α. Fertige eine Skizze an und beantworte die folgenden Fragen. AD

1) Wie kann man das Gefälle der Rutsche in Prozent bestimmen?

2) Unter welcher Voraussetzung kann man die horizontale Entfernung zwischen dem Start und dem Ende der Rutsche berechnen?

7.102 Eine 5 m lange Leiter soll gegen eine senkrechte Wand gelehnt werden. Wie weit darf das untere Ende der Leiter maximal von der Wand entfernt sein, wenn die Größe des Winkels zwischen Leiter und horizontalem Boden aus Sicherheitsgründen mindestens 75° betragen muss? AB

7.103 Eine Radfahrerin fährt die gegebene Strecke auf einer 5° ansteigenden Straße hinauf. Welche horizontale Entfernung und welchen Höhenunterschied legt sie dabei zurück? AB

a) 170 m ***b)*** 320 m ***c)*** 1,8 km

7.104 Ein Radfahrer fährt mit durchschnittlich 42 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ eine Bergstraße mit 12 % Gefälle hinunter. AB

1) Welche Strecke hat er zurückgelegt, wenn sein Höhenmesser einen Höhenunterschied von 400 m anzeigt?

2) Wie lang hat die Fahrt gedauert?

7.105 Ein Flugzeug fliegt nach dem Start mit einem Steigwinkel von 6°. In welcher Entfernung vom Startort, der auf 600 m Seehöhe liegt, erreicht es eine Reiseflughöhe von 10 500 m? AB

7.106 Ein in 2 000 m Höhe fliegendes Segelflugzeug soll auf einem in horizontaler Richtung 38 km entfernten Flugplatz, der auf Meeresniveau liegt, landen. Berechne, welcher Sinkwinkel notwendig ist, wenn mit dem Sinkflug sofort begonnen werden soll. AB

7.107 Von der Dachterrasse eines 27 m hohen Gebäudes sieht man das untere Ende einer Straßenlaterne unter einem Tiefenwinkel α = 17,9° und das obere Ende der Laterne unter einem Tiefenwinkel β = 16,6° (Aughöhe 1,75 m). Berechne die Höhe der Straßenlaterne, wenn sich Gebäude und Laterne in horizontalem Gelände befinden. AB

7.108 ***a)*** Am Ende einer geradlinigen ebenen Straße steht eine Windkraftanlage. Ein Radfahrer sieht die Nabe des Windrads unter einem Höhenwinkel α = 5,35°. Er fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von v = 7 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ auf das Windrad zu und sieht die Nabe nach zwei Minuten Fahrt unter einem Höhenwinkel β = 15,21° (Aughöhe: 1,3 m). ABCD

b) Die Windanlage aus ***a)*** steht neben der Straße in einem Normalabstand von 1 km zur Fahrbahn. Der Radfahrer sieht die Nabe unter dem Höhenwinkel α = 4,27°. Nach drei Minuten Fahrt mit 7 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ hat er den Fußpunkt des Normalabstands auf der Straße erreicht.

1) Fertige eine Skizze der Situation an und berechne die Höhe der Windkraftanlage. Entwickle zuerst eine Vorgehensweise und dokumentiere deine Rechenschritte.

2) Recherchiere die durchschnittliche Länge der Rotorblätter einer Windanlage und gib die maximale Gesamthöhe der Anlage an.

Aufgaben aus Naturwissenschaft und Technik

ABCD **7.109** Ein Auto mit einer Masse m = 750 kg parkt auf einer Straße mit einem mittleren Gefälle von 3 %. Recherchiere die Haftreibungskoeffizienten μ für Autoreifen auf
1) trockener Fahrbahn (Asphalt), ***2)*** nasser Fahrbahn, ***3)*** eisiger Fahrbahn.
Rutscht das Auto die Straße hinunter?
Hinweis: Überprüfe $F_R \leqslant F_H$; $F_R = \mu \cdot F_N$ ... Reibungskraft, F_N ... Normalkraft, F_H ... Hangabtriebskraft

AB **7.110** Eine Schalung für eine Betonmauer wird mit einer schrägen Stütze abgestützt. Berechne die in der Stütze auftretende Kraft, wenn die an der Schalung auftretende horizontale Kraft 0,5 kN beträgt und die Stütze mit dem Winkel α zum waagrechten Boden geneigt ist.
a) $\alpha = 30°$ ***b)*** $\alpha = 55°$ ***c)*** $\alpha = 75°$

AB **7.111** Eine keilförmige Verankerung in einer Mauer hält ein Gewicht von 135 N. Berechne die an die Mauer übertragenen Normalkräfte, wenn der Winkel $\alpha = 40°$ beträgt.

AB **7.112** Ein Lichtstrahl wird beim Durchgang durch eine Glasplatte zweimal gebrochen. Der austretende Lichtstrahl ist dadurch parallel zum eintretenden Lichtstrahl, aber seitlich versetzt. Berechne die seitliche Versetzung a durch eine d = 4 mm dicke Glasplatte, wenn bei einem Einfallswinkel $\alpha = 48°$ der Brechungswinkel $\beta = 36°$ ist.

ABD **7.113** Die Abbildung zeigt eine Hebebühne, bei der die Größe des Winkels zwischen den Verstrebungen von der eingestellten Höhe abhängt. Die Hebebühne besteht aus fünf Mittelgelenken und die Länge der verschiebbaren Streben beträgt jeweils 4,5 m. Unausgefahren beträgt die Höhe bis zum ersten Mittelgelenk 1,5 m.
1) Berechne, bei welcher Höhe der Winkel zwischen den Streben ***a)*** an den Seiten $\alpha = 40°$, ***b)*** am Mittelgelenk $\beta = 120°$ beträgt.
2) Welchen Winkel α schließen die Streben miteinander ein, wenn die Bühne 10 m hoch sein soll? Welchen Winkel β schließen die Streben dann am Mittelgelenk ein?
3) Überlege und erkläre, ob es sinnvoll ist, den Winkel zwischen den Streben an den Seiten auf bis zu 180° einzustellen.

AB **7.114** Berechne die Größe jener Fläche der Erde, die vom gegebenen Objekt aus sichtbar ist (Radius r = 6 371 km).
Wie viel Prozent der gesamten Erdoberfläche sind das?
Für den Flächeninhalt der Kugelkappe gilt $A = 2r\pi h$, für den der Kugel gilt $O = 4r^2\pi$.
a) Raumfähre 400 km über der Erdoberfläche
b) Verkehrsflugzeug 10 km über der Erdoberfläche
c) Heißluftballon 2 km über der Erdoberfläche

Wissens-Check

		gelöst
1	Ich kenne die Begriffe „Ankathete“ und „Gegenkathete“ und kann sie für die Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck zuordnen. A) Ankathete von α: ... B) Gegenkathete von β: ... C) Ankathete von β: ... D) Gegenkathete von α: ... B, C, A, a, b, c, α, β	
2	Ich kann die Winkelfunktionen „Sinus“, „Cosinus“ und „Tangens“ als Verhältnisse der Seiten in einem rechtwinkligen Dreieck angeben.	
3	Ich kann den Flächeninhalt der Projektion einer unter dem Winkel φ geneigten Fläche auf eine waagrechte Ebene berechnen.	
4	Ich kann aus angegebenen Werten für Sinus, Cosinus und Tangens die zugehörigen Winkel ermitteln: A) $\sin(\alpha) = 0{,}345$ B) $\cos(\beta) = 0{,}345$ C) $\tan(\gamma) = 0{,}345$	
5	Zeichne in der Skizze den Tiefenwinkel α, den Höhenwinkel β sowie den Sehwinkel φ ein.	
6	Gib an, welche der folgenden Aussagen richtig sind. Begründe, warum die anderen Aussagen falsch sind. A) Man kann in jedem beliebigen Dreieck Sinus-, Cosinus- und Tangenswerte der Winkel als Seitenverhältnisse angeben. B) Einem Anstieg von 100 % entspricht ein Steigungswinkel von 100°. C) Die Arcusfunktionen ordnen Sinus-, Cosinus- und Tangenswerten jeweils Winkel zu. D) Mithilfe der Sinusfunktion kann man eine Projektion einer geneigten Strecke auf die dem Neigungswinkel gegenüberliegende senkrechte Seite bestimmen. E) Mithilfe der Cosinusfunktion kann man eine Projektion einer geneigten Länge auf die dem Neigungswinkel gegenüberliegende senkrechte Seite bestimmen. F) Auch der Winkel, der der Hypotenuse gegenüberliegt, kann mithilfe von Seitenverhältnissen ermittelt werden.	

Lösung:
1) A) b; B) b; C) a; D) a 2) $\sin(\varphi) = \frac{\text{Gegenkathete von } \varphi}{\text{Hypotenuse}}$; $\cos(\varphi) = \frac{\text{Ankathete von } \varphi}{\text{Hypotenuse}}$; $\tan(\varphi) = \frac{\text{Gegenkathete von } \varphi}{\text{Ankathete von } \varphi}$
3) siehe Seite 261 4) A) $\alpha \approx 20{,}18°$; B) $\beta \approx 69{,}82°$; C) $\gamma \approx 19{,}03°$ 5) siehe Seite 262
6) A) Falsch, weil diese Verhältnisse nur in rechtwinkligen Dreiecken gelten. B) Falsch, weil 100 % Steigung einem Steigungswinkel von 45° entspricht. C) Richtig. D) Richtig. E) Falsch, weil der Cosinus mithilfe der Ankathete berechnet wird. F) Falsch, weil die Hypotenuse dem rechten Winkel gegenüber liegt und es zwei Ankatheten gibt.

8 Geometrie des Raumes

Viele technische Objekte sind aus geometrischen Körpern zusammengesetzt. Dabei versteht man unter einem Körper einen durch ebene oder gekrümmte Flächen begrenzten Teil des Raums, wie zum Beispiel Würfel, Pyramide oder Kugel. Häufig ist es notwendig, die Masse, das Volumen oder die Oberfläche solcher Objekte zu bestimmen. Wir werden daher in diesem Abschnitt vor allem die Oberflächen und Rauminhalte einfacher geometrischer Körper berechnen.

8.1 Grundbegriffe

AD **8.1** Welche dieser Körper kannst du aus Papier mithilfe einer Schere und Klebstoff basteln? Bei welchen Körpern ist das nicht möglich? Begründe deine Antworten.

AD **8.2** In der Unterstufe hast du bereits geometrische Körper kennen gelernt. Nenne einige und gib die zugehörige Volumenformel an.

Die (Größe der) **Oberfläche** eines Körpers ist die Summe der Flächeninhalte aller Flächen, die den Körper begrenzen. Hat der Körper eine Grundfläche oder Grund- und Deckfläche, so bezeichnet man die anderen Flächen als **Mantelfläche**. So besteht zum Beispiel die Oberfläche der dargestellten Abflussrinne aus sechs Flächen, die eben oder gekrümmt sind. Die ebenen Flächen sind bereits bekannte ebene Figuren, die gekrümmten Flächen können zum Beispiel durch „Aufwicklung“ oder „Verbiegen“ ebener Figuren entstehen. Mit Ausnahme der Kugel werden wir hier Körper behandeln, deren Begrenzungsflächen nicht oder nur nach einer Richtung gekrümmt sind. Die Formeln für die Oberfläche werden in den jeweiligen Abschnitten behandelt, da sie sich in ihrer Bauart deutlich unterscheiden.

Rechteck
Rechteck
Rechteck
Kreisring

Das Volumen (der Rauminhalt) gibt an, welchen Raum ein Körper ausfüllt. Die Formeln für das **Volumen** der verschiedenen Körper sind von ähnlicher Bauart und werden daher allgemein behandelt.

Für das Volumen von Körpern, deren Schnittfläche auf jeder Höhe kongruent zur Grundfläche ist, gilt:

$$V = G \cdot h$$

Volumen = Grundfläche mal Höhe

Für das Volumen von Körpern, deren Schnittfläche sich, ausgehend von der Grundfläche, mit zunehmender Höhe quadratisch zu einer Spitze verkleinert, gilt:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Volumen = $\frac{1}{3}$ mal Grundfläche mal Höhe

- Wenn nicht anders angegeben, wird in diesem Abschnitt unter der Schnittfläche immer eine Fläche, die durch einen Schnitt parallel zur Grundfläche entstanden ist, verstanden.
- „Quadratisch verkleinern“ bedeutet: Wird zum Beispiel eine Pyramide auf halber Höhe geschnitten, so sind die Kanten der Schnittfläche halb so lang wie die Kanten der Grundfläche, die Schnittfläche hat daher ein Viertel der Größe der Grundfläche.

Satz von Cavalieri

Bonaventura Cavalieri (italienischer Mathematiker, 1598 –1647) verallgemeinerte die beiden Volumenformeln. Dabei wird von Körpern gleicher Höhe ausgegangen.

Satz von Cavalieri: Das Volumen zweier Körper ist gleich, wenn sie auf gleicher Höhe stets Schnittflächen mit gleichem Flächeninhalt haben.

Überlege: Wir zerschneiden das in Abb. 8.1 links dargestellte gerade Prisma in quaderförmige Scheiben. Werden die Scheiben entsprechend bewegt, entstehen die drei anderen dargestellten Körper. Aus dem geraden Prisma entsteht ein schiefes, ein „gebogenes" oder ein „verdrehtes" Prisma. Das Volumen ändert sich dabei nicht, es ist für alle vier Körper dasselbe. Um keine treppenförmigen, sondern glatte Körper zu erhalten, muss nur die Höhe der Scheiben sehr, sehr klein gemacht werden. Wie dies mit Mitteln der Mathematik möglich ist, kann erst in Band 3 gezeigt werden.

Abb. 8.1

Diese Methode ist von der Form der Grundfläche unabhängig. Es haben daher auch die beiden in Abb. 8.2 dargestellten Körper dasselbe Volumen.

Abb. 8.2

Mithilfe des Satzes von Cavalieri kann die **Volumenformel für spitze Körper** bewiesen werden. Ein Quader wird – wie in Abb. 8.3 dargestellt – in drei vierseitige Pyramiden zerschnitten. Die untere dreieckige Seitenfläche der **roten Pyramide** und die der **blauen Pyramide** teilen die Grundfläche des Quaders in zwei gleich große Flächen mit dem Flächeninhalt $A = \frac{a \cdot b}{2}$.

Abb. 8.3

Wird der Quader in beliebiger Höhe parallel zur Grundfläche durchgeschnitten, so sind die **grün eingezeichneten Schnittflächen** auf den beiden Pyramiden **gleich große Trapeze**, denn für den Flächeninhalt gilt jeweils $A = \frac{a \cdot b}{2} - \frac{x \cdot y}{2}$. Die Schnittflächen der roten und der blauen Pyramide haben somit in jeder Höhe den gleichen Flächeninhalt und nach dem Satz von Cavalieri das gleiche Volumen. Werden die gleichen Überlegungen, ausgehend von den vorderen Seitenflächen, mit der **schwarzen Pyramide** und der **blauen Pyramide** durchgeführt, so ergibt sich auch für die schwarze Pyramide das gleiche Volumen. Damit hat jede der drei Pyramiden, deren Schnittfläche sich, ausgehend von einer rechteckigen Grundfläche, zu einer Spitze verjüngt, ein Drittel des Volumens des Quaders.

Diese Formel $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ gilt für jeden Körper, der sich quadratisch zu einer Spitze verjüngt, da es immer eine gleich hohe Pyramide mit gleich großer, rechteckiger Grundfläche gibt.

8.3 Gib eine Formel zur Berechnung des Volumens des folgenden Körpers an. (A)
a) Würfel ***b)*** Quader ***c)*** Pyramide mit quadratischer Grundfläche

8.4 Skizziere einen geraden und einen schiefen Körper, für die die folgende Volumenformel gilt. Kennzeichne die angegebenen Größen. (BC)
a) $V = a^2 \cdot h$ ***b)*** $V = a \cdot b \cdot h$ ***c)*** $V = r^2 \cdot \pi \cdot h$ ***d)*** $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$ ***e)*** $V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \pi \cdot h$

8.2 Prisma

Ein Körper, dessen Grund- und Deckfläche zueinander parallele, kongruente Vielecke sind, heißt **Prisma**. Die Seitenflächen sind Parallelogramme. Die Höhe des Prismas ist der Abstand der Deckfläche von der Grundfläche.

Beim **geraden Prisma** steht die Verbindung des Mittelpunkts der Deckfläche mit dem Mittelpunkt der Grundfläche im rechten Winkel zur Grundfläche, die Seitenflächen sind dann Rechtecke. Andernfalls spricht man von einem **schiefen Prisma**. Ein gerades Prisma, dessen Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck ist, heißt **regelmäßiges Prisma**. Spezielle Prismen sind der **Würfel** und der **Quader**.

Gerades fünfseitiges Prisma

Schiefes dreiseitiges Prisma

Prisma

Volumen des Prismas	$V = G \cdot h$
Oberfläche des Prismas	$O = 2 \cdot G + M$
Volumen des Quaders	$V = a \cdot b \cdot c$
Oberfläche des Quaders	$O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$
Volumen des Würfels	$V = a^3$
Oberfläche des Würfels	$O = 6 \cdot a^2$

d ... Raumdiagonale,
d′ ... Flächendiagonale

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ $\quad d = a \cdot \sqrt{3}$

ABD **8.5** Ein 2 m langer Stab aus Stahl (Dichte $\rho = 7{,}86\,\frac{kg}{dm^3}$) hat den angegebenen Querschnitt. Erkläre, um welchen Körper es sich handelt. Berechne das Volumen und die Masse des Stabs.

Maße in mm

Lösung:
Der Stab ist ein gerades Prisma mit einem Achteck als Grundfläche und einer Höhe von 2 m.

$G = 30\text{ mm} \cdot 30\text{ mm} - 4 \cdot \frac{10\text{ mm} \cdot 10\text{ mm}}{2} = 900\text{ mm}^2 - 200\text{ mm}^2 = 700\text{ mm}^2$

$V = G \cdot h = 700\text{ mm}^2 \cdot 2\,000\text{ mm} = 1\,400\,000\text{ mm}^3 = 1{,}4\text{ dm}^3$

$m = V \cdot \rho = 1{,}4\text{ dm}^3 \cdot 7{,}86\,\frac{kg}{dm^3} = 11{,}004\text{ kg} \approx 11\text{ kg}$

AB **8.6** Eine Säule hat die Form eines schiefen Prismas mit quadratischer Grundfläche, die Abmessungen sind aus der Zeichnung zu entnehmen. Wie viel Kubikmeter Beton werden für eine Säule benötigt, wenn die Stahlbewehrung der Säule 20 % des Gesamtvolumens ausmacht?

Lösung:

$\tan(\alpha) = \frac{30\text{ cm}}{h} \;\Rightarrow\; h = \frac{30\text{ cm}}{\tan(\alpha)} \;\Rightarrow\; h = \frac{30\text{ cm}}{\tan(10°)} = 170{,}138...\text{ cm} \approx 170{,}1\text{ cm}$

$V = G \cdot h = (50\text{ cm})^2 \cdot 170{,}138...\text{ cm} = 425\,346{,}136...\text{ cm}^3 = 0{,}425...\text{ m}^3$

$V_{Beton} = 0{,}425...\text{ m}^3 \cdot 0{,}80 = 0{,}340...\text{ m}^3 \approx 0{,}34\text{ m}^3$

8.7 Beschreibe mit eigenen Worten einen **1)** Würfel, **2)** Quader. D

8.8 Ein Liter Getränk wird oft in quaderförmigen Verpackungen, wie die hier dargestellten, abgefüllt. ABC
1) Berechne jeweils die Höhe der Verpackung, wenn über der Flüssigkeit ein 1 cm hoher Leerraum verbleiben soll.
2) Wie viel Verpackungsmaterial wird jeweils für eine Packung benötigt, wenn Klebelaschen und Verschnitt nicht berücksichtigt werden? Interpretiere das Ergebnis.

h_1 a = 10 cm b = 7 cm h_2 a = 8 cm a = 8 cm

8.9 Berechne die Oberfläche und das Volumen eines Würfels mit der Raumdiagonale d. B
Hinweis: $d = a \cdot \sqrt{3}$
a) d = 15 cm **b)** d = 5,34 cm **c)** d = 4,1 m

8.10 Gegeben sind die Länge a, die Breite b und die Raumdiagonale d eines Quaders. Berechne das Volumen und die Oberfläche. B
a) a = 2 cm, b = 5 cm, d = 12 cm **b)** a = 0,23 m, b = 0,45 m, d = 1,22 m

8.11 Berechne das Volumen und die Oberfläche eines Keils mit den in Abb. 8.4 gegebenen Abmessungen. Dokumentiere deine Rechenschritte. BC

15° 7,3 cm 4,2 cm

Abb. 8.4

8.12 Wie ändert sich das Volumen eines Quaders, wenn man D
1) eine Seitenlänge verdoppelt? **3)** alle Seitenlängen verdoppelt?
2) zwei Seitenlängen verdoppelt? **4)** eine Seitenlänge verdoppelt und eine halbiert?

8.13 Ein Entlüftungsschacht aus Blech mit quadratischem Querschnitt hat die in Abb. 8.5 angegebene Form (Maße in Meter). ABD
Reichen 4 m² Blech für die Anfertigung aus?

0,7 2 0,7 0,42

Abb. 8.5

8.14 Berechne das Volumen und die Oberfläche eines regelmäßigen Prismas mit der gegebenen Form mit der Kantenlänge a = 5 cm und der Höhe h = 14 cm. B
a) dreiseitig **b)** fünfseitig **c)** sechsseitig **d)** achtseitig

8.15 Die Länge der Kanten der Grundfläche eines schiefen Prismas beträgt a = 7,2 mm, die Länge der Seitenkanten s = 15,3 mm. Die Seitenkanten sind zur Grundfläche unter dem Winkel α = 64° geneigt. Berechne das Volumen des Prismas mit der gegebenen Grundfläche. AB
a) gleichseitiges Dreieck **b)** regelmäßiges Sechseck **c)** Quadrat

8.16 Berechne das Volumen des skizzierten Werkstücks (Maße in Zentimeter). AB
a) 2,4 1,3 1,3 3,8 3,2
b) 0,7 1,2 0,6
c) 12 1,1 3,3 0,5

8.17 In einem Prisma wird die Anzahl der Ecken mit e, die der Kanten mit k und die der Flächen mit f bezeichnet. Berechne für die gegebenen Prismen jeweils (e – k + f). Was fällt dir dabei auf? Recherchiere im Internet, ob deine Beobachtung nur für diese Körper gilt. BC
1) Würfel **2)** dreiseitiges Prisma **3)** sechsseitiges Prisma **4)** achtseitiges Prisma

AB **8.18** Berechne das Volumen („Inhalt des umbauten Raums") des abgebildeten Gebäudes (Maße in Meter).

a) ***b)*** ***c)*** ***d)***

AB **8.19** Berechne die Masse eines 1 m langen Profilstahls (Dichte $\rho = 7{,}86\,\frac{kg}{dm^3}$) mit dem angegebenen Querschnitt (Maße in Millimeter).

a) ***b)*** ***c)*** ***d)***

AB **8.20** Der Querschnitt einer 5,5 m langen Abflussrinne ist ein gleichschenkliges Trapez. Berechne, wie viel Quadratmeter Fliesen zur Auskleidung der Rinne benötigt werden.

a) Höhe h = 0,6 m

b) Neigung der Seitenflächen $\alpha = 70°$

ABC **8.21** Um Überschwemmungen zu vermeiden, wird ein 2 m hoher Schutzdamm mit dem angegebenen Querschnitt errichtet. Berechne, wie viel Kubikmeter Schüttmaterial benötigt werden, wenn die Neigung der seitlichen Dammflächen 2 : 3 beträgt und der Damm 200 m lang ist. Gib an, was das Verhältnis 2 : 3 bedeutet und überprüfe, ob die abgebildete Skizze in dieser Form stimmen kann.

ABCD **8.22** Ein 10 m breites Schwimmbecken mit dem angegebenen Längsschnitt wird mit 10 Liter Wasser pro Sekunde befüllt.

1) Die Zeichnung enthält keine Informationen zu den Längeneinheiten. Wähle eine sinnvolle Längeneinheit und begründe deine Entscheidung.

2) Berechne, ob das vollständige Befüllen innerhalb eines halben Tags möglich ist.

AB **8.23** Um wie viel Meter würde der Wasserspiegel des Bodensees (Oberfläche = 536 km^2) steigen, wenn (theoretisch) die gesamte Menschheit darin tauchte? Rechne mit 7,0 Milliarden Menschen zu je 70 kg und einer mittleren Dichte von $1{,}0\,\frac{kg}{dm^3}$.

A **8.24** Leite die Formel zur Berechnung der Raumdiagonalen eines

a) Würfels, ***b)*** Quaders her.

8.3 Zylinder

Ein Körper, dessen Grundfläche und Deckfläche kongruente, zueinander parallele Kreisflächen sind, heißt **Kreiszylinder**. Die Höhe des Kreiszylinders ist der Abstand der Deckfläche von der Grundfläche. Die Zylinderachse verläuft durch den Mittelpunkt der Grundfläche und durch den Mittelpunkt der Deckfläche.

Beim **geraden Kreiszylinder** oder **Drehzylinder** steht die Zylinderachse im rechten Winkel zur Grundfläche, beim **schiefen Kreiszylinder** steht sie schräg dazu.

Ein gerader Kreiszylinder heißt **gleichseitig**, wenn der Durchmesser der Grundfläche gleich der Höhe des Zylinders ist.

Zur Berechnung der Oberfläche denken wir uns den Mantel des geraden Kreiszylinders an einer Stelle parallel zur Höhe aufgeschnitten und in die Ebene abgewickelt. Die entstehende ebene Figur ist ein Rechteck mit der Länge $2r\pi$ und der Breite h. Für die Mantelfläche gilt daher $M = 2r\pi \cdot h$. Für die Oberfläche addieren wir die Flächeninhalte von Grund- und Deckfläche: $O = 2r\pi \cdot h + 2 \cdot r^2\pi = 2r\pi \cdot (h + r)$.

Volumen des Kreiszylinders	$V = G \cdot h = r^2\pi \cdot h$
Oberfläche des geraden Kreiszylinders	$O = 2r\pi \cdot (h + r)$
Mantelfläche des geraden Kreiszylinders	$M = 2r\pi \cdot h$

Weitere in der Technik häufig vorkommende Formen, die aus geraden Kreiszylindern entstehen, sind der **Hohlzylinder** und der **schräg abgeschnittene Zylinder**.

Das Volumen des Hohlzylinders wird berechnet, indem man das Volumen des inneren Zylinders (Hohlraum) vom Volumen des gesamten Zylinders subtrahiert: $V = r_a^2\pi h - r_i^2\pi h$. Die Oberfläche des Hohlzylinders besteht aus zwei Kreisringen und zwei Rechtecken: $O = 2\pi \cdot (r_a^2 - r_i^2) + 2r_a\pi \cdot h + 2r_i\pi \cdot h$.

Volumen des Hohlzylinders	$V = (r_a^2 - r_i^2) \cdot \pi \cdot h$
Oberfläche des Hohlzylinders	$O = 2\pi \cdot [r_a^2 - r_i^2 + h \cdot (r_a + r_i)]$

Um das Volumen des schräg abgeschnittenen Zylinders zu berechnen, denken wir uns den über die im Kreismittelpunkt gemessene Höhe h hinaus gehenden Teil abgeschnitten und vorne angefügt. Der entstehende Körper ist ein gerader Kreiszylinder mit der Höhe h.

Volumen und Mantelfläche des schräg abgeschnittenen Zylinders können daher ebenfalls mit den angegebenen Formeln für den geraden Kreiszylinder berechnet werden. Die Höhe h ist das arithmetische Mittel der beiden Höhen h_1 und h_2 mit $h = \frac{1}{2} \cdot (h_1 + h_2)$.

Die schräge Deckfläche ist eine Ellipse. Wenn der Neigungswinkel der Fläche bekannt ist, kann deren Flächeninhalt mithilfe des Flächenprojektionssatzes berechnet werden.

BD **8.25** Eine Walze aus Stahl (Dichte $\rho = 7{,}85\,\frac{kg}{dm^3}$) hat 30 cm Durchmesser und eine Länge von 1 m.

1) Erkläre, welche Einheiten du beim Rechnen verwendest.

2) Berechne das Volumen, die Masse und die Oberfläche der Walze.

Lösung:

1) Ich verwende kg und dm, da die Dichte in kg pro dm^3 gegeben ist.

2) $V = r^2\pi \cdot h = (1{,}5\,dm)^2 \cdot \pi \cdot 10\,dm = 70{,}685...\,dm^3 \approx 71\,dm^3$

$m = V \cdot \rho = 70{,}685...\,dm^3 \cdot 7{,}85\,\frac{kg}{dm^3} = 554{,}883...\,kg \approx 555\,kg$

$O = 2r\pi \cdot (h + r) = 2 \cdot 1{,}5\,dm \cdot \pi \cdot (10\,dm + 1{,}5\,dm) = 108{,}384...\,dm^2 \approx 108\,dm^2$

B **8.26** Berechne die Masse eines 2,20 m langen Kupferrohrs ($\rho = 8{,}9\,\frac{kg}{dm^3}$) mit 2,4 cm Außendurchmesser und 2 mm Wandstärke.

Lösung:

innerer Radius = äußerer Radius – Wandstärke

$r_i = 0{,}12\,dm - 0{,}02\,dm = 0{,}1\,dm$

$V = (r_a^2 - r_i^2) \cdot \pi \cdot h = [(0{,}12\,dm)^2 - (0{,}1\,dm)^2] \cdot \pi \cdot 22\,dm = 0{,}304...\,dm^3$

$m = V \cdot \rho = 0{,}304...\,dm^3 \cdot 8{,}9\,\frac{kg}{dm^3} = 2{,}706...\,kg \approx 2{,}71\,kg$

B **8.27** Ein Lampengehäuse hat die Form eines schräg abgeschnittenen Drehzylinders. Sein Durchmesser beträgt d = 12 cm, an der „höchsten" Stelle ist es $h_1 = 14$ cm und an der „niedrigsten" Stelle $h_2 = 8$ cm hoch. Wie groß sind das Volumen und die Mantelfläche des Gehäuses?

Lösung:

$h = \frac{1}{2} \cdot (h_1 + h_2) = \frac{1}{2} \cdot (14\,cm + 8\,cm) = 11\,cm$

$V = r^2\pi \cdot h = (6\,cm)^2 \cdot \pi \cdot 11\,cm = 1\,244{,}070...\,cm^3 \approx 1\,244\,cm^3$

$M = 2r\pi \cdot h = 2 \cdot 6\,cm \cdot \pi \cdot 11\,cm = 414{,}690...\,cm^2 \approx 415\,cm^2$

AD **8.28** Beschreibe, welche Abmessungen ein Drehzylinder hat, der durch Drehung eines A4-Blatts entsteht, wenn es

1) um eine der längeren Seiten,

2) um eine der kürzeren Seiten,

3) um die längere Mittellinie,

4) um die kürzere Mittellinie gedreht wird.

B **8.29** Berechne das Volumen des schiefen Kreiszylinders.

a) $\overline{M_1M_2} = 75\,cm$, $\varphi = 80°$, $r = 20\,cm$

b) $\overline{M_1M_2} = 23{,}5\,mm$, $\varphi = 40{,}2°$, $r = 16{,}7\,mm$

c) $\overline{M_1M_2} = 124\,cm$, $\varphi = 57°$, $r = 48\,dm$

AB **8.30** Cannelloni sind 12 cm lange Hohlnudeln mit einem Durchmesser von 4 cm. Aus einer Teigmenge können 0,75 m^2 Nudelteig ausgerollt werden. Wie viele Nudeln können daraus geformt werden? Welche Vereinfachungen müssen für die Berechnung gemacht werden?

8.31 Berechne die Höhe eines gleichseitigen Drehzylinders mit einem Volumen von 1 Liter. **B**

8.32 Ein rechteckiges Blech mit 60 cm x 80 cm kann entlang der Länge oder der Breite zu einem Rohr gebogen werden. Haben beide Rohre das gleiche Volumen? Begründe deine Entscheidung ohne die Berechnung durchzuführen. **AD**

8.33 Bei der Errichtung eines Hauses werden 52 m Kupferrohr mit der Dichte $\rho = 8{,}9\,\frac{kg}{dm^3}$ mit 2,54 cm (1 Zoll) Außendurchmesser und 2 mm Wandstärke verwendet. Berechne die Masse des benötigten Kupfers. **AB**

8.34 Das abgebildete Stahlrohr hat einen Außendurchmesser von 82 cm und eine Wandstärke von 18 mm. Berechne das Volumen und die Masse (Dichte $\rho = 7\,850\,\frac{kg}{m^3}$). Begründe, warum es sinnvoll ist, dabei die Dichte in einer anderen Einheit anzugeben. **BD**

8.35 Berechne den Materialbedarf (Mantelfläche) des knieförmigen Rohrstücks (Maße in Millimeter). Dokumentiere deine Vorgehensweise bei der Berechnung. **BC**

a) ***b)*** ***c)*** ***d)***

8.36 Bindedraht aus Eisen (Dichte $\rho = 7{,}87\,\frac{kg}{dm^3}$) mit 0,4 mm Durchmesser ist auf einer Kunststoffspule aufgewickelt. **AB**

1) Berechne die Länge des Drahts, wenn die Gesamtmasse 200 g und die Masse der Kunststoffspule 35 g beträgt.

2) Berechne das Volumen der leeren Spule.

8.37 In einer Parkanlage sollen Abflussrinnen aus Beton (Dichte $\rho = 2{,}4\,\frac{kg}{dm^3}$) mit dem angegebenen Querschnitt und einer Gesamtlänge von 250 m eingebaut werden. Berechne, wie viele LKW-Fuhren für die Anlieferung der Rinnen notwendig sind, wenn ein LKW mit maximal 4,7 t beladen werden kann. **ABC**

8.38 Ein Häferl ist mit 0,2 Liter Kakao gefüllt. Bernhard trinkt mit einem 15 cm langen Strohhalm mit einem Durchmesser von 6 mm und einer Durchflussgeschwindigkeit von $0{,}45\,\frac{m}{s}$ das Häferl leer. Wie viel Milliliter Kakao trinkt Bernhard pro Sekunde? **AB**

8.39 Zwei miteinander verbundene (kommunizierende) zylindrische Gefäße mit den angegebenen Durchmessern sind zur Hälfte mit Flüssigkeit gefüllt. Berechne, um wie viel Zentimeter sich der Flüssigkeitsstand im größeren Gefäß erhöht, **BD**

a) wenn er im kleineren durch einen Kolben um 5 cm gesenkt wird.

b) wenn in einem der beiden Gefäße 1 ℓ Flüssigkeit zugefügt wird. Warum mach es keinen Unterschied, in welches Gefäß der Liter zugefügt wird? Begründe deine Antwort.

8.4 Pyramide

Die **Pyramide** ist ein spitzer Körper, dessen Grundfläche ein Vieleck ist. Die Seitenflächen sind Dreiecke, die einen Eckpunkt, die Spitze der Pyramide, gemeinsam haben. Die Höhe der Pyramide ist der Abstand der Spitze von der Grundfläche. Steht die Verbindung der Spitze mit dem Mittelpunkt der Grundfläche im rechten Winkel zur Grundfläche, so heißt die Pyramide **gerade Pyramide**, andernfalls **schiefe Pyramide**. Eine gerade Pyramide, deren Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck ist, heißt **regelmäßige Pyramide**.

Volumen der Pyramide	$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$
Oberfläche der Pyramide	$O = G + M$

B **8.40** Ein Tetraeder ist eine regelmäßige dreiseitige Pyramide. Die Seitenflächen sind gleichseitige Dreiecke. Berechne die angegebenen Größen, wenn die Seitenlänge a = 4 cm ist.

1) Höhe ***3)*** Neigung der Seitenkanten
2) Volumen ***4)*** Neigung der Seitenflächen

Lösung:

1) $h_a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4\text{ cm} = 3{,}464...\text{ cm}$

$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot h_a\right)^2} =$

$= \sqrt{(4\text{ cm})^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot 3{,}464...\text{ cm}\right)^2} = 3{,}265...\text{ cm} \approx 3{,}27\text{ cm}$

- h_a ... Höhe der Grundfläche
- Der Mittelpunkt eines gleichseitigen Dreiecks drittelt die Höhe.

2) $G = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (4\text{ cm})^2 = 6{,}928...\text{ cm}^2$

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6{,}928...\text{ cm}^2 \cdot 3{,}265...\text{ cm} = 7{,}542...\text{ cm}^3 \approx 7{,}54\text{ cm}^3$

3) $\cos(\alpha) = \frac{\frac{2}{3} \cdot h_a}{a} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 3{,}464...\text{ cm}}{4\text{ cm}} = 0{,}577... \Rightarrow \alpha = \arccos(0{,}577) = 54{,}735...° \approx 54{,}7°$

4) $\cos(\varepsilon) = \frac{\frac{1}{3} \cdot h_a}{h_a} = \frac{1}{3} \Rightarrow \varepsilon = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) = 70{,}528...° \approx 70{,}5°$

AB **8.41** Die Grundfläche eines Erkers ist die Hälfte eines regelmäßigen Sechsecks mit der Seitenlänge a = 2,0 m. Der Erker soll mit einem pyramidenförmigen Blechdach überdacht werden. Die Spitze der Pyramide liegt auf der hinteren Gebäudewand h = 3,2 m über der Grundfläche der Pyramide. Berechne den Blechbedarf und die Neigung der Dachflächen.

Lösung:

$h_a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2{,}0\text{ m} = 1{,}732...\text{ m}$

$h_1 = \sqrt{h^2 + h_a^2} = \sqrt{(3{,}2\text{ m})^2 + (1{,}732...\text{ m})^2} = 3{,}638...\text{ m}$

$A = 3 \cdot \frac{a \cdot h_1}{2} = 3 \cdot \frac{2{,}0\text{ m} \cdot 3{,}638...\text{ m}}{2} = 10{,}916...\text{ m}^2 \approx 11\text{ m}^2$

$\cos(\alpha) = \frac{h_a}{h_1} = \frac{1{,}732...\text{ m}}{3{,}638...\text{ m}} = 0{,}476... \Rightarrow \alpha = \arccos(0{,}476...) = 61{,}574...° \approx 62°$

- h_a ... Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge a

8.42 Zeichne eine regelmäßige Pyramide und kennzeichne die folgenden Elemente. D
1) Seitenkante **2)** Grundkante **3)** Seitenflächenhöhe **4)** Körperhöhe

8.43 Berechne das Volumen und die Oberfläche der regelmäßigen quadratischen Pyramide. B
a) a = 5 mm, h = 7 mm **b)** a = 67,89 m, h = 21,44 m

8.44 Berechne die Höhe der regelmäßigen dreiseitigen Pyramide. B
a) a = 4 m, V = 33 m^3 **b)** a = 6 cm, O = 128 cm^2

8.45 Wie ändert sich das Volumen einer quadratischen Pyramide, wenn man D
1) die Grundkante, **2)** die Höhe verdoppelt?

8.46 Begründe, ob x m^2 Blech für die Oberfläche einer sechsseitigen Pyramide ausreichen. B
a) a = 8 m, h = 12 m, x = 500 **b)** a = 5 m, V = 110 m^3, x = 200

8.47 Eine schiefe Pyramide hat eine rechteckige Grundfläche mit den gegebenen Abmessungen. Berechne das Volumen und die Oberfläche, wenn die Spitze der Pyramide genau über dem Mittelpunkt der kürzeren Rechteckseite liegt. ABC
Dokumentiere deine Überlegungen zur Berechnung der Oberfläche, wenn a = 2,4 m, b = 2,1 m und h = 3,3 m gilt.

8.48 Eine schiefe Pyramide hat eine quadratische Grundfläche mit den gegebenen Abmessungen. Berechne das Volumen und die Oberfläche, wenn die Spitze der Pyramide genau über einem Eckpunkt der Grundfläche liegt. AB
a) a = 2,4 m, h = 5,8 m **b)** a = 12,5 mm, h = 17,3 mm

8.49 Ein Senklot aus Messing (Dichte $\rho = 8{,}5\,\frac{kg}{dm^3}$) hat die Form eines Oktaeders mit a = 3,5 cm Seitenlänge. Das Oktaeder besteht aus zwei quadratischen Pyramiden, bei denen alle Kanten die gleiche Länge haben. Begründe, ob 2 kg Messing zum Guss für 10 solcher Lote ausreichen. ABD

8.50 Das Dachgeschoß eines Turms mit quadratischer Grundfläche hat die Form eines Würfels mit der Seitenlänge a, von dem vier schiefe Pyramiden abgeschnitten sind. AB
1) Berechne den Rauminhalt des Dachgeschoßes.
2) Wie viel Quadratmeter Kupferblech werden für das Decken des Dachs benötigt?
3) Welche Masse hat das benötigte Kupferblech (Dichte $\rho = 8{,}9\,\frac{kg}{dm^3}$), wenn die Dicke des Blechs 1,2 mm beträgt?

Alle Angaben in Meter.

8.51 Die 1989 vor dem Louvre in Paris errichtete quadratische Glaspyramide überdacht den Eingang des Museums. Die Seitenlänge der Grundfläche beträgt 35 m und der Inhalt des umbauten Raums 8 841 m^3. AB
1) Berechne die Höhe der Pyramide.
2) Welche Neigung haben die Seitenflächen?
3) Wie viel Quadratmeter Glasfläche hat die Pyramide?
4) Berechne die Masse der Glasscheiben, wenn das verwendete Glas eine Dichte von $2{,}5\,\frac{kg}{dm^3}$ hat und die Scheiben 2,08 cm dick sind.

8.5 Kegel

Der **Kreiskegel** ist ein spitzer Körper, dessen Grundfläche ein Kreis ist. Die Höhe des Kreiskegels ist der Abstand der Spitze von der Grundfläche. Die Kegelachse verläuft durch den Mittelpunkt der Grundfläche und durch die Kegelspitze. Beim **geraden Kreiskegel** (**Drehkegel**) steht diese Kegelachse im rechten Winkel zur Grundfläche, beim **schiefen Kreiskegel** steht sie schräg zur Grundfläche.

Ein gerader Kreiskegel heißt **gleichseitig**, wenn der Durchmesser der Grundfläche gleich der Höhe ist.

Denken wir uns den Mantel des geraden Kreiskegels an einer Stelle von der Grundfläche zur Spitze längs einer Geraden aufgeschnitten, so kann er in die Ebene abgewickelt werden. Die entstehende ebene Figur ist ein Kreisausschnitt. Sein Radius ist die Erzeugende (Mantelstrecke) s, die Bogenlänge $b = 2r\pi$ ist der Umfang der Grundfläche des Kegels.

Der Flächeninhalt dieses Kreisausschnitts ist $\frac{1}{2} \cdot b \cdot s$. Durch Einsetzen für b ergibt sich die Mantelfläche $M = \frac{1}{2} \cdot 2r\pi \cdot s = r\pi s$. Durch Addieren der Grundfläche erhält man die Oberfläche $O = G + M = r^2\pi + r\pi s = r\pi \cdot (r + s)$.

Der **Öffnungswinkel** des geraden Kreiskegels ist der Winkel, den zwei gegenüber liegende Erzeugende miteinander einschließen.
Da h, r und s beim geraden Kreiskegel ein rechtwinkliges Dreieck bilden, gilt:
$s^2 = h^2 + r^2$

Volumen des Kreiskegels	$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot r^2\pi \cdot h$
Oberfläche des geraden Kreiskegels	$O = r\pi \cdot (r + s)$
Mantelfläche des geraden Kreiskegels	$M = r\pi s$

AB **8.52** Die Oberfläche O eines Drehkegels mit dem Radius r = 2,1 m beträgt 32 m². Berechne folgende Größen.
1) Mantelfläche ***2)*** Höhe

Lösung:
1) $O = G + M \Rightarrow M = O - G$ mit $G = r^2\pi = (2{,}1\text{ m})^2 \cdot \pi = 13{,}854...\text{ m}^2$
$M = O - G = 32\text{ m}^2 - 13{,}854...\text{ m}^2 = 18{,}145...\text{ m}^2 \approx 18{,}1\text{ m}^2$

2) $h^2 = s^2 - r^2$
$M = r\pi s \Rightarrow s = \frac{M}{r\pi} \Rightarrow s = \frac{18{,}145...\text{ m}^2}{2{,}1\text{ m} \cdot \pi} = 2{,}750...\text{ m}$
$h = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{(2{,}750...\text{ m})^2 - (2{,}1\text{ m})^2} =$
$= 1{,}776...\text{ m} \approx 1{,}78\text{ m}$

● Die Mantelstrecke s wird aus der Formel für die Mantelfläche ermittelt.

ABC

8.53 Ein Einfülltrichter mit einer sehr kleinen Öffnung hat die Form eines schiefen Kreiskegels mit dem Radius r = 0,32 m. Der Abstand des Mittelpunkts der Grundfläche von der Spitze beträgt 1,20 m und die Kegelachse ist gegenüber der Grundfläche unter 70° geneigt. Berechne die Höhe und das Volumen des Kegels. Dokumentiere deine Überlegungen.

Lösung:
Die Verbindung des Mittelpunkts M mit der Spitze S ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Kegelhöhe h als Gegenkathete zum Neigungswinkel α.

$\sin(\alpha) = \frac{h}{\overline{MS}} \Rightarrow h = \overline{MS} \cdot \sin(\alpha)$

$h = 1{,}20\text{ m} \cdot \sin(70°) = 1{,}127\ldots\text{ m} \approx 1{,}13\text{ m}$

$V = \frac{1}{3}r^2\pi h = \frac{1}{3} \cdot (0{,}32\text{ m})^2 \cdot \pi \cdot 1{,}127\ldots\text{ m} = 0{,}120\,9\ldots\text{ m}^3 \approx 0{,}12\text{ m}^3$

Technologieeinsatz: Geometrie des Raumes

TE

Excel

ZB: Es soll ein Arbeitsblatt erstellt werden, mit dem aus zwei Bestimmungsstücken eines Drehkegels die restlichen Größen berechnet werden können.

Bereite das Arbeitsblatt wie in der Abbildung dargestellt vor. Zur besseren Übersicht sind die Angabeelemente grau hinterlegt (**Füllfarbe**). Nun können die Formeln eingegeben werden, wobei für π die Funktion **PI()** verwendet wird:

	A	B	C	D
1	**Drehkegel**			
2				
3	Gegeben:	r, h	r, s	s, h
4	r =	2,00		
5	h =	3,00		
6	s =			
7	V =			
8	M =			
9	O =			

$s = \sqrt{r^2 + h^2}$ B6: **=Wurzel(B4^2+B5^2)**

$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$ B7: **=PI()*B4^2*B5/3**

$M = \pi \cdot r \cdot s$ B8: **=PI()*B4*B6**

$O = \pi \cdot r \cdot (r + s)$ B9: **=PI()*B4*(B4+B6)**

	A	B	
1	**Drehkegel**		
2			
3	Gegeben:	r, h	r, s
4	r =	2,00 cm	
5	h =	3,00 cm	
6	s =	3,61 cm	
7	V =	12,57 cm³	
8	M =	22,65 cm²	
9	O =	35,22 cm²	

Um die Einheiten anzugeben, markiere die Zellen, wähle **Zahl**, **Zellen formatieren** und dort die Registerkarte **Zahlen**. Gehe auf den letzten Punkt **Benutzerdefiniert** und gib bei *Typ:* **0,00 „cm"** ein. Ebenso für Zellen mit cm² und cm³ (hochgestellt: Alt Gr 2).

BC TE

8.54 Setze obige Tabelle wie im nebenstehenden Bild gezeigt fort. Dokumentiere deine Vorgehensweise, gib dazu die verwendeten Formeln an.

	A	B	C	D
1	**Drehkegel**			
2				
3	Gegeben:	r, h	r, s	s, h
4	r =	2,00 cm	4,00 cm	5,29 cm
5	h =	3,00 cm	3,00 cm	6,00 cm
6	s =	3,61 cm	5,00 cm	8,00 cm
7	V =	12,57 cm³	50,27 cm³	175,93 cm³
8	M =	22,65 cm²	62,83 cm²	132,99 cm²
9	O =	35,22 cm²	113,10 cm²	220,95 cm²

B **8.55** Zeichne einen Drehkegel und kennzeichne folgende Elemente: Grundfläche, Mantelfläche, Spitze, Körperhöhe und Achse.

D **8.56** Beschreibe die Unterschiede bzw. Gemeinsamkeiten.
a) Drehzylinder und Kegel ***b)*** Pyramide und Kegel

AD **8.57** Wo bzw. wie kommen Kegel bei Werkstücken oder in der Natur vor? Nenne jeweils mindestens drei Beispiele.

D **8.58** ***a)*** Beschreibe die Form der Mantelfläche eines Drehkegels.
b) Erläutere, welche Unterschiede bzw. Gemeinsamkeiten es zwischen einem geraden und einem schiefen Kegel gibt.

B **8.59** Berechne das Volumen und die Oberfläche des Drehkegels.
a) r = 2 m, h = 5 m ***b)*** d = 56,44 mm, h = 78,52 mm ***c)*** r = 5,8 cm, h = 2,4 cm

AB **8.60** ***1)*** Berechne die Höhe und den Öffnungswinkel eines Schokoladenspitzes mit dem Durchmesser d = 4 cm und einer Oberfläche von 156 cm^2.
2) Wie viel Milliliter Schokoladencreme müssen verwendet werden, um den Spitz zu füllen?

B **8.61** Berechne das Volumen des schiefen Kreiskegels.
a) r = 13 mm, h = 15 mm ***c)*** r = 1,4 m, α = 84°, $\overline{MS}$ = 4,1 m
b) d = 21,1 cm, h = 3,25 dm ***d)*** d = 10,4 dm, α = 31°, $\overline{MS}$ = 31 cm

AB **8.62** Ein Blech hat die Form eines Halbkreises mit 31 cm Radius. Durch Aufwickeln entsteht ein drehkegelförmiger Trichter. Berechne den Radius und das Volumen des Trichters.

AB **8.63** Ein aus einem Blatt Papier herausgeschnittener Kreissektor mit einem Mittelpunktswinkel α = 147° und einem Radius r = 20 cm wird zu einem Drehkegel aufgewickelt. Berechne sein Volumen.

AB **8.64** Für das drehkegelförmige Dach eines Erkers wurden 1 320 Dachziegel verwendet. Berechne die Höhe des Dachs, wenn der Erker 4 m Durchmesser hat und jeder Ziegel eine Fläche von 225 cm^2 bedeckt.

AB **8.65** Berechne das Volumen und den Flächeninhalt der dargestellten Dächer (Maße in Meter).
a) ***b)***

ABC **8.66** In einem Souk werden verschiedene Gewürze in kegelförmigen „Haufen" aufgeschüttet. Die Höhe eines solchen Kegels beträgt 3 dm und der Öffnungswinkel 120°.
1) Berechne den Durchmesser eines Kegels.
2) Berechne das Volumen eines Kegels.
3) Wie viele Packungen zu je 500 g können aus einem kegelförmigen „Haufen" abgepackt werden, wenn ein Gewürz eine Dichte von 1,5 $\frac{g}{cm^3}$ hat?

8.6 Pyramiden- und Kegelstumpf

Ein **Pyramidenstumpf** entsteht durch Abschneiden einer Pyramide parallel zur Grundfläche. Der **gerade Pyramidenstumpf** ist ein Pyramidenstumpf, bei dem die Verbindung des Mittelpunkts der Deckfläche mit dem Mittelpunkt der Grundfläche im rechten Winkel zur Grundfläche steht. Der Pyramidenstumpf heißt **regelmäßiger Pyramidenstumpf**, wenn die Grundfläche zusätzlich ein regelmäßiges Vieleck ist.

Ein **Kegelstumpf** entsteht durch Abschneiden eines Kegels parallel zur Grundfläche. Beim **geraden Kegelstumpf** steht die Kegelachse im rechten Winkel zur Grundfläche, beim **schiefen Kegelstumpf** steht sie schräg zur Grundfläche.

Die Höhe des Stumpfs ist der Abstand der Grundfläche von der Deckfläche.
Man erhält das Volumen des Pyramidenstumpfs, indem man das Volumen der weggeschnittenen Pyramide vom Volumen der ursprünglichen Pyramide subtrahiert. Die gleiche Vorgehensweise ist für den Kegelstumpf möglich. Häufig ist nur die Höhe des Stumpfs angegeben und die Höhen des ursprünglichen und des weggeschnittenen Körpers müssten berechnet werden, um die Volumenformeln verwenden zu können. Wir geben daher – ohne Herleitung – Formeln für das Volumen der beiden Körper an, die nur die Höhe des Stumpfs verwenden.

Volumen des Pyramidenstumpfs	$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (A_1 + \sqrt{A_1 \cdot A_2} + A_2)$
Oberfläche des Pyramidenstumpfs	$O = A_1 + A_2 + M$

A_1 ist der Inhalt der Grund- und A_2 der Inhalt der Deckfläche des Pyramidenstumpfs.

Beim Kegelstumpf sind die Grundfläche A_1 bzw. die Deckfläche A_2 Kreise mit Radien r_1 bzw. r_2.

Um die Mantelfläche des geraden Kegelstumpfs zu berechnen, berechnen wir zunächst die Mantelstrecke s_2. Nach dem Strahlensatz gilt $s_2 : r_2 = s : (r_1 - r_2)$ und damit $s_2 = \frac{s \cdot r_2}{r_1 - r_2}$.

Die Mantelfläche ist die Differenz der Mantelfläche des Kegels mit der Mantelstrecke $s_1 = s + s_2$ und der Mantelfläche des Kegels mit der Mantelstrecke s_2, also $M = r_1\pi \cdot (s + s_2) - r_2\pi s_2 = r_1\pi s + (r_1 - r_2) \cdot \pi s_2$.

Einsetzen für s_2 und Kürzen von $r_1 - r_2$ ergibt $M = r_1\pi s + r_2\pi s = (r_1 + r_2) \cdot \pi s$.

Sind von einem geraden Kegelstumpf die Höhe h und die Radien r_1 und r_2 bekannt, so kann die Mantelstrecke s berechnet werden, denn es gilt:
$s^2 = h^2 + (r_1 - r_2)^2$

Volumen des Kegelstumpfs	$V = \frac{\pi}{3} \cdot h \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)$
Oberfläche des Kegelstumpfs	$O = (r_1^2 + r_2^2) \cdot \pi + M$
Mantelfläche des geraden Kegelstumpfs	$M = (r_1 + r_2) \cdot \pi s$

Geometrie des Raumes

Wir beschränken uns bei den folgenden Aufgaben auf gerade Pyramiden- und Kegelstümpfe.

AB **8.67** Zur Verankerung eines Spielgeräts im Boden werden Betonsockel (Dichte $\rho = 2{,}4\,\frac{kg}{dm^3}$) von der Form eines geraden Pyramidenstumpfs mit rechteckiger Grundfläche hergestellt. Berechne folgende Größen.

1) Volumen ***2)*** Masse ***3)*** Neigungswinkel der Seitenflächen

Lösung:

1) $V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (A_1 + \sqrt{A_1 \cdot A_2} + A_2) =$

$= \frac{1}{3} \cdot 35\text{ cm} \cdot (90\text{ cm} \cdot 50\text{ cm} + \sqrt{90\text{ cm} \cdot 50\text{ cm} \cdot 80\text{ cm} \cdot 30\text{ cm}} + 80\text{ cm} \cdot 30\text{ cm}) =$

$= 118\,840{,}579...\text{ cm}^3 = 118{,}840...\text{ dm}^3 \approx 0{,}12\text{ m}^3$

2) $m = V \cdot \rho = 118{,}840...\text{ dm}^3 \cdot 2{,}4\,\frac{kg}{dm^3} = 285{,}217...\text{ kg} \approx 285\text{ kg}$

3) $\tan(\alpha) = \frac{h}{\frac{b_1 - b_2}{2}} = \frac{2 \cdot 35\text{ cm}}{50\text{ cm} - 30\text{ cm}} = 3{,}5 \Rightarrow \alpha = \arctan(3{,}5) = 74{,}054...° \approx 74{,}1°$

$\tan(\beta) = \frac{h}{\frac{a_1 - a_2}{2}} = \frac{2 \cdot 35\text{ cm}}{90\text{ cm} - 80\text{ cm}} = 7 \Rightarrow \beta = \arctan(7) = 81{,}869...° \approx 81{,}9°$

AB **8.68** Ein Joghurtbecher hat (vereinfacht) die Form eines geraden Kegelstumpfs. Berechne das Volumen in Milliliter und die Mantelfläche, wenn der Becher am Boden 5 cm Durchmesser hat, 10 cm hoch ist und der Deckel 7 cm Durchmesser hat.

Lösung:

$r_1 = 2{,}5\text{ cm}, r_2 = 3{,}5\text{ cm}, h = 10\text{ cm}$

$V = \frac{\pi}{3} \cdot h \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2) =$

$= \frac{\pi}{3} \cdot 10\text{ cm} \cdot ((2{,}5\text{ cm})^2 + 2{,}5\text{ cm} \cdot 3{,}5\text{ cm} + (3{,}5\text{ cm})^2) =$

$= 285{,}361...\text{ cm}^3 = 285{,}361...\text{ m}\ell \approx 285\text{ m}\ell$

$s = \sqrt{h^2 + (r_2 - r_1)^2} = \sqrt{(10\text{ cm})^2 + (3{,}5\text{ cm} - 2{,}5\text{ cm})^2} = 10{,}049...\text{ cm}$

$M = (r_1 + r_2) \cdot \pi s = (2{,}5\text{ cm} + 3{,}5\text{ cm}) \cdot \pi \cdot 10{,}049...\text{ cm} = 189{,}435...\text{ cm}^2 \approx 189\text{ cm}^2$

AD **8.69** Welche Figur muss man um eine Seite, welche Figur um ihre Symmetrieachse rotieren lassen, um einen geraden Kegelstumpf zu erhalten? Formuliere deine Überlegungen.

B **8.70** Berechne das Volumen und die Oberfläche des Kegelstumpfs.

a) $r_1 = 13\text{ m}, r_2 = 11\text{ m}, h = 8\text{ m}$ ***b)*** $r_1 = 1{,}5\text{ cm}, r_2 = 2{,}2\text{ cm}, h = 2{,}9\text{ cm}$

BC **8.71** TE Regine und Christian bekommen Schokolade in Form einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche geschenkt. Sie wollen gerecht teilen. Christian schlägt vor, in der halben Höhe zu teilen und sich die untere Hälfte zu nehmen. Um wie viel Prozent weniger Schokolade würde Regine bekommen? Finde mittels Technologieeinsatz heraus, in welcher Höhe die beiden teilen müssen, damit die Teilung gerecht ist. Wie könnte man die Teilung in zwei gleich große Hälften einfacher durchführen?

8.72 Gib die Formel an, die die Beziehung zwischen dem unteren Radius, dem oberen Radius, der Höhe und der Mantelstrecke eines Kegelstumpfs beschreibt. Erkläre mit eigenen Worten, wie man diese Formel erhält. **D**

8.73 Berechne die Höhe des geraden Kegelstumpfs. **B**
a) $M = 108\ dm^2$, $r_1 = 4\ dm$, $r_2 = 3\ dm$ ***b)*** $M = 4{,}07\ m^2$, $r_1 = 0{,}65\ m$, $r_2 = 0{,}34\ m$

8.74 Eine Firma soll 120 Lampenschirme herstellen. Berechne, wie viel Quadratmeter Kunststofffolie dafür benötigt werden, wenn die Schirme die Form von geraden Kegelstümpfen mit den angegebenen Abmessungen haben und 15 % Verschnitt berücksichtigt werden müssen. **AB**

$r_2 = 18\ cm$, $h = 25\ cm$, $r_1 = 31\ cm$

8.75 Ein Einfülltrichter hat die nebenstehende Form (Maße in Zentimeter). **ABD**
a) Berechne die Oberfläche des Trichters.
b) Die horizontal gemessene Wandstärke beträgt 0,1 cm. Begründe, ob 45,0 kg Kunststoff (Dichte = $900{,}0\ \frac{kg}{m^3}$) zur Produktion von 1 000 Trichtern ausreichen.

⌀18, 0,1, ⌀4, 11, 11, ⌀2

8.76 Der Sockel für die Beleuchtung einer Fußgängerbrücke hat die Form eines regelmäßigen achtseitigen Pyramidenstumpfs. Die Längen der Achteckseiten der Grund- bzw. der Deckfläche betragen $a_1 = 50\ cm$ bzw. $a_2 = 42\ cm$. Die Höhe beträgt $h = 100\ cm$. Berechne das Volumen (Angabe des Ergebnisses in m^3) und die Masse (Dichte $\rho = 2{,}4\ \frac{kg}{dm^3}$) des Sockels. **AB**

8.77 Der obere Teil eines Trinkwasserspeichers aus Beton hat die Form eines geraden Kegelstumpfs. Der Durchmesser von Grund- bzw. Deckfläche beträgt $d_1 = 25\ m$ bzw. $d_2 = 10\ m$. Die Höhe beträgt $h = 9\ m$ und die Dicke der Mauern beträgt $s = 0{,}5\ m$ (Dicke des Mantels horizontal gemessen). **AB**
1) Wie viel Kubikmeter Wasser können gespeichert werden?
2) Wie viel Kubikmeter Beton waren zur Errichtung des kegelstumpfförmigen Teils des Speichers notwendig (ohne Berücksichtigung der Stahlbewehrung)?

8.78 Zur Errichtung eines Naturschwimmbeckens soll eine rechteckige Grube mit 6 m Länge, 5 m Breite und 2 m Tiefe ausgehoben werden. Die Seitenflächen der Grube sollen eine Böschung mit einer Neigung von 5 : 3 aufweisen. **AB**

6 m, 5 m

1) Berechne die Größe des Neigungswinkels der Seitenflächen.
2) Berechne die Abmessungen der Bodenfläche des Beckens.
3) Wie viel Kubikmeter Erdreich müssen ausgehoben werden?
4) Wie viel Quadratmeter Kunststoffplane werden zur Abdichtung des Beckens benötigt?

8.7 Kugel und Kugelteile

Ein Körper, bei dem alle Punkte von einem Mittelpunkt höchstens den Abstand r haben, heißt **Kugel**. Wird eine Kugel mit einer Ebene geschnitten, so ist die Schnittfläche ein Kreis. Schneidet man eine Kugel, so entstehen zwei **Kugelabschnitte** oder Kugelsegmente. Betrachtet man nur die Oberfläche der Kugel, so heißen die beiden durch das Schneiden mit einer Ebene entstehenden Flächen **Kugelkappen**, Kugelhauben oder Kalotten. Wird eine Kugel mit zwei parallelen Ebenen geschnitten, so entsteht zwischen den beiden Ebenen eine **Kugelschicht**. Betrachtet man nur die Oberfläche der Kugel, so heißt der zwischen den beiden Ebenen liegende Teil der Kugeloberfläche **Kugelzone**.

Für das Volumen und die Oberfläche der Kugel mit Radius r gelten folgende Formeln:

Volumen der Kugel: $V = \frac{4}{3}r^3\pi$ Oberfläche der Kugel: $O = 4r^2\pi$

Die Herleitung der Formel für die Oberfläche der Kugel wird in Band 3 durchgeführt. Um die **Formel für das Volumen** herzuleiten, vergleichen wir eine Halbkugel mit dem Radius r mit einem gleich hohen Drehzylinder mit gleichem Radius r, aus dem ein Kegel wie abgebildet ausgeschnitten wurde. Wir schneiden die beiden Körper in beliebiger Höhe h parallel zur Grundfläche durch und ermitteln die Inhalte der roten Flächen.

- Die Schnittfläche der Kugel ist ein Kreis.
  Der Radius r_h kann mit dem Satz von Pythagoras berechnet werden: $r_h^{\,2} = r^2 - h^2$
  Flächeninhalt des roten Kreises:
  $A_{Kreis} = \pi \cdot r_h^{\,2} = \pi \cdot (r^2 - h^2)$
- Die Schnittfläche des „ausgehöhlten" Zylinders ist ein Kreisring.
  r ... äußerer Radius
  h ... innerer Radius (siehe Abbildung rechts unten)
  $A_{Kreisring} = \pi \cdot (r^2 - h^2)$

Das heißt, die beiden Schnittflächen sind gleich groß. Da der Satz von Cavalieri (vgl. Seite 273) gilt, haben die beiden Körper somit das gleiche Volumen.

Es gilt: $V_{Halbkugel} = V_{Zylinder} - V_{Kegel} = \pi \cdot r^2 \cdot h - \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{2}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$

Das Volumen des Kugelabschnitts kann entweder mithilfe des Kugelradius r oder mit dem Radius des Kugelabschnitts r_1 berechnet werden: $V = \frac{\pi}{3} \cdot h^2 \cdot (3r - h) = \frac{\pi}{6} \cdot h \cdot (3r_1^2 + h^2)$
Entsprechend gilt für den
Flächeninhalt der Kugelkappe: $A = 2\pi \cdot r \cdot h = \pi \cdot (r_1^2 + h^2)$

Mit der angegebenen Formel für den Kugelabschnitt kann auch das Volumen der Kugelschicht berechnet werden. Vom Volumen der Kugel werden die Volumina der beiden Kugelabschnitte subtrahiert. Die folgenden Formeln ermöglichen eine direkte Berechnung.

r₁ h r₂

Volumen der Kugelschicht	$V = \frac{\pi}{6} \cdot h \cdot (3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2)$
Flächeninhalt der Kugelzone	$A = 2\pi \cdot r \cdot h$

Mit der angegebenen Formel für die Kugelschicht kann auch das Volumen des Kugelabschnitts berechnet werden, wenn man den Kugelabschnitt als Kugelschicht mit $r_2 = 0$ auffasst.

8.79 In einen Gartenteich mit einer Oberfläche von 7 m² gelangen vier Tropfen Öl (kugelförmig mit 4 mm Durchmesser). Wie dick ist der auf der Oberfläche des Teichs entstehende Ölfilm? Erkläre deine Vorgehensweise. Welche Vereinfachungen müssen getroffen werden?

ABC

Lösung:
Der Ölfilm verteilt sich gleichmäßig über die ganze Oberfläche des Teichs.

$V_{Tropfen} = \frac{4}{3}r^3\pi = \frac{4}{3} \cdot (2\text{ mm})^3 \cdot \pi = 33{,}510...\text{ mm}^3$

$V_{gesamt} = 4 \cdot V_{Tropfen} = 4 \cdot 33{,}510...\text{ mm}^3 = 134{,}041...\text{ mm}^3$

Der Ölfilm ist ein Körper mit ca. 134 mm³ Volumen und 7 m² = 7 000 000 mm² großer Grundfläche. Die Höhe dieses Körpers ist die Dicke des Ölfilms.

$V = G \cdot h \implies h = \frac{V}{G}$

$h = \frac{134{,}041...\text{ mm}^3}{7\,000\,000\text{ mm}^2} = 0{,}000\,019\,1...\text{ mm} = 19{,}148...\text{ nm} \approx 20\text{ nm}$

8.80 Die Erde hat einen mittleren Radius von 6 371 km. Der nördliche Polarkreis hat eine nördliche Breite von 66,6°. Berechne, wie viel Prozent des Erdvolumens und wie viel Prozent der Erdoberfläche nördlich dieses Polarkreises liegen? Beschreibe deine Überlegungen.

ABC

r₁ h r x φ

Lösung:

$h = r - x$ mit $\sin(\varphi) = \frac{x}{r}$

$x = r \cdot \sin(\varphi) \implies x = 6\,371\text{ km} \cdot \sin(66{,}6°) = 5\,847{,}014...\text{ km}$

$h = 6\,371\text{ km} - 5\,847{,}014...\text{ km} = 523{,}985...\text{ km}$

$V_{Abschnitt} = \frac{\pi}{3} \cdot h^2 \cdot (3r - h) =$

$= \frac{\pi}{3} \cdot (523{,}985...\text{ km})^2 \cdot (3 \cdot 6\,371\text{ km} - 523{,}985...\text{ km})$

$V_{Abschnitt} = 5{,}344... \cdot 10^9\text{ km}^3$

$V_{Erde} = \frac{4}{3}r^3\pi = 1{,}083... \cdot 10^{12}\text{ km}^3$

$V_{Abschnitt} : V_{Erde} = p : 100\,\%$

$p = \frac{V_{Abschnitt} \cdot 100\,\%}{V_{Erde}} = \frac{5{,}344... \cdot 10^9\text{ km}^3 \cdot 100\,\%}{1{,}083... \cdot 10^{12}\text{ km}^3} = 0{,}493...\,\% \approx 0{,}5\,\%$

$O_{Abschnitt} = 2\pi \cdot r \cdot h = 2\pi \cdot 6\,371\text{ km} \cdot 523{,}985...\text{ km} =$

$= 20{,}975... \cdot 10^6\text{ km}^2$

$O_{Erde} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot \pi \cdot (6\,371\text{ km})^2 = 510{,}064... \cdot 10^6\text{ km}^2$

$O_{Abschnitt} : O_{Erde} = p : 100\,\%$

$p = \frac{O_{Abschnitt} \cdot 100\,\%}{O_{Erde}} = \frac{20{,}975... \cdot 10^6\text{ km}^2 \cdot 100\,\%}{510{,}064... \cdot 10^6\text{ km}^2} = 4{,}112...\,\% \approx 4\,\%$

Beschreibung:
Die Erde kann näherungsweise als Kugel angenommen werden.

Der Bereich oberhalb des nördlichen Polarkreises hat daher die Form eines Kugelabschnitts.

Die Oberfläche hat die Form einer Kugelkappe.

AB **8.81** Der obere Abschluss einer Steinsäule mit einem Durchmesser von 44 cm ($\rho = 2{,}6\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$) ist eine Kugelschicht.

a) Berechne das Volumen und die Masse der Kugelschicht, wenn der obere Radius $r_1 = 24$ cm und die Höhe $h = 16$ cm beträgt.
b) Berechne den Flächeninhalt der Kugelzone, wenn es sich dabei um eine unten abgeschnittene Halbkugel handelt.

Lösung:
a) $V = \frac{\pi}{6} \cdot h \cdot (3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2) =$
$= \frac{\pi}{6} \cdot 16\text{ cm} \cdot (3 \cdot (24\text{ cm})^2 + 3 \cdot (22\text{ cm})^2 + (16\text{ cm})^2) = 28\,785{,}366\ldots\text{ cm}^3 \approx 28\,800\text{ cm}^3$
$m = V \cdot \rho = 28{,}785\ldots\text{ dm}^3 \cdot 2{,}6\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 74{,}841\ldots\text{ kg} \approx 74{,}8\text{ kg}$
b) $r_1 = r = 24$ cm
$A = 2\pi \cdot r \cdot h = 2\pi \cdot 24\text{ cm} \cdot 16\text{ cm} = 2\,412{,}743\ldots\text{ cm}^2 \approx 2\,410\text{ cm}^2$

A **8.82** Gib eine Formel an, wie man
1) die Oberfläche einer Kugel berechnen kann, wenn das Volumen bekannt ist,
2) das Volumen berechnen kann, wenn die Oberfläche bekannt ist.

B **8.83** Berechne das Volumen und die Oberfläche der Kugel.
a) $r = 6$ mm **b)** $r = 34{,}2$ m **c)** $d = 453$ cm **d)** $d = 3{,}45$ dm

B **8.84** Berechne den Radius der Kugel.
a) $O = 134\text{ m}^2$ **b)** $O = 27{,}78\text{ cm}^2$ **c)** $V = 764\text{ m}^3$ **d)** $V = 4{,}56\text{ km}^3$

BC **8.85** Unter welcher Bedingung haben das Volumen und die Oberfläche einer Kugel die gleiche Maßzahl?

BD **8.86** Sind die folgenden früher verwendeten Formeln sinnvolle Näherungen oder nicht? Begründe deine Antwort.
a) Das Volumen der Kugel ist $\left(\frac{11}{14} \cdot d\right)^3$.
b) Das Volumen einer Kugel ist das Produkt aus der Fläche des größten Kreises dieser Kugel und der Quadratwurzel daraus.
c) Zieht man von der dritten Potenz des Durchmessers $\frac{10}{21}$ dieses Werts ab, erhält man das Volumen einer Kugel.

B **8.87** Berechne das Volumen des Kugelabschnitts.
a) $r = 6$ cm, $h = 4$ cm **b)** $r_1 = 10$ km, $h = 6$ km

B **8.88** Berechne den Flächeninhalt der Kugelkappe.
a) $r = 22$ m, $h = 15$ m **b)** $r_1 = 2$ km, $h = 1$ km

B **8.89** Berechne das Volumen der Kugelschicht.
a) $r_1 = 10$ dm, $r_2 = 8$ dm, $h = 6$ dm **b)** $r_1 = 0{,}88$ m, $r_2 = 0{,}66$ m, $h = 0{,}50$ m

B **8.90** Berechne den Flächeninhalt der Kugelzone.
a) $r = 15$ mm, $h = 14$ mm **b)** $r = 53{,}1$ mm, $h = 18{,}2$ mm

B **8.91** Berechne die Höhe der Kugelzone.
a) $A = 137\text{ m}^2$, $r = 15$ m **b)** $A = 3{,}78\text{ cm}^2$, $r = 0{,}45$ cm

8.92 Ein kugelförmiger Luftballon wird gleichmäßig mit 6,0 Liter Luft pro Minute befüllt. Stelle den Zusammenhang zwischen Befülldauer und Ballondurchmesser für Zeiten zwischen 0 Sekunden und 5 Minuten in 10 Sekundenschritten grafisch dar. Interpretiere den Verlauf. ABC TE

8.93 Hat ein handelsübliches Kaffeelot mit einem Radius von r = 2,0 cm und einem Volumen von 18,5 cm^3 tatsächlich die Form einer Halbkugel? Dokumentiere deine Vorgehensweise. ABC

8.94 Erkläre, durch welche Überlegungen man zu folgender Näherung gekommen ist und gib eine sinnvolle Abschätzung für den Fehler an. BD

a) Das Volumen von vier Würfeln, deren Kantenlänge gleich dem Radius einer Kugel ist, ist gleich dem Volumen der Kugel.

b) Zwölf Quadrate mit der Seitenlänge gleich dem Radius einer Kugel haben den gleichen Flächeninhalt wie die Oberfläche dieser Kugel.

8.95 Eine Kugel hat eine Masse von 1 kg. Berechne ihren Durchmesser, wenn sie aus folgendem Material mit der angegebenen Dichte besteht. AB

a) Nickel ($\rho = 8{,}9\,\frac{kg}{dm^3}$) ***b)*** Glas ($\rho = 2{,}5\,\frac{kg}{dm^3}$) ***c)*** Kork ($\rho = 0{,}25\,\frac{kg}{dm^3}$)

8.96 In eine halbkugelförmige Porzellanschale passen 2 ℓ Flüssigkeit. Berechne den Außendurchmesser der Schale, wenn die Dicke des Porzellans 4 mm beträgt. AB

8.97 Eine Boje mit 42 cm Durchmesser ist in einem See eingefroren. Der sichtbare Teil bildet einen Kugelabschnitt mit 25 cm Höhe. AB

a) Wie viel Prozent der Kugeloberfläche sind sichtbar?

b) Wie viel Prozent des Kugelvolumens liegen unterhalb der Eisoberfläche?

8.98 Zur Dämpfung der Schwingungen eines Dieselaggregats werden Hartgummischeiben (Dichte $\rho = 1{,}8\,\frac{kg}{dm^3}$) verwendet. Eine Scheibe hat die Form einer symmetrischen Kugelschicht mit $d_1 = d_2 = 23$ cm und h = 4 cm. Berechne die Masse einer solchen Scheibe. AB

$d_1 = 23$, h = 4, $d_2 = 23$

8.99 Ein Schneemann besteht aus zwei Kugelschichten und einem Kugelabschnitt (Maße in Zentimeter). AB

1) Berechne das Volumen des Schneemanns.

2) Welche Masse hat der Schneemann, wenn die Dichte des Schnees mit $0{,}3\,\frac{kg}{dm^3}$ angenommen wird?

30, 20, 45, 60, 70, 80

8.100 Wie viel km^2 Erdoberfläche kann man vom Mauna Kea, mit 4 205 m der höchste Berg Hawaiis, überblicken? Wie viel Prozent dieser Fläche ist mit Wasser bedeckt? Schätze und begründe deine Antwort. Fertige vor der Berechnung eine Skizze an. ABCD

8.101 Eine mit Wasser gefüllte halbkugelförmige Schale mit d = 15 cm Durchmesser wird um 25° geneigt. AB

1) Berechne die Höhe h des verbleibenden Wasserstands.

2) Wie viel Liter Wasser befinden sich noch in der Schale?

3) Wie viel Liter Wasser sind beim Neigen der Schale ausgeflossen?

d, 25°, h

Geometrie des Raumes

Zusammenfassung

Volumen
Die Querschnittsfläche ist auf jeder Höhe gleich groß:
$V = G \cdot h$
Die Querschnittsfläche verkleinert sich von der Grundfläche bis zur Spitze quadratisch:
$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

Satz von Cavalieri
Haben zwei Körper auf gleicher Höhe stets dieselbe Querschnittsfläche, so ist ihr Volumen gleich.

Volumen und Oberfläche von Körpern

Prisma:	$V = G \cdot h$	$O = 2 \cdot G + M$	
Pyramide:	$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$	$O = G + M$	
Drehzylinder:	$V = r^2\pi \cdot h$	$O = 2r\pi \cdot (h + r)$	
Drehkegel:	$V = \frac{1}{3} \cdot r^2\pi \cdot h$	$O = r\pi \cdot (r + s)$	$M = r\pi s$
Kugel:	$V = \frac{4}{3}r^3\pi$	$O = 4r^2\pi$	

Weitere Aufgaben

D **8.102** Wie ändert sich die Kantenlänge eines Würfels, wenn
1) seine Oberfläche verdoppelt wird? ***2)*** sein Volumen verdoppelt wird?

B **8.103** Ein Drehzylinder hat 1,2 m Radius und 4,9 m Höhe. Berechne
a) das Volumen. ***b)*** die Mantelfläche. ***c)*** die Oberfläche.

B **8.104** Berechne das Volumen und die Oberfläche des Drehkegels.
a) r = 22 mm, h = 35 mm ***b)*** r = 15,8 cm, h = 22,9 cm

B **8.105** Berechne das Volumen und die Oberfläche der Kugel.
a) r = 45,3 cm ***b)*** r = 2,98 mm ***c)*** d = 112 m

BC **8.106** Die Kanten der Grundfläche eines regelmäßigen sechsseitigen Prismas sind 4,65 m lang, die Höhe beträgt 3,67 m. Wie viele ganze Liter fasst dieses Prisma?

B **8.107** Berechne das Volumen und die Oberfläche eines Quaders mit dem Seitenlängenverhältnis a : b : c = 3 : 1 : 4, wenn a = 7,5 cm ist.

ABC **8.108** Ein Würfel mit der Seitenlänge a = 11 dm wird längs einer Flächendiagonale zweimal schräg abgeschnitten.
a) Berechne die Größe des Winkels, den die Schnittflächen mit der Grundfläche einschließen.
b) Was ist größer – der Verschnitt oder der neu entstandene Körper?

B **8.109** Die Länge der Kanten der Grundfläche einer regelmäßigen Pyramide beträgt a = 23,1 cm und die Höhe h = 17,4 cm. Berechne das Volumen und die Oberfläche.
a) dreiseitige Pyramide ***b)*** quadratische Pyramide ***c)*** sechsseitige Pyramide

B **8.110** Berechne den Öffnungswinkel des Drehkegels.
a) r = 14,3 mm, V = 739 mm^3 ***b)*** r = 1,54 dm, V = 44,78 dm^3

D **8.111** Begründe, wie viele Größen (h, r, s, M, O und V) gegeben sein müssen, damit ein Drehkegel eindeutig festgelegt ist.

8.112 Berechne das Volumen eines regelmäßigen Pyramidenstumpfs mit $a_1 = 53{,}22$ cm, $a_2 = 34{,}12$ cm und $h = 17{,}66$ cm. B

a) dreiseitige Grundfläche ***b)*** quadratische Grundfläche

8.113 Berechne das Volumen und die Mantelfläche des geraden Kegelstumpfs. B

a) $r_1 = 17{,}6$ mm, $r_2 = 15{,}5$ mm, $h = 9{,}7$ mm ***b)*** $r_1 = 22$ dm, $r_2 = 11$ dm, $h = 15$ dm

8.114 Berechne das Volumen des Kugelabschnitts und den Flächeninhalt der Kugelkappe. B

a) $r = 6$ m, $h = 4$ m ***b)*** $r = 76{,}4$ dm, $h = 56{,}1$ dm ***c)*** $r = 0{,}45$ dm, $h = 0{,}23$ dm

8.115 Eine Rolle Haushaltsfolie („Alufolie", $\rho = 2{,}70\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$) ist 29 cm breit. Ihre Masse beträgt 250 g. Berechne die Dicke der Folie, wenn auf einer Rolle 30 m aufgewickelt sind. AB

8.116 Ein kreisförmiges Schwimmbecken hat einen Durchmesser von 6,0 m. Das Befüllen des Beckens erfolgt durch drei Schläuche mit 60 mm Innendurchmesser, wobei das Wasser mit einer Geschwindigkeit von $v = 0{,}4\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ einströmt. Das Becken ist 1,20 m tief. ABC

1) Wie viel Liter fließen pro Sekunde zu?

2) Das Becken wird bis 10 cm unter dem Rand gefüllt. Wie viele Menschen zu 75 kg mit der Dichte von $1{,}02\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ können untertauchen, bis das Becken überschwappt?

8.117 Ein Walmdach hat die angegebenen Abmessungen. AB

a) Gib an, aus welchen Körpern sich der Dachraum zusammensetzt.

b) Berechne den Rauminhalt.

c) Berechne die Neigung der Dachflächen.

d) Berechne den Flächeninhalt der Dachflächen.

8.118 In einem stehenden drehzylindrischen Kunststofftank mit 1,20 m Innendurchmesser wird Heizöl gelagert. AB

a) Wie viel Liter Öl befinden sich im Tank, wenn der Ölstand noch 15 cm beträgt?

b) Um wie viel Zentimeter steigt der Ölstand, wenn 500 ℓ Öl nachgetankt werden?

8.119 Für einen physikalischen Versuch wird in ein zur Hälfte mit Flüssigkeit gefülltes zylindrisches Gefäß mit 12 cm Innendurchmesser eine Kugel mit 3,2 cm Durchmesser gegeben. Berechne, wie viel Zentimeter der Flüssigkeitsstand steigt, wenn die Kugel vollständig in die Flüssigkeit eintaucht. Welche Dichte hat die Kugel mindestens? ABC

8.120 In einem zylindrischen Gefäß mit 22 cm Innendurchmesser befinden sich 5 ℓ Flüssigkeit. Mit einem Schöpflöffel, der die Form einer Halbkugel mit 7 cm Innendurchmesser hat, wird Flüssigkeit entnommen. ABC

a) Um wie viel Zentimeter senkt sich der Flüssigkeitsstand, wenn 8 Schöpflöffel Flüssigkeit entnommen werden?

b) Wie viele Schöpflöffel müssen mindestens entnommen werden, damit der Flüssigkeitsstand weniger als 4 cm beträgt?

8.121 Eine Eprouvette hat die Form eines Drehzylinders, der unten mit einer Halbkugel abgeschlossen ist. Berechne ihre Höhe, wenn sie einen Innendurchmesser von 1,6 cm hat und gefüllt 33 mℓ enthält. AB

8.122 Die dargestellten Säulen eines Gebäudes sind Drehzylinder mit 50 cm Durchmesser. Berechne das Volumen der 10 Säulen, wenn die Säulen 12 m lang sind. AB

AB **8.123** Abstandsscheiben aus Messing (Dichte $\rho = 8{,}5\,\frac{kg}{dm^3}$) haben die Form einer Kugelschicht mit kegelstumpfförmiger Bohrung. Berechne den Materialbedarf für 1 000 Scheiben mit den angegebenen Abmessungen (Maße in Millimeter).

ABC **8.124** Gold hat eine Dichte von $19{,}3\,\frac{kg}{dm^3}$. Goldkugeln mit d = 5 mm werden zu Goldbarren mit 500 g Masse und der in Abb. 8.6 angegebenen Form umgeschmolzen. Welche Einheit haben die Maßzahlen in Abb. 8.6? Berechne die Höhe eines Barrens. Wie viele Kugeln werden für einen Barren benötigt?

Abb. 8.6

AB **8.125** Berechne die Masse des für den Dachabschluss am First verwendeten Dachziegels (Dichte $\rho = 2{,}2\,\frac{kg}{dm^3}$) mit den Abmessungen r = 8,4 cm, s = 16 cm, d = 1,8 cm und ℓ = 31 cm.

ABD **8.126** Berechne das Volumen des gelben Teils des abgebildeten Wohnhauses in Melk unter der Annahme, dass die Grundfläche aus zwei Halbkreisen (d = 2,2 m) und einem Quadrat besteht. Begründe, warum zur Berechnung das arithmetische Mittel der beiden angegebenen Höhen verwendet werden kann.

Maße in Meter

AB **8.127** Eine Silikontube hat die Form eines Drehzylinders mit aufgesetztem Drehkegel.

1) Berechne den Inhalt der Tube, wenn die angegebenen Abmessungen Innenmaße sind (Maße in cm).

2) Beim Entleeren der Tube entsteht ein drehzylinderförmiger Silikonstrang. Berechne die Länge des Strangs, wenn die kreisförmige Öffnung der Tube 6 mm Durchmesser hat und der gesamte Tubeninhalt verwendet wird.

AB **8.128** Ein 24 m langes Haus hat ein tonnenförmiges Dach mit 4,1 m Radius.

a) Berechne den Rauminhalt des Dachgeschoßes, wenn der Rauminhalt durch die Neigung der Seitenflächen des Dachs um 8 % gegenüber dem eines Dachs mit vertikalen Seitenflächen vermindert wird.

b) Berechne näherungsweise (Tonnendach mit vertikalen Seitenflächen), wie viel Quadratmeter Blech für die Errichtung des Dachs notwendig waren.

AB **8.129** Die Form der Abdeckung eines Belüftungsschachts einer Tiefgarage besteht aus drei runden Körpern (Maße in Zentimeter).

1) Berechne die Oberfläche der Abdeckung.

2) Berechne näherungsweise die Masse der Abdeckung, wenn sie 1 cm dick ist und aus Stahl (Dichte $\rho = 7{,}85\,\frac{kg}{dm^3}$) angefertigt wurde.

Hinweis: Verwende den Flächenprojektionssatz zur Berechnung des Flächeninhalts der Ellipse und verwende Volumen ≈ Oberfläche · Dicke.

CD **8.130** Zu den sogenannten **Platonischen Körpern** zählen u. a. Tetraeder und Würfel. Welche Gemeinsamkeiten haben die beiden? Gestalte ein Plakat über alle Platonischen Körper.

Wissens-Check

		gelöst
1	Ich kenne den Unterschied zwischen Oberfläche und Mantelfläche.	
2	Kreuze richtig (r) oder falsch (f) an. A) Oberfläche eines Quaders: $O = 2ab + 2bc + 2ac$ ○ r ○ f B) Volumen eines Würfels: $V = s^2$ ○ r ○ f C) Volumen des Zylinders: $V = \pi r^3 h$ ○ r ○ f D) Mantelfläche des geraden Kreiszylinders: $M = 2r^2\pi h$ ○ r ○ f E) Volumen der Pyramide: $V = \frac{G \cdot h}{3}$ ○ r ○ f F) Oberfläche des geraden Kreiskegels: $O = r^2\pi + r\pi s$ ○ r ○ f G) Oberfläche der Kugel: $O = 4r^3\pi$ ○ r ○ f	
3	Nenne drei Körper, für die $V = G \cdot h$ gilt.	
4	Beschreibe mit eigenen Worten die Gemeinsamkeiten und die Unterschiede. A) Quader, Würfel B) Pyramide, Pyramidenstumpf C) Kugelschicht, Kugelzone D) Zylinder, Kegel	
5	Gib an, wie sich das Volumen eines Zylinders ändert, wenn A) der Radius verdoppelt wird. B) die Höhe verdreifacht wird. C) der Radius und die Höhe vervierfacht werden.	
6	Ich kann die Begriffe „Kugelabschnitt", „Kugelkappe", „Kugelschicht" und „Kugelzone" erklären.	
7	Die Masse einer Kugel aus Gold mit der Dichte $19\,320\ \frac{kg}{m^3}$ beträgt 1 000 g. Welchen Durchmesser hat diese Kugel? 1) Ich kann den richtigen Durchmesser auswählen, ohne die Berechnung durchzuführen. 2) Ich kann begründen, warum die anderen Durchmesser nicht in Frage kommen. A) 1,08 mm B) 4,6 cm C) 10,2 dm D) 3,5 m	
8	Eine zylinderförmige Thermosflasche hat innen einen Durchmesser von 80 mm und eine Höhe von 22 cm. Berechne das Fassungsvermögen in Liter. Begründe, welches Fassungsvermögen auf der Flasche angegeben werden sollte.	
9	Ein gleichseitiger Kegel hat ein Volumen von $2\,250\pi\ dm^3$. Berechne den Flächeninhalt des Mantels.	

Lösung:
1) siehe Seite 272 2) A) richtig, B) falsch, C) falsch, D) falsch, E) richtig, F) richtig, G) falsch
3) siehe Seite 274, Seite 277 4) – 5) A) vervierfacht, B) verdreifacht, C) 64-mal so groß
6) siehe Seite 288 und 289 7) B) ist richtig. Eine Kugel mit dem Durchmesser A) ist zu klein, um die Masse von 1 kg zu haben. Die Durchmesser C) und D) sind größer als ein Meter und scheiden daher als Lösung aus.
8) Das berechnete Fassungsvermögen ist 1,109 Liter. Die Thermosflasche ist in Wirklichkeit aber nur annähernd ein Zylinder, sie wird üblicherweise nicht vollständig bis zum Rand befüllt. Die Angabe sollte „1 Liter" lauten.
9) $1\,580{,}58\ dm^2$

9 Vektoren

Im Straßenverkehr sieht man oft dieses Gebotsszeichen. Es zeigt an, dass man nur geradeaus fahren darf. Wo auch immer dieses Verkehrszeichen zu sehen ist, zeigt es den gleichen Pfeil. In der Mathematik bezeichnet man eine solche Menge von Pfeilen als einen **Vektor** (latein: „vector“ = Träger).

Viele geometrische Aufgaben können mithilfe von Vektoren gelöst werden. In den Naturwissenschaften und der Technik nützt man Vektoren zur Beschreibung von Größen, die nicht nur einen bestimmten Betrag sondern auch eine Richtung haben. Vektoren werden auch verwendet, wenn man nicht mit einzelnen Zahlen, sondern mit Listen von Zahlen oder Zahlenpaaren arbeitet. In der Wirtschaft etwa werden Vektoren bei der Erfassung des Lagerbestands einer Ware verwendet.

9.1 Einführung

9.1.1 Grundbegriffe

AC **9.1** Welche dieser Pfeile sind gleich? In welchen Eigenschaften müssen gleiche Pfeile übereinstimmen?

AC **9.2** Der Plan zeigt den Verlauf des U-Bahnnetzes in Budapest. Die rot markierte U-Bahnlinie fährt von West nach Ost und umgekehrt. Zu welchen Endstationen kann man mit dieser U-Bahn vom Zentrum (Deák Ference tér) aus fahren?

In der Mathematik unterscheidet man zwischen „Richtung“ und „Orientierung“. Der alltagssprachliche Begriff „Richtung“ hat eine andere Bedeutung als der mathematische. Pfeile, die zueinander **parallel** sind, heißen **gleich gerichtet**. Der alltagssprachliche Begriff „gleiche Richtung“ entspricht dem mathematischen Begriff **gleiche Orientierung**.

Diese Pfeile haben die gleiche Richtung.

Diese Pfeile haben nicht nur die gleiche Richtung, sondern auch die gleiche Orientierung.

In der Ebene kann man einen **Vektor $\vec{a}$** mithilfe der Zahlen a_x und a_y beschreiben, die als Koordinaten oder Komponenten des Vektors bezeichnet werden. Ein Vektor entspricht daher einem Zahlenpaar. Er kann als Zeilenvektor $\vec{a} = (a_x, a_y)$ angeschrieben werden oder als

Spaltenvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$.

Jeder einzelne der rot gezeichneten Pfeile heißt **Repräsentant** des Vektors.

Ein **Vektor** $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ ist die Menge aller gleich langen, gleich gerichteten und gleich orientierten Pfeile. a_x und a_y heißen Koordinaten des Vektors. Auch das Zahlenpaar (a_x, a_y) wird als Vektor bezeichnet. Ein einzelner Pfeil wird **Repräsentant des Vektors** oder kurz Vektor genannt.

Ist der Anfangspunkt des Vektors $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ der Koordinatenursprung O, so ist sein Endpunkt der Punkt mit den Koordinaten $A(a_x|a_y)$. Man nennt den Vektor dann den **Ortsvektor** von A und schreibt $\overrightarrow{OA}$.

Ein Vektor zwischen zwei Punkten A und B kann mithilfe der Koordinaten dieser Punkte berechnet werden.

Vektor von $A(x_A|y_A)$ nach $B(x_B|y_B)$:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ Merkhilfe: „Endpunkt – Anfangspunkt" $\overrightarrow{AB} = B - A$

9.3 Berechne die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{AB}$ und des Vektors $\overrightarrow{BA}$ A(3|2), B(10|5). Beschreibe den Unterschied mit eigenen Worten.

BC

Lösung:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 10-3 \\ 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 3-10 \\ 2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix}$

Wenn man Endpunkt und Anfangspunkt eines Vektors vertauscht, ändern sich die Vorzeichen der Koordinaten, also die Orientierung des Vektors.

9.4 **1)** Zeichne zwei gleich lange, aber unterschiedlich gerichtete Pfeile.
2) Zeichne zwei gleich gerichtete, aber unterschiedlich orientierte Pfeile.
3) Zeichne zwei gleich lange, aber unterschiedlich orientierte Pfeile.
4) Zeichne zwei gleich orientierte, aber unterschiedlich lange Pfeile.

AB

9.5 Zeichne den Vektor von A(−1|3) nach B(2|1). Zeichne Repräsentanten des Vektors $\overrightarrow{AB}$ mit dem angegebenen Anfangs- bzw. Endpunkt in das gleiche Koordinatensystem. Lies den Anfangs- bzw. Endpunkt der entstandenen Vektoren ab.
1) Anfangspunkt (3|5) **2)** Endpunkt (2|−1)

BC

9.6 Steht ein Springer bei einem Schachspiel auf d4, so darf er auf jedes der gekennzeichneten Felder ziehen. Den Weg dabei kann man als Vektor angeben, zum Beipiel $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ für den Zug von d4 auf f3.
1) Beschreibe alle erlaubten Züge als Vektoren.
2) Ein Springer steht auf Position f4. Gib alle Felder an, die er im nächsten Zug erreichen kann.
3) Ein Springer steht nach dem Zug auf d5. Wo kann er vor diesem Zug gestanden sein?

ABD

Vektoren

B **9.7** Berechne den Vektor $\overrightarrow{AB}$ und stelle ihn grafisch dar.
a) A(5|–7), B(3|1) ***b)*** A(10|0), B(12|–4) ***c)*** A(–9|3), B(8|11) ***d)*** A(0|–2), B(14|2)

BC **9.8** Stellen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ denselben Vektor dar? Überprüfe grafisch und rechnerisch.
a) A(2|3), B(7|7) und C(4|8), D(9|12) ***c)*** A(–6|2), B(–3|0) und C(5|3), D(8|1)
b) A(–4|1), B(3|–2) und C(5|8), D(10|5) ***d)*** A(9|–2), B(6|–5) und C(7|4), D(5|7)

A **9.9** Schreibe die Vektoren jeweils als Spaltenvektor an.

ABC **9.10** ***1)*** Zeichne ein Quadrat in ein Koordinatensystem ein. Beschrifte die Eckpunkte mit A, B, C und D, den Diagonalenschnittpunkt mit M.
2) Gib fünf verschiedene Vektoren mithilfe der Punkte A, B, C, D und M an.
3) Gib einen anderen Repräsentanten des Vektors $\overrightarrow{AM}$ an.

ACD **9.11** Gegeben ist die Figur ABCDEFGH (Abb. 9.1). Überprüfe mithilfe der Zeichnung, ob die folgenden Aussagen richtig sind. Begründe deine Antwort.
a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ***d)*** $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HD}$
b) $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{HC}$ ***e)*** $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AG}$
c) $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EA}$ ***f)*** $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BE}$

AEHD ... Quadrat
$\overline{DG} = \overline{EB}$

Abb. 9.1

CD **9.12** Gilt die Aussage für die Figur in Abb. 9.1? Begründe deine Antwort.
a) Der Vektor $\overrightarrow{AB}$ hat die gleiche Richtung wie der Vektor $\overrightarrow{AE}$.
b) Der Vektor $\overrightarrow{AH}$ hat die gleiche Orientierung wie der Vektor $\overrightarrow{DF}$.
c) Der Vektor $\overrightarrow{GD}$ hat die gleiche Richtung und Orientierung wie der Vektor $\overrightarrow{HF}$.
d) Der Vektor $\overrightarrow{CH}$ hat nicht die gleiche Richtung wie der Vektor $\overrightarrow{AB}$.
e) Der Vektor $\overrightarrow{BC}$ hat nicht die gleiche Orientierung wie der Vektor $\overrightarrow{DG}$.
f) Der Vektor $\overrightarrow{DE}$ hat nicht die gleiche Richtung wie der Vektor $\overrightarrow{GB}$.

BCD **9.13** Zeichne das Viereck ABCD mit A(3|3), B(6|2), C(9|6) und D(4|6).
1) Um welches spezielle Viereck handelt es sich hier? Begründe deine Antwort.
2) Welche Koordinaten hat der Schnittpunkt der Diagonalen?
3) Gib jeweils drei Vektoren mit dem Anfangs- oder dem Endpunkt A in diesem Viereck an.

9.1.2 Betrag (Länge) eines Vektors

9.14 Zeichne den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ in ein Koordinatensystem ein und miss seine Länge. Welcher bekannte Satz kann zur Berechnung dieser Länge verwendet werden? BC

Der **Betrag** (die Länge) des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ wird unter Verwendung des Satzes von Pythagoras berechnet: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

y, $\vec{a}$, a_y, a_x, 1, 1, x

9.15 Welcher der beiden Vektoren $\vec{a}$ oder $\vec{b}$ ist länger? $\vec{a} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -10 \\ 24 \end{pmatrix}$ BC

Lösung:

$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25$ E $\quad |\vec{b}| = \sqrt{(-10)^2 + 24^2} = \sqrt{676} = 26$ E

Der Vektor $\vec{b}$ ist länger als der Vektor $\vec{a}$.

9.16 Berechne den Betrag des folgenden Vektors. B

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{d} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}$

9.17 Berechne den Abstand des Punkts vom Ursprung. B

a) A(−7|4) **b)** B(12|9) **c)** C(8|−3) **d)** D(−5|−12)

9.18 Berechne den Betrag des durch die beiden Punkte gegebenen Vektors. B

a) A(10|4), B(7|−6) **b)** A(−14|9), B(−3|12) **c)** A(1|3), B(9|4)

9.19 Berechne den Abstand zwischen den zwei gegebenen Punkten. B

a) A(−4|7) und B(8|3) **b)** G(−3|7) und H(8|−4) **c)** P(8|4) und Q(−3|−4)

9.20 Berechne den Umfang des Dreiecks ABC. Gib an, um welches Dreieck es sich handelt. BC

a) A(−2|−2), B(3|−1), C(−1|3) **b)** A(3|4), B(−3|4), C(3|−5)

9.21 Berechne den Umfang und die Länge der Diagonalen des Quadrats. Wie kann man erkennen, dass es sich um ein Quadrat handelt? BD

a) A(3|−6), B(7|0), C(1|4), D(−3|−2) **b)** A(−2|−4), B(4|−1), C(1|5), D(−5|2)

Aufgaben 9.22 – 9.24: Löse mithilfe von Vektoren.

9.22 Handelt es sich bei dieser Figur um ein Parallelogramm, eine Raute oder um keines von beiden? BC

a) A(−1|3), B(−2|1), C(1|0), D(2|3) **b)** A(6|2), B(5|0), C(−2|−1), D(4|−4)

9.23 Handelt es sich bei der durch die Punkte ABC gegebenen Figur um ein rechtwinkliges Dreieck? Begründe deine Antwort. BCD

a) A(−112|336), B(335|−336), C(448|224) **b)** A(57|−57), B(76|38), C(19|58)

9.24 Zeige anhand des Dreiecks A(−12|4), B(0|−7), C(13|0) die Gültigkeit der Dreiecksungleichung. BD

9.2 Rechenoperationen mit Vektoren

9.2.1 Addition und Subtraktion von Vektoren

ABC **9.25** Auf einem Schachbrett (siehe Seite 297) zieht der Turm von a1 auf a4 im nächsten Zug weiter auf d4. Gib den Weg des Turms mithilfe von Vektoren an.
Wie hätte die Dame von a1 aus den Weg in nur einem Zug zurücklegen können?

Vektoren werden koordinatenweise addiert bzw. subtrahiert.

Es gilt: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$ und $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \end{pmatrix}$

Geometrisch werden zwei Vektoren addiert, indem man an die Spitze des ersten Vektors den zweiten Vektor anfügt. Die Summe der beiden Vektoren erhält man durch die Verbindung des Anfangspunkts des ersten Vektors mit dem Endpunkt des zweiten Vektors. Die Differenz der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erhält man durch die Addition des entgegengesetzt orientierten Vektors von $\vec{b}$ zu $\vec{a}$.

$-\vec{b}$, $\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}$, $\vec{a}+\vec{b}$

B **9.26** Das Parallelogramm ABCD hat die Koordinaten A(0|−1), B(7|1) und C(4|5).
Berechne die Koordinaten des Punkts D.

Lösung:

$\overrightarrow{BC} = C - B = \begin{pmatrix} 4 - 7 \\ 5 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Es gilt: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Der Punkt hat die Koordinaten D(−3|3).

y, x, A, B, C, D, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

B **9.27** Ermittle die Summe und die Differenz $\vec{a} - \vec{b}$ der Vektoren rechnerisch und grafisch.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ***b)*** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ ***c)*** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

B **9.28** Gegeben sind die Punkte A(3|5), B(2|−6), C(0|3), D(−7|−3), E(7|0) und F(−1|8).

1) Gib die folgenden Vektoren an: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{BC}, \vec{c} = \overrightarrow{CD}, \vec{d} = \overrightarrow{DE}, \vec{e} = \overrightarrow{EF}$ und $\vec{f} = \overrightarrow{FA}$

2) Berechne: ***a)*** $\vec{a} - \vec{e} + \vec{b}$ ***b)*** $\vec{e} + \vec{c} - \vec{d}$ ***c)*** $\vec{b} + \vec{f} - \vec{a}$ ***d)*** $\vec{c} - \vec{d} + \vec{f}$

3) Kontrolliere durch eine Zeichnung.

B **9.29** Berechne die fehlenden Koordinaten des Punkts und die Längen der Diagonalen des Parallelogramms.

a) A(−3|−4), B(6|−1), C, D(0|2) ***b)*** A, B(−4|4), C(4|−2), D(1|5)

BC **9.30** Gegeben sind die Vektoren: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

1) Zeichne die Vektoren: $\vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{b} + \vec{a}$, $\vec{a} + \vec{d}$ und $d + \vec{a}$, $\vec{b} + \vec{c}$ und $\vec{c} + \vec{b}$

2) Beschreibe mit eigenen Worten, was dir beim Vergleich der Ergebnisse aus ***1)*** auffällt.

9.2.2 Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl

9.31 Zeichne in ein Koordinatensystem einen Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein. **BC**

1) Zeichne den Vektor $\vec{v} = \vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$ und berechne seine Koordinaten.
2) Multipliziere beide Koordinaten des Vektors mit (–1) und zeichne diesen Vektor ebenfalls ein. Beschreibe, welche Eigenschaften des Vektors sich verändert haben.

Ein Vektor wird mit einer reellen Zahl multipliziert, indem man jede Koordinate des Vektors mit dieser Zahl multipliziert. Diese Zahl wird als **Skalar** (latein: „scala" = Treppe, Leiter) bezeichnet. Ein Skalar ist eine Größe, die – im Gegensatz zu einem Vektor – keine Richtung hat. Durch die Multiplikation mit einer reellen Zahl verändert sich im Allgemeinen die Länge des Vektors. Ist die reelle Zahl negativ, so ändert sich die Orientierung des Vektors.

Der entstandene Vektor ist zum ursprünglichen Vektor **parallel**. ZB: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$

Wird ein Vektor mit Null multipliziert, so erhält man den **Nullvektor** $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl

$$r \cdot \vec{a} = r \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_x \\ r \cdot a_y \end{pmatrix}$$

Multipliziert man $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ mit (–1), so erhält man $(-\vec{a}) = \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \end{pmatrix}$, den **Gegenvektor** zu $\vec{a}$.

Wird ein Vektor mit dem Kehrwert seiner Länge multipliziert, so verkürzt bzw. verlängert sich seine Länge auf 1. Er wird dann **Einheitsvektor** $\vec{a_0}$ des Vektors $\vec{a}$ oder normierter Vektor genannt. Dabei wird die Richtung und Orientierung nicht verändert. Der Rechenvorgang wird als „Normieren" bezeichnet.

Einheitsvektor: $\vec{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$ mit $|\vec{a_0}| = 1$ mit $\vec{a} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

9.32 Wie lauten die Koordinaten des Einheitsvektors des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$? **B**

Lösung:

$$|\vec{a}| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = 13 \Rightarrow \vec{a_0} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}923\ldots \\ -0{,}384\ldots \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}92 \\ -0{,}38 \end{pmatrix}$$

9.33 Multipliziere den Vektor mit dem gegebenen Faktor. Wie ändert sich der Vektor? **BC**

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -8 \\ 10 \end{pmatrix}$, s = 0,4 ***b)*** $\vec{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ 17 \end{pmatrix}$, s = –0,2 ***c)*** $\vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \end{pmatrix}$, s = –1 ***d)*** $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, s = 3

9.34 Überprüfe, ob die Vektoren zueinander parallel sind und begründe deine Antwort. **BCD**

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ ***b)*** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$ ***c)*** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 240 \\ -450 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -40 \\ 37{,}5 \end{pmatrix}$

B **9.35** Gib den zugehörigen Einheitsvektor an.

a) $\begin{pmatrix}-50\\35\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}32\\48\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}-54\\-36\end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix}0\\-28\end{pmatrix}$ **e)** $\begin{pmatrix}40\\16\end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix}-60\\36\end{pmatrix}$

BCD **9.36** Wie kann aus Vielfachen der Vektoren $\vec{r} = \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$ und $\vec{s} = \begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$ der Vektor $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ erzeugt werden? Begründe deine Vorgehensweise.

BD **9.37** Begründe, warum es nicht möglich ist, für s eine Zahl so zu finden, dass die Gleichung **a)** $\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}$, **b)** $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ erfüllt ist.

D **9.38** Wird ein Vektor mit der reellen Zahl k multipliziert, so ändert sich seine Länge um das k-Fache. Ist diese Behauptung richtig? Begründe deine Antwort.

9.3 Anwendungen der Vektorrechnung

9.3.1 Mathematische Anwendungen

Winkel zwischen einem Vektor und der x-Achse

BC **9.39** Welchen Winkel schließt der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix}6\\11\end{pmatrix}$ mit der x-Achse ein?

1) Zeichne den zugehörigen Ortsvektor und miss den Winkel ab.

2) Wiederhole die Definitionen von sin(α), cos(α) und tan(α) für den Winkel α in einem rechtwinkligen Dreieck. Mit welcher Funktion lässt sich der Winkel zwischen dem Vektor und der x-Achse berechnen?

Für den **Winkel α** zwischen dem Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$ und der x-Achse gilt: $\tan(\alpha) = \frac{a_y}{a_x}$

B **9.40** Welchen Winkel schließt der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix}11\\6\end{pmatrix}$ mit der x-Achse ein?

Lösung:

$\tan(\alpha) = \frac{a_y}{a_x} = \frac{6}{11} \Rightarrow \arctan\left(\frac{6}{11}\right) = 28{,}610...° \approx 29°$

Winkelsymmetrale (Winkelhalbierende)

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spannen einen Winkel auf. Ihre Einheitsvektoren $\vec{a_0}$ und $\vec{b_0}$ bilden eine Raute, deren Diagonale in Richtung der Winkelsymmetralen verläuft. Der Vektor $\vec{w_1} = \vec{a_0} + \vec{b_0}$ halbiert den Winkel α, der Vektor $\vec{w_2} = \vec{a_0} - \vec{b_0}$ halbiert den Nebenwinkel (Supplementärwinkel) und steht normal auf $\vec{w_1}$.

Vektor in Richtung der **Winkelsymmetrale** von $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$\vec{w} = \vec{a_0} + \vec{b_0}$

Mittelpunkt einer Strecke

9.41 Zeichne die beiden Punkte A(4|3) und B(2|7) in ein Koordinatensystem ein. Ermittle aus der Zeichnung die Koordinaten des Mittelpunkts der Strecke AB. B

Für den **Mittelpunkt M_{AB} der Strecke** AB gilt: $\overrightarrow{OM_{AB}} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

Kurzschreibweise: $M_{AB} = \frac{1}{2} \cdot (A + B)$

Schwerpunkt eines Dreiecks

Zur Erinnerung: Der Schwerpunkt ist der Schnittpunkt der Schwerlinien und kann zum Beispiel durch Ausbalancieren gefunden werden.

Für den **Schwerpunkt S eines Dreiecks** ABC gilt: $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

Kurzschreibweise: $S = \frac{1}{3} \cdot (A + B + C)$

9.42 Berechne den Winkel zwischen dem Vektor und der x-Achse. B

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 17 \\ 7 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{b} = \begin{pmatrix} 29 \\ 3 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{c} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix}$ **d)** $\vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 34 \end{pmatrix}$

9.43 Berechne den Vektor in Richtung der Winkelsymmetralen. B

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 24 \\ 7 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 12 \\ 35 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{e} = \begin{pmatrix} 120 \\ 35 \end{pmatrix}$, $\vec{f} = \begin{pmatrix} 7 \\ 24 \end{pmatrix}$

9.44 Berechne die Mittelpunkte der Seiten der Figur mit den gegebenen Eckpunkten. B

a) A(3|5), B(−7|4), C(−5|0), D(11|−2) **b)** A(−8|1), B(−7|−3), C(10|−4), D(6|4)

9.45 Welche Vektoren halbieren jeweils die Innenwinkel in der Figur mit den gegebenen Eckpunkten? B

a) A(2|3), B(−5|4), C(−7|−3), D(9|0) **b)** A(0|4), B(−3|−6), C(2|−4), D(7|1)

9.46 Das Dreieck ABC hat die Eckpunkte A(5|6), B(−7|3) und C(2|−4). BD

1) Berechne die Mittelpunkte der Seiten.
2) Berechne die Koordinaten des Schwerpunkts.
3) Wie lang ist die Schwerlinie s_c?
4) Zeige, dass das Dreieck $M_{AB}M_{BC}M_{AC}$ denselben Schwerpunkt hat wie das ursprüngliche Dreieck.

9.47 In jedem Dreieck liegen die Fußpunkte der Höhen und die Mittelpunkte der Seiten auf einem Kreis, dem **Feuerbach'schen Kreis**, benannt nach Karl Feuerbach (deutscher Mathematiker, 1800 – 1834). ABC

1) Zeichne das Dreieck ABC mit den gegebenen Eckpunkten.
2) Berechne die Koordinaten der Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks.
3) Zeichne den Feuerbach'schen Kreis ein. Konstruiere seinen Mittelpunkt mithilfe der Seitenmittelpunkte.
4) Zeige in der Zeichnung, dass die Fußpunkte der Höhen auf diesem Kreis liegen.

a) A(−4|3), B(5|−2), C(−1|7) **b)** A(7|5), B(−8|0), C(2|−9)

9.48 Leite die Formel für den Mittelpunkt einer Strecke her. BD

Technologieeinsatz: Vektoren

GeoGebra

B

TI-Nspire: www.verlaghpt.at

9.49 ***1)*** Gib die fehlenden Koordinaten des Punkts D des Parallelogramms ABCD mit A(−4|−1), B(−1|−2), C(3|1), D an. Ermittle die Länge der Diagonale AC.

2) Zeichne die Winkelsymmetrale w_β von β ein und gib einen Vektor in Richtung von w_β an.

Lösung:

1)

- Die Punkte A, B und C werden in der Eingabezeile eingegeben oder mithilfe des Werkzeugs **Neuer Punkt** markiert.
- Den Vektor zwischen zwei Punkten erhält man mit dem Befehl **Vektor[A,B]** oder über den Befehl **Vektor zwischen zwei Punkten** aus der Werkzeugleiste **Werkzeuge für Geraden**. Die Koordinaten von D können nun rechnerisch ermittelt werden, indem man zum Punkt A den Vektor $v = \overrightarrow{BC}$ addiert: **D=A+v**.
- Der Punkt D kann auch grafisch mithilfe des Befehls **Vektor von Punkt aus abtragen** ermittelt werden.
- Die Länge der Diagonale AC, also die Länge des Vektors $z = \overrightarrow{AC}$, wird mit dem Befehl **Länge(z)** ermittelt.

Koordinaten des fehlenden Eckpunkts: D(0|2); die Länge der Diagonale AC beträgt rund 7,28 Einheiten.

2)

- Um den Vektor wbeta in Richtung von w_β zu ermitteln, müssen die Vektoren $\overrightarrow{BA} = -u$ und $\overrightarrow{BC} = v$ mittels **Einheitsvektor[Vektor]** normiert werden:

Eingabe: u0=Einheitsvektor[−u]

wbeta=u0+v0

Der Vektor in Richtung der Winkelsymmetrale hat die Koordinaten **wbeta(−0,15|0,92)**. Das Einzeichnen der Winkelsymmetrale erfolgt über den Befehl **Winkelsymmetrale** aus **Werkzeuge für spezielle Geraden**.

BC

9.50 Prüfe die Formel für den Schwerpunkt eines Dreiecks für A(2|2), B(6|2), C(2|7) nach. Beschreibe deine Vorgehensweise.

Lösung:

Das Dreieck mit den Eckpunkten A, B und C wird eingezeichnet. Die Vektoren vom Koordinatenursprung zu den Eckpunkten werden eingezeichnet.
Jeder der Vektoren wird durch 3 dividiert: u1, v1, w1
Der Endpunkt des Vektors u1 wird eingezeichnet: U = O + u1
Der Vektor v1 wird addiert: U′ = U + v1
Der Vektor w1 wird addiert: U″ = U′ + w1

Mit dem Befehl **Schwerpunkt[Vieleck1]** wird der Schwerpunkt eingezeichnet.
Der Schwerpunkt ist ident mit U″.

9.3.2 Naturwissenschaftliche Anwendungen

AC

9.51 Ein Schiff wird von zwei Schleppern über einen See gezogen. In welche Richtung bewegt sich das Schiff? Sollten die Schlepper möglichst nahe nebeneinander fahren?

Kräfte

Eine Kraft ist eine gerichtete Größe, also ein Vektor. Sie kann daher als Pfeil dargestellt werden. Der Größe der Kraft entspricht der Betrag des Vektors, wir schreiben $|\vec{F}| = F$. Greifen an einem Punkt P zwei Kräfte $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$ an, so können sie durch eine Kraft $\vec{F_R}$, die Resultierende, ersetzt werden. Diese wird durch vektorielle Addition der beiden Kräfte ermittelt: $\vec{F_R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$.
Die grafische Veranschaulichung dieser Addition bezeichnet man als **Kräfteparallelogramm**. Bei der rechnerischen Ermittlung wird jede Kraft in eine Komponente in x-Richtung und eine Komponente in y-Richtung zerlegt. Diese Komponenten sind die Koordinaten des Vektors, der die Kraft beschreibt.

AB

9.52 Ein Frachtschiff wird von zwei Schleppern aus dem Hafen gezogen. Der erste zieht mit einer Kraft $F_1 = 720$ kN unter einem Winkel $\alpha_1 = 20°$ zur Kaimauer, der zweite zieht mit einer Kraft $F_2 = 470$ kN unter einem Winkel $\alpha_2 = 36°$.
1) Mit welcher Kraft wird das Frachtschiff gezogen?
2) In welche Richtung wird das Schiff gezogen?

Lösung:
1) $F_{1x} = F_1 \cdot \cos(\alpha_1) = 720 \text{ kN} \cdot \cos(20°) = 676{,}578\ldots \text{ N}$; $F_{1y} = F_1 \cdot \sin(\alpha_1) = 246{,}254\ldots \text{ N}$
$F_{2x} = F_2 \cdot \cos(\alpha_2) = 470 \text{ kN} \cdot \cos(36°) = 380{,}237\ldots \text{ N}$; $F_{2y} = F_2 \cdot \sin(\alpha_2) = 276{,}259\ldots \text{ N}$

$$\vec{F_R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = \begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 676{,}578\ldots \text{ kN} \\ 246{,}254\ldots \text{ kN} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 380{,}237\ldots \text{ kN} \\ 276{,}259\ldots \text{ kN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,056{,}816\ldots \text{ kN} \\ 522{,}513\ldots \text{ kN} \end{pmatrix}$$

$$|\vec{F_R}| = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = 1\,178{,}932\ldots \text{ kN} \approx 1\,180 \text{ kN}$$

Das Schiff wird mit einer Kraft von rund 1 180 kN gezogen.

2) $\tan(\alpha) = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} = \frac{522{,}513\ldots \text{ kN}}{1\,056{,}816\ldots \text{ kN}} = 0{,}494\ldots \Rightarrow \arctan(0{,}494\ldots) = 26{,}308\ldots° \approx 26{,}3°$.
Der Frachter wird unter einem Winkel von 26,3° von der Kaimauer weggezogen.

Der schiefe Wurf

Ein schräg nach oben geworfener Körper führt gleichzeitig zwei Bewegungen aus. Die gleichförmige Bewegung schräg nach oben ist abhängig von der Anfangsgeschwindigkeit v_0 und dem Abschusswinkel α. Die gleichmäßig beschleunigte Fallbewegung mit der Gravitationsbeschleunigung g ergibt sich aufgrund der Schwerkraft. Um die Flugbahn berechnen zu können, werden die Bewegungen als Vektoren dargestellt und in ihre Komponenten zerlegt. Daraus ergibt sich der Ortsvektor

$$\vec{s} = \vec{w} + \vec{e} = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t \\ v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{g}{2} \cdot t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t \\ v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 \end{pmatrix},$$

wenn man den Luftwiderstand vernachlässigt und für die Abschusshöhe 0 m annimmt. Die erste Koordinate beschreibt die Wurfweite und die zweite die Höhe des geworfenen Körpers zum Zeitpunkt t.

ABC **9.53** Ein Ball wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $20\,\frac{m}{s}$ unter einem Winkel von 58° nach oben geworfen.

1) Stelle die Flugbahn grafisch dar, verwende für t die Werte t = 0 s; 1 s ... 4 s.

2) Interpretiere das Ergebnis für t = 4 s.
Gib näherungsweise die Flugdauer und Flugweite an.

Lösung:

1) $\vec{s} = \begin{pmatrix} 20\,\frac{m}{s} \cdot \cos(58°) \cdot t \\ 20\,\frac{m}{s} \cdot \sin(58°) \cdot t - \frac{9{,}81}{2}\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10{,}598\,...\,\frac{m}{s} \cdot t \\ 16{,}960\,...\,\frac{m}{s} \cdot t - 4{,}905\,\frac{m}{s^2} \cdot t^2 \end{pmatrix}$

t	0 s	1 s	2 s	3 s	4 s
$\vec{s}$	$\begin{pmatrix} 0\,m \\ 0\,m \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10{,}6\,m \\ 12{,}1\,m \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 21{,}2\,m \\ 14{,}3\,m \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 31{,}8\,m \\ 6{,}7\,m \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 42{,}4\,m \\ -10{,}6\,m \end{pmatrix}$

2) Für t = 4 s ist die Flughöhe ein negativer Wert, das heißt, der Ball ist bereits gelandet. Die Flugweite beträgt ungefähr 36,6 m und die Flugdauer ungefähr 3,5 s.

AB **9.54** Gegeben sind die Kräfte $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$ und die Winkel, die sie mit der x-Achse einschließen. Zerlege $\vec{F_1}$ und $\vec{F_2}$ in ihre Komponenten, berechne die resultierende Kraft $\vec{F_1} + \vec{F_2}$.

a) $F_1 = 400$ N, $\alpha_1 = 20°$, $F_2 = 650$ N, $\alpha_2 = 55°$ ***b)*** $F_1 = 0{,}8$ kN, $\alpha_1 = 78°$, $F_2 = 1{,}4$ kN, $\alpha_2 = 65°$

ABC **9.55** Beim Bogenschießen wird ein Pfeil mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 im Winkel α abgeschossen. Stelle die einzelnen Punkte der Flugbahn mithilfe von Ortsvektoren grafisch dar. Schätze aus der Zeichnung die maximale Flughöhe. Wann wird diese erreicht?

a) $v_0 = 60\,\frac{m}{s}$, $\alpha = 40°$ ***b)*** $v_0 = 55\,\frac{m}{s}$, $\alpha = 20°$ ***c)*** $v_0 = 65\,\frac{m}{s}$, $\alpha = 30°$

AB **9.56** Zwei Personen ziehen einen Schlitten mit den horizontal wirkenden Kräften $\vec{F_1}$ bzw. $\vec{F_2}$ unter den Winkeln α_1 bzw. α_2 von einer Straße weg. Berechne, mit welcher Kraft in horizontaler Richtung und in welche Richtung der Schlitten gezogen wird.

a) $F_1 = 30$ N, $\alpha_1 = 25°$, $F_2 = 50$ N, $\alpha_2 = 80°$ ***b)*** $F_1 = 80$ N, $\alpha_1 = 55°$, $F_2 = 120$ N, $\alpha_2 = 47°$

Zusammenfassung

Ein **Vektor** ist die Menge aller gleich langen, gleich gerichteten und gleich orientierten Pfeile.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_x - a_x \\ b_y - a_y \end{pmatrix}$ ... Koordinaten des Endpunkts minus Koordinaten des Anfangspunkts

Betrag (Länge) des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

Addition bzw. Subtraktion von Vektoren: $\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \end{pmatrix}$

Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl (Skalar): $s \cdot \vec{a} = s \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot a_x \\ s \cdot a_y \end{pmatrix}$

Einheitsvektor: $\vec{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$ mit $|\vec{a_0}| = 1$

Winkelsymmetrale zwischen $\vec{a}$, $\vec{b}$: $\vec{w} = \vec{a_0} + \vec{b_0}$

Mittelpunkt der Strecke AB: $M_{AB} = \frac{1}{2} \cdot (A + B)$

Schwerpunkt des Dreiecks ABC: $S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot (A + B + C)$

Weitere Aufgaben

9.57 Berechne die Summe $\vec{a} + \vec{b}$, die Differenz $\vec{b} - \vec{a}$, die Längen und die Einheitsvektoren der beiden Vektoren. B

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -14 \\ -11 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -13 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$ **c)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 0{,}72 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6{,}08 \\ -2{,}54 \end{pmatrix}$

9.58 Berechne die Koordinaten des fehlenden Eckpunkts des Parallelogramms ABCD. B

a) A(2|−7), B(5|3), C(−2|6), D **b)** A(5|2), B, C(1|−5), D(7|−2)

9.59 Eine Bocciakugel wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit von v_0 unter dem Winkel α geworfen. Wie weit und wie lang fliegt die Kugel? Löse die Aufgabe grafisch. AB

a) $v_0 = 8\,\frac{m}{s}$, $\alpha = 12°$ **b)** $v_0 = 7\,\frac{m}{s}$, $\alpha = 18°$ **c)** $v_0 = 6\,\frac{m}{s}$, $\alpha = 10°$

9.60 Gegeben ist das Deltoid A(2|7), B(1|2) C(9|0) und D(7|8). B
Berechne die Längen der Seiten, den Umfang und den Schnittpunkt der Diagonalen.

9.61 Berechne die Koordinaten des fehlenden Eckpunkts des Trapezes ABCD. Erkläre, wie man mithilfe des Einheitsvektors einen Vektor in einer gegebenen Länge erzeugen kann. BD

a) A, B(7|0), C(1|4), D(−3|1); a = 10 E **b)** A(−1|−3), B(4|9), C, D(−4|2); c = 6,5 E

9.62 BD TE
1) Zeige am Dreieck ABC mit A(5|−2), B(8|8) und C(−4|6), dass der Schwerpunkt die drei Schwerlinien im Verhältnis 1 : 2 teilt.
2) Leite mithilfe dieser Aussage die Formel für den Schwerpunkt eines Dreiecks her.
3) Überprüfe den Schwerpunkt mithilfe von Technologieeinsatz.

9.63 Löse die Aufgabe 9.46 mithilfe von Technologieeinsatz. BD

9.64 Löse die Aufgabe 9.47 mithilfe von Technologieeinsatz. ABC TE

Wissens-Check

		gelöst
1	Sind die Aussagen richtig oder falsch? A: Ein Vektor ist eine Zahl. B: Ein Zahlenpaar gibt einen Vektor an. C: Der Betrag eines Vektors ist eine positive oder negative Zahl.	
2	Ich weiß, was ein Ortsvektor ist.	
3	Wie lang ist der Vektor von A(−1|−1) nach B(2|3)?	
4	Wie lautet der Vektor $\vec{b}$, der doppelt so lang und entgegengesetzt orientiert zu $\vec{a}$ ist? $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$	
5	Sind die Vektoren $\vec{a} - \vec{b}$ und $2\vec{b} - 2\vec{a}$ zueinander parallel? Begründe deine Antwort.	
6	Gib die Einheitsvektoren in Richtung der x- und der y-Achse an.	
7	Welche Eigenschaften hat der Vektor $(-2\vec{a})$ im Vergleich zu $\vec{a}$?	

Lösung:
1) A: falsch, B: richtig, C: falsch 2) siehe Seite 297 3) 5 E 4) $\vec{b} = (4, -10)$
5) Ja, da der Eine ein Vielfaches des Anderen ist. 6) $\vec{u_0} = (1, 0)$ und $\vec{v_0} = (0, 1)$
7) Er ist doppelt so lang und entgegengesetzt orientiert.

Technologieeinsatz

Tabellenkalkulationsprogramm (zB Excel 2010)

Die folgende Einführung gibt einen Überblick über die grundlegenden Befehle und Anwendungen, um die im Buch gezeigten Aufgaben durchführen zu können.

Einfache Berechnungen

Mithilfe von Formeln und Funktionen können Berechnungen durchgeführt werden. Eine Formel wird immer durch ein Gleichheitszeichen eingeleitet. Anstatt mit Zahlen zu rechnen, werden bei Formeln die Zelladressen eingegeben. Dies hat den Vorteil, dass bei Änderungen in einer Zelle das Ergebnis sofort mitgeändert wird.

Summe zweier Zahlen:

= ☐ + ☐

SUMME | =B1+B2

	A	B
1		5
2		3
3	Summe	=B1+B2

	A	B
1		5
2		3
3	Summe	8

Summe mehrerer Zahlen:

mit Autosumme Σ oder:

=SUMME(☐:☐)
von bis

SUMME | =SUMME(B1:B3)

	A	B	C
1		5	
2		12	
3		34	
4	Summe	=SUMME(B1:B3)	

	A	B
1		5
2		12
3		34
4	Summe	51

Beachte: Bei der Eingabe gegebenenfalls notwendige Klammern nicht vergessen.

ZB: $A = \frac{a + c}{2} \cdot h$

Eingabe:
=(B2+B3)/2*B4

B5 | =(B2+B3)/2*B4

	A	B	C
1			
2	a =	8	
3	c =	6	
4	h =	4	
5	A =	28	

Für die Multiplikation kann auch die Stern-Taste * verwendet werden, als Divisionszeichen der Schrägstrich /.

Damit das Eingeben von Formeln einfacher wird, kann einer Zelle auch ein Name gegeben werden. Dazu wird die Zelle aktiviert und im **Namenfeld** die Zelladresse durch einen beliebigen Namen (Buchstaben) ersetzt.

a

	A
1	

Potenzen und Wurzeln

Für Potenzen kann das Hochzeichen **^** oder die Funktion **=POTENZ(Basis;Exponent)** verwendet werden.

	A	B	C
1			
2	Basis	Exponent	
3	5	3	=B3^B3
4	2	10	=POTENZ(A4;B4)

	A	B	C
1			
2	Basis	Exponent	
3	5	3	27
4	2	10	1024

Die Quadratwurzel wird mit der Funktion **=WURZEL(Zahl)** berechnet.

	A	B
1		
2	Zahl	Wurzel
3	256	=WURZEL(A3)

	A	B
1		
2	Zahl	Wurzel
3	256	16

Beachte: Das Kommazeichen ist standardmäßig der Beistrich und NICHT der Punkt.

Ausfüllkästchen, Formeln kopieren

Um eine Liste (Zahlen, Wochentage, Monate) oder Formeln logisch fortzusetzen, kann das Ausfüllkästchen verwendet werden. Es erscheint als schwarzes Quadrat in der rechten unteren Ecke der aktiven Zelle.

	A
1	2
2	4
3	

	A	B	C	D	E	F
1		2	Montag		Jänner	
2		4	Dienstag		Februar	
3		6	Mittwoch		März	
4		8	Donnerstag		April	
5		10	Freitag		Mai	
6		12	Samstag		Juni	
7		14	Sonntag		Juli	
8		16	Montag		August	
9		18	Dienstag			
10		20				

Trigonometrie

Die Winkelfunktionen sind in Excel als Funktionen vorhanden, allerdings muss der Winkel im Bogenmaß angegeben werden. Die Umrechnung Gradmaß in Bogenmaß erfolgt mit der Funktion **BOGENMASS()**, die Funktion **GRAD()** gibt das Gradmaß zu einem im Bogenmaß gegebenen Winkel an.

	A	B	C	D	E
1	Umwandlungen				
2	Grad in Bogenmaß			Bogenmaß in Grad	
3	°	rad		rad	°
4	30	=BOGENMASS(A4)		0,5	=GRAD(D4)

	A	B	C	D	E
1	Umwandlungen				
2	Grad in Bogenmaß			Bogenmaß in Grad	
3	°	rad		rad	°
4	30	0,5235988		0,5	28,64789

Funktionen

Mit Excel lässt sich eine gegebene Wertetabelle problemlos als Diagramm veranschaulichen. Ist eine Funktion durch ihre Gleichung gegeben, so muss immer zuerst eine Wertetabelle erzeugt werden.

ZB: Temperaturkurve

GeoGebra, TI-Nspire: www.verlaghpt.at

Die Daten werden als Wertetabelle in Spalten eingegeben. Um ein Diagramm zu erstellen, wird die entstandene Tabelle markiert.

	A	B
1		
2	Monat	Temperatur
3	Jänner	11
4	Februar	13
5	März	16
6	April	19
7	Mai	23
8	Juni	28
9	Juli	31
10	August	31
11	September	27
12	Oktober	21
13	November	16
14	Dezember	12

Danach kann in der Registerkarte **Einfügen** in der Gruppe **Diagramme** ein passender Diagrammtyp ausgewählt werden. Hier wurde der Diagrammtyp **Linie**, **2D-Linie**, **Linie mit Datenpunkten** gewählt, da die Daten gleiche Abstände haben. Man erhält ein Diagramm, das mithilfe der **Diagrammtools** noch verändert werden kann. Zum Beispiel kann die Legende deaktiviert, ein Achsentitel hinzugefügt oder die Achsen verschoben werden.

Sind Wertepaare einer Messung gegeben, so ist der geeignete Diagrammtyp **Punkt**.

Technologieeinsatz

GeoGebra

GeoGebra ist eine frei zugängliche (www.geogebra.org), dynamische Mathematiksoftware, die Geometrie und Algebra vereint. Der Bildschirm kann im Menü **Ansicht** in eine Algebra-Ansicht, eine Grafik-Ansicht bzw. Tabellen-Ansicht geteilt werden. In der Grafik-Ansicht kann direkt mit den Werkzeugen aus der Werkzeugleiste oder dem Menü **Werkzeuge** konstruiert werden. Es gibt Werkzeuge für Punkte, Geraden … . Die Koordinaten der Punkte bzw. die Funktionsgleichungen werden entsprechend in der Algebra-Ansicht angezeigt. Sie können auch in der Eingabezeile direkt eingegeben werden.

ZB: Es soll die Verbindungsgerade der Punkte $A(-2|1)$ und $B(4|4)$ gezeichnet werden.

Mithilfe des Werkzeugs **Neuer Punkt** werden die beiden Punkte mit der Maus in der Grafik-Ansicht platziert. In der Nähe ganzzahliger Koordinaten wirkt ein automatischer Fang. Danach werden die Punkte mit dem Werkzeug **Gerade durch zwei Punkte** verbunden. In der Algebra-Ansicht wird auch die Gleichung der Geraden angezeigt.

Die Koordinaten der Punkte können auch in der Eingabezeile – in Klammern und durch einen Beistrich getrennt – eingegeben werden. Für die Verbindungsgerade wird der Befehl **Gerade[A,B]** eingegeben.

Weitere Werkzeuge werden bei Klicken auf den Pfeil rechts unten bei den Icons angezeigt oder können im Menü **Werkzeuge** ausgewählt werden.

Funktionen

Wird die Funktionsgleichung in der Eingabezeile eingegeben, so erhält die Funktion den Namen f(x), die nächste g(x) usw. Die Funktionsnamen können aber auch zugewiesen werden.

Ebenso muss die unabhängige Variable nicht x sein, dazu wird die Funktion in Abhängigkeit der Variablen eingegeben, zB $f(a) = 2a + 2$.

ZB: Es soll die Funktion $f(x) = 0{,}5x + 2$ grafisch dargestellt werden.

Die Funktionsgleichung wird in der Eingabezeile eingegeben. Dabei muss das Kommazeichen als Punkt eingegeben werden.

Eingabezeile: **0.5x+2**

Mit dem Werkzeug **Verschiebe Zeichenblatt** kann das Koordinatensystem verschoben werden. Auch Vergrößern und Verkleinern ist möglich.

Das Werkzeug **Bewege** bietet die Möglichkeit Objekte zu verschieben.

Objekte können bearbeitet werden, indem man mit der linken Maustaste doppelklickt.

Berechnungen und Algebra

Rechnungen werden in der Eingabezeile eingegeben und mit Enter abgeschlossen. Das Ergebnis wird in der Algebra-Ansicht ausgegeben.

Alle Befehle und deren Befehlsfolge können über die **Eingabehilfe** angezeigt werden.

Die Zuweisung von Werten an eine Variable erfolgt mit einem Gleichheitszeichen. Wird nur eine Zahl eingegeben, so wird diese automatisch mit dem ersten freien Buchstaben des Alphabets als Variable gespeichert.

ZB: Der Term $\frac{a \cdot b^2 + a}{2b}$ soll für $a = 3$ und $b = 2$ ausgewertet werden.

Eingabehilfe

Technologieeinsatz

Der TI-Nspire CAS CX (Version 3.0)

Der **Hauptbildschirm** dient zum Verwalten von Dokumenten und Einstellungen. Die verschiedenen Menüpunkte können mithilfe der Pfeiltasten ausgewählt und durch anschließendes Drücken der enter- oder -Taste oder durch Eingabe der davor stehenden Ziffer ausgewählt werden. Der Hauptbildschirm wird durch Drücken der Taste on erreicht.

Beim Öffnen eines neuen Dokuments oder einer neuen Seite kann aus den verschiedenen Applikationen (Calculator, Graphs, Geometry ...) gewählt werden. Ein **Dokument** ist in **Probleme** unterteilt (1.x, 2.x ...), welche wiederum verschiedene **Seiten** enthalten (1.1, 1.2 ...). Um Dokumente zu speichern oder neue Probleme oder Seiten hinzuzufügen, kann die Taste doc gedrückt werden. Der Wechsel zwischen den Seiten erfolgt durch Drücken von ctrl und den Pfeiltasten.

Für schnelle Berechnungen kann auch das Scratchpad benutzt werden.

Ändern der Einstellungen

Die Einstellungen für das **aktuelle** Dokument können in Dokumente (doc, **7: Einstellungen und Status**, **2: Einstellungen**, **1: Allgemein**) oder im Hauptbildschirm (**5: Einstellungen**) geändert werden.

Einfache Berechnungen

Berechnungen werden in der Applikation **Calculator** durchgeführt.

Die Ausdrücke werden im Arbeitsbereich eingegeben und mit enter abgeschlossen.

Für den Berechnungsmodus gibt es drei Möglichkeiten: Auto, Exakt oder Approximiert. „Exakt" gibt Ergebnisse ganzzahlig oder als Bruch oder Wurzel aus. Bei „Approximiert" wird das Ergebnis als gerundete Dezimalzahl ausgegeben. Im Format „Auto" wird das Ergebnis wie bei „Exakt" ausgegeben, wenn kein Komma vorkommt. Um ein approximiertes Ergebnis zu erhalten, muss ctrl enter gedrückt werden.

Bei der Eingabe von **Potenzen** muss darauf geachtet werden, wo sich der Cursor befindet.

Nach Drücken der ^-Taste befindet sich der Cursor im Exponenten, durch Drücken einer Pfeiltaste wird er auf die Grundlinie gesetzt.

Bei **Brüchen** müssen Zähler- und Nennerterm jeweils in Klammern eingegeben werden. Dabei wird die zweite Klammer automatisch gesetzt. Der Bruch wird anschließend in Bruchschreibweise dargestellt. Die Eingabe kann auch mithilfe einer „**Mathematischen Vorlage**“ erfolgen.

Variable und Funktionen

Variablen und auch Funktionen können mithilfe von „sto“ (ctrl var) oder mit „:=“ (ctrl) gespeichert werden. Wurde eine Variable (Funktion) gespeichert, so wird sie bei erneuter Eingabe fett angezeigt.

Um eine Funktion grafisch darzustellen, muss die Applikation **Graphs** geöffnet werden.

Hier können Funktionsgraphen dargestellt und untersucht werden.

Die Funktionsgleichung wird in der Eingabezeile eingegeben und mit enter oder tab beendet.

Werden mehrere Funktionen eingegeben, so kann mit der Cursortaste zwischen diesen gewechselt werden. Es kann auch eine zuvor auf einer beliebigen Seite des gleichen Problems definierte Funktion statt der Funktionsgleichung eingegeben werden. Zwischen Eingabezeile und Arbeitsbereich kann mit der tab-Taste gewechselt werden. Der Menüpunkt **Fenstereinstellungen** befindet sich im Menü **4: Fenster**.

Im Menü **7: Punkte & Geraden** können spezielle Punkte auf den Graphen, Schnittpunkte ... ermittelt werden.

Winkelfunktionen

sin	cos	tan	csc	sec	cot
sin⁻¹	cos⁻¹	tan⁻¹	csc⁻¹	sec⁻¹	cot⁻¹

Die Winkelfunktionen können über die Taste trig erreicht oder direkt eingetippt werden.

Zusammenfassung wichtiger Formeln

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$a^0 = 1$	$a^1 = a$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Klammernregeln:

$a + (b + c) = a + b + c$
$a + (b - c) = a + b - c$
$a - (b + c) = a - b - c$
$a - (b - c) = a - b + c$

Vorzeichenregeln:

$(+a) \cdot (+b) = +a \cdot b$	$(+a) : (+b) = +a : b$
$(+a) \cdot (-b) = -a \cdot b$	$(+a) : (-b) = -a : b$
$(-a) \cdot (+b) = -a \cdot b$	$(-a) : (+b) = -a : b$
$(-a) \cdot (-b) = +a \cdot b$	$(-a) : (-b) = +a : b$

Quadrieren und Kubieren von Binomen:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$	$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$	$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$

Cramer'sche Regel:

Das lineare Gleichungssystem $\begin{array}{l} \text{I: } a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y = b_1 \\ \text{II: } a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y = b_2 \end{array}$ ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die Determinante D der Koeffizientenmatrix verschieden von null ist.

In diesem Fall kann die Lösung mit der **Cramer'schen Regel** berechnet werden:

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D} \quad \text{mit } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \; D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \text{ und } D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Allgemeines Dreieck:

$A = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$

$A = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$

mit $s = \frac{a + b + c}{2}$

Rechtwinkliges Dreieck:

$a^2 + b^2 = c^2$
$a^2 = c \cdot p$
$b^2 = c \cdot q$
$h^2 = p \cdot q$
$A = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot h}{2}$
$\alpha + \beta = 90°$

Gleichschenkliges Dreieck:

$A = \frac{c \cdot h_c}{2}$
$\gamma = 180° - 2\alpha$
$u = 2a + c$

Gleichseitiges Dreieck:

$h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$
$A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$
$\alpha = \beta = \gamma = 60°$
$u = 3a$

Zusammenfassung wichtiger Formeln

Strahlensätze

1. Strahlensatz:

$\overline{SA_1} : \overline{SA_2} = \overline{SB_1} : \overline{SB_2}$

$\overline{SA_1} : \overline{A_1A_2} = \overline{SB_1} : \overline{B_1B_2}$

2. Strahlensatz:

$\overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2} = \overline{SA_1} : \overline{SA_2}$

$\overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2} = \overline{SB_1} : \overline{SB_2}$

Trapez: Ein Paar paralleler Seiten

$A = \frac{a + c}{2} \cdot h$

$u = a + b + c + d$

Gleichschenkliges Trapez: $d = b$

Parallelogramm: Zwei Paare paralleler Seiten

$A = a \cdot h_a = b \cdot h_b$

$u = 2 \cdot (a + b)$

Die Diagonalen e und f halbieren einander.

Rechteck: Vier gleich große (rechte) Winkel

$A = a \cdot b$

$u = 2 \cdot (a + b)$

$d = \sqrt{a^2 + b^2}$

Quadrat: Vier gleich lange Seiten und vier gleich große Winkel

$A = a^2$

$u = 4 \cdot a$

$d = a \cdot \sqrt{2}$

Deltoid: Zwei Paare gleich lange benachbarter Seiten

$A = \frac{e \cdot f}{2}$

$u = 2 \cdot (a + b)$

Die beiden Diagonalen stehen normal aufeinander ($e \perp f$). Die Winkel β und δ sind gleich groß.

Raute (Rhombus): Vier gleich lange Seiten

$A = a \cdot h_a = \frac{e \cdot f}{2}$

$u = 4 \cdot a$

Die Diagonalen e und f stehen aufeinander normal und halbieren einander. Sie sind Winkelsymmetralen.

Kreis:

Kreissektor:

Kreissegment:

Kreisring:

Umfang eines Kreises: $u = d \cdot \pi = 2 \cdot r \cdot \pi$

Flächeninhalt eines Kreises: $A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$

Kreisbogenlänge: $b = r \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{180°}$

Kreissektorfläche: $A = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360°} = \frac{b \cdot r}{2}$

Kreissegmentfläche: $A = \frac{b \cdot r}{2} - \frac{s \cdot (r - h)}{2}$

Umfang eines Kreisrings: $u = 2 \cdot \pi \cdot (r_a + r_i)$

Kreisringfläche: $A = (r_a^2 - r_i^2) \cdot \pi = 2 \cdot r_m \cdot \pi \cdot w$

Zusammenfassung wichtiger Formeln

Im rechtwinkligen Dreieck gilt:

Gegenkathete von α: Seite, die dem Winkel α **gegen**überliegt

Ankathete von α: Seite, die am Winkel α **an**liegt

Hypotenuse: Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt

Winkelfunktionen

$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$ $\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$ $\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$

Steigungswinkel oder **Neigungswinkel** φ: Winkel, den eine Gerade oder eine Ebene mit der Horizontalen einschließt. $k = \tan(\varphi)$ bzw. $\varphi = \arctan(k)$

Flächenprojektionssatz: $A' = A \cdot \cos(\varphi)$

A ... Flächeninhalt einer unter dem Winkel φ geneigten beliebigen Fläche

A' ... Flächeninhalt der Normalprojektion dieser Fläche

Volumen: Schnittfläche ist auf jeder Höhe gleich groß: $V = G \cdot h$

Schnittfläche verkleinert sich von der Grundfläche bis zur Spitze quadratisch: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

Satz von Cavalieri: Das Volumen zweier Körper ist gleich, wenn sie auf gleicher Höhe stets Schnifflächen mit gleichem Flächeninhalt haben.

Prisma: $V = G \cdot h$, $O = 2 \cdot G + M$

Kreiszylinder: $V = r^2\pi \cdot h$, $O = 2r\pi \cdot (h + r)$

Pyramide: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$, $O = G + M$

Kreiskegel: $V = \frac{1}{3} \cdot r^2\pi \cdot h$, $M = r\pi s$, $O = r\pi \cdot (r + s)$

Kugel: $V = \frac{4}{3}r^3\pi$, $O = 4r^2\pi$

Quader und **Würfel** sind (spezielle) Prismen.

Volumen des Quaders: $V = a \cdot b \cdot c$

Oberfläche des Quaders: $O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$

Volumen des Würfels: $V = a^3$

Oberfläche des Würfels: $O = 6 \cdot a^2$

Ein Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ ist die Menge aller gleich langen, gleich gerichteten und gleich orientierten Pfeile.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ ... Koordinaten des Endpunkts minus Koordinaten des Anfangspunkts

Betrag (Länge) des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2}$

Einheitsvektor: $\overrightarrow{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$

Addition bzw. Subtraktion von Vektoren: $\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \end{pmatrix}$

Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl (Skalar): $s \cdot \vec{a} = s \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot a_x \\ s \cdot a_y \end{pmatrix}$

Mittelpunkt der Strecke AB: $M_{AB} = \frac{1}{2} \cdot (A + B)$

Schwerpunkt des Dreiecks ABC: $S = \frac{1}{3} \cdot (A + B + C)$

Sachwortverzeichnis

Sachwortverzeichnis

Sachwortverzeichnis

verlaghpt.at

Diese Mathematikreihe bietet in zeitgemäßer Sprache und funktionellem Layout altersadäquate Zugänge zur Mathematik und ihren technischen Anwendungen. Nach lebensnahen Einstiegen erfolgt in schrittweisen Erklärungen eine Erarbeitung des Basiswissens. Dieses wird in alltagsbezogenen und vernetzten Aufgaben angewendet und erweitert.

- altersadäquate Einstiege
- zeitgemäße Sprache und Layout
- alltagsbezogene und technische Aufgaben
- vernetzte Aufgaben

www.verlaghpt.at

Mathematik mit techn. Anwend. 1 (LP 2011)
Schulbuchnummer: 155018
ISBN 978-3-230-03548-6
Wien, 1. Auflage

Alle Drucke der 1. Auflage können im Unterricht nebeneinander verwendet werden.

9783230 035486